المـــنطـــق

I) العبارة – الدالة العبارية

1) نسمي عبارة كل جملة مفيدة ويمكن الحكم على المعنى الذي تحمله بالصحة أو الخطأ.

2) نسمي دالة عبارية كل نص يحتوي على متغير x من مجموعة E ويصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر محدد من E .

II) المكممات

لتكن $A(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E .

1) العبارة: $(\exists x \in E): A(x)$ تقرأ " يوجد على الأقل x من E بحيث $A(x)$ " وتعني يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $A(x)$.
الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي.

2) العبارة $(\forall x \in E): A(x)$ تقرأ " مهما كان x من E لدينا $A(x)$.
وتعني أن جميع عناصر E تحقق $A(x)$.
الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

III) العمليات المنطقية.

1) النفي

a) نفي العبارة A هي العبارة التي نرمز لها ب $7A$ والتي تكون صحيحة إذا كانت A خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت A صحيحة.

ملاحظة: " $7A$ هي عكس العبارة A "

b) نفي العبارة " $(\forall x \in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\exists x \in E): 7A(x)$ ".

c) نفي العبارة " $(\exists x \in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\forall x \in E): 7A(x)$ ".

2) العطف

عطف العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب (A و B) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A صحيحة و B صحيحة .

3) الفصل

فصل العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب (A أو B) والتي تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صحيحة.

4) الإستلزام

استلزام العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب $(A \Rightarrow B)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت A صحيحة و B خاطئة.
(وتقرأ A تستلزم B).

5) التكافؤ

تكافؤ العبارتين A و B هي العبارة التي نرمز لها ب $(A \Leftrightarrow B)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت ل A و B نفس قيمة الحقيقة.
(وتقرأ A تكافئ B).

IV) القوانين المنطقية.

1) تعريف:

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة بالروابط المنطقية وتكون صحية مهما كانت قيمة حقيقة هذه العبارات.

2) جرد لأهم القوانين المنطقية.

(1) $7(7A) \Leftrightarrow A$ (2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (7A \ ou \ B)$

(3) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (7A \Leftrightarrow 7B)$

(4) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \ et \ B \Rightarrow A)$

(5) $(A \ et \ B) \Leftrightarrow (B \ et \ A)$

(6) $(A \ ou \ B) \Leftrightarrow (B \ ou \ A)$

(7) $\left[(A \ et \ B) et \ C\right] \Leftrightarrow \left[A \ et \ (B \ et \ C)\right]$

(8) $\left[A \ ou \ (B \ ou \ C)\right] \Leftrightarrow \left[(A \ ou \ B) ou \ C\right]$

(9) $\left[A \Rightarrow B \ et \ B \Rightarrow C\right] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(10) **قانون التاكافؤات المتتالية**

$$(A \Leftrightarrow B \ et \ B \Leftrightarrow C) \Rightarrow A \Leftrightarrow C$$

(11) $\left[A \ et \ (B \ ou \ C)\right] \Leftrightarrow \left[(A \ et \ B) ou \ (A \ et \ C)\right]$

(12) $\left[A \ ou \ (B \ et \ C)\right] \Leftrightarrow \left[(A \ ou \ B) et \ (A \ ou \ C)\right]$

(13) **قانوني موركان.**

$$7(A \ et \ B) \Leftrightarrow (7A \ ou \ 7B) \ (*)$$

$$7(A \ ou \ B) \Leftrightarrow (7A \ et \ 7B) \ (*)$$

(15) **قانون الاستلزام المضاد للعكس**

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (7B \Rightarrow 7A)$$

$$7(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (7A \ et \ 7B) \quad (16)$$

(17) **قانون الخلف**

$$((7A \Rightarrow 7B) et \ B) \Rightarrow A$$

(18) **قانون فصل الحالات**

$$(A \Rightarrow C \ et \ B \Rightarrow C) \Rightarrow \left[(A \ ou \ B) \Rightarrow C\right]$$

V) بعض الاستدلالات.

1) الاستدلال بالتكافؤات المتتالية:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة يكفي أن نبين أن $A \Leftrightarrow B$ و B صحيحة.

2) الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس:

لكي نبين أن $A \Rightarrow B$ يكفي أن نبين $7B \Rightarrow 7A$.

3) الاستدلال بالخلف:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة نفترض العكس ونصل إلى تناقض مع المعطيات.

4) الاستدلال بفصل الحالات:

لتكن $E = E_1 \cup E_2$ لكي نبين أن $(\forall x \in E): A(x)$ يكفي أن نبين ما يلي: *) إذا كان $x \in E_1$ فإن $A(x)$ صحيحة.
*) إذا كان $x \in E_2$ فإن $A(x)$ صحيحة.

5) الاستدلال بالترجع:

لكي نبين أن العبارة $P(n)$ صحيحة لكل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نبين ما يلي:

*) نبين أن العبارة صحيحة من أجل $n = n_0$

*) نفترض العبارة P صحيحة من أجل n .

*) نبين أن العبارة P صحيحة من أجل $n+1$.

عموميات حول الدوال

I- دالة زوجية – دالة فردية

1) من أجل دراسة زوجية دالة، نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نحسب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية.

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية.

2)*) يمكن لدالة أن لا تكون لا زوجية ولا فردية.

*) $(-x)^n=\begin{cases} x^n ; & n \text{ زوجي} \\ -x^n ; & n \text{ فردي} \end{cases}$ $\quad |-x|=|x|$

3) تكون f زوجية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

4) تكون f فردية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

II- رتابة دالة

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x<y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\le f(y)$ $(f(x)<f(y))$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $f(x)\ge f(y)$ $(f(x)>f(y))$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2) من أجل دراسة رتابة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ ونقوم بحساب معدل التغيير $T(x;y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ونقوم بدراسة إشارة $T(x,y)$ (بتأطيره مثلا).

*) إذا وجدنا $T(x,y)\ge 0$ $(T(x,y)>0)$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\le 0$ $(T(x,y)<0)$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I .

3) نقول إن f رتيبة على I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

4) a) لتكن f دالة زوجية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

III- مقارنة دالتين

1) a) نقول إن f موجبة على D وتكتب $f\ge 0$ إذا كان $f(x)\ge 0$ لكل x من D .

b) نقول إن f سالبة على D وتكتب $f\le 0$ إذا كان $f(x)\le 0$ لكل x من D .

ملاحظات: (التأويل الهندسي)

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقد إذا كان C_f فوق محور الأفاصيل.

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقد إذا كان C_f تحت محور الأفاصيل.

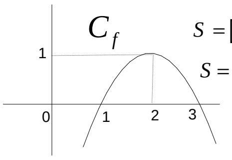
*) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f فوق محور الأفاصيل.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت محور الأفاصيل.

مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هو $S=[1,3]$

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ $S=]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

*) حلول المتراجحة $f(x)>0$ $S=]1,3[$



2) نقول إن $f\le g$ على D إذا وفقط إذا كان $f(x)\le g(x)$ لكل x من D .

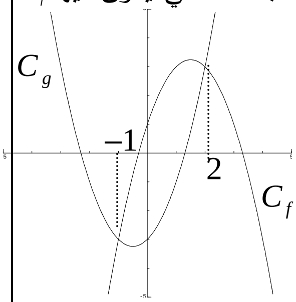
ملاحظات: (التأويل الهندسي)

*) تكون $f\le g$ إذا وفقط إذا كان C_f تحت C_g .

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g .

مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge g(x)$ هي : $S=[-1,2]$.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.



*) حلول المتراجحة $f(x)>g(x)$ هي : $S=]-1,2[$

3) a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b)*) من أجل تحديد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ إذا كانت x_1 و x_2 ... هي الحلول فإن نقط تقاطع هي $A(x_1,0);B(x_2,0)$ ...

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) *) لكي نحدد تقاطع C_f و C_g نحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت x_1 و x_2 .. هي الحلول فإن نقط تقاطع C_f و C_g هي $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ ....

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g .

IV- دالة مكبورة – دالة مصغورة

1) نقول إن f مكبورة على D إذا وُجد عدد M بحيث $f(x)\le M$ لكل x من D .

2) نقول إن f مصغورة على D إذا وُجد عدد m بحيث $f(x)\ge m$ لكل x من D .

3) نقول إن f محدودة على D إذا وُجد عدد m و M بحيث $m\le f(x)\le M$ لكل x من D .

ملاحظة: تكون f محدودة على D إذا وُجد عدد موجب M بحيث $|f(x)|\le M$ لكل x من D .

V- مطارف دالة

1) لكي نبين أن f تقبل قيمة قصوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2) لكي نبين أن f تقبل قيمة دنوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\ge f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

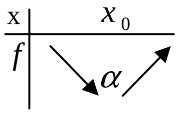
3) لكي نبين أن α قيمة قصوية مطلقة ل f نبين أن $f(x)\le\alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

4) لكي نبين أن α قيمة دنوية مطلقة ل f نبين أن $f(x)\ge\alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

5) لكي نبين f تقبل قيمة قصوية نسبية عند x_0 نبين أنه يوجد مجال I يحتوي على x_0 بحيث $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من I . وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$. (تعريف مماثل بالنسبة لقيمة دنوية نسبية)

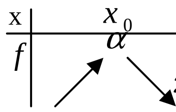
ملاحظة:

a) إذا كان جدول تغيرات f هو



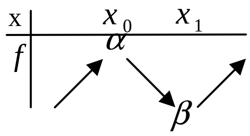
فإن α هي القيمة الدنوية المطلقة

b) إذا كان جدول تغيرات f هو



فإن α هي القيمة القصوية المطلقة

c) إذا كان جدول تغيرات f هو



فإن α هي قيمة قصوية نسبية و β قيمة دنوية نسبية.

VI- صور جزء من IR بدالة عددية

1) $f(D)=\{f(x)/x\in D\}$ يعني $f(D)$ هي المجموعة المكونة من صور جميع عناصر D .

2) $y\in f(D)$ يعني يوجد x من D بحيث $f(x)=y$.

3) لكي نبين أن $f(I)=J$ جبريا نبين ما يلي:

a) $f(I)\subset J$ ولهذا نأخذ $x\in I$ ونبين أن $f(x)\in J$.

b) $J\subset f(I)$ ولهذا نأخذ $y\in J$ ونبين أن $y\in f(I)$ ولهذا نبحث عن $x\in I$ بحيث $f(x)=y$.

VII- مركب دالتين

1) لتكن f و g دالتين بحيث $f(D_f)\subset D_g$ الدالة gof هي الدالة المعرفة على D_f بما يلي $(\forall x\in D_f)\ gof(x)=g(f(x))$.

2) a) من أجل تحديد حيز تعريف gof نتبع ما يلي: $x\in D_{gof}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases}$

b) لكي نبين أن $g\circ f$ معرفة على I نبين ما يلي: $\begin{cases}I\subset D_f\\ f(I)\subset D_g\end{cases}$

3) إذا كانت f و g تحققان ما يلي:

*) f رتيبة على I

*) $f(I)\subset J$

*) g رتيبة على J

فإن $g\circ f$ رتيبة على I

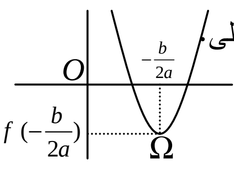
تكون $g\circ f$ تزايدية إذا كانت لـــ f و g نفس الرتابة.

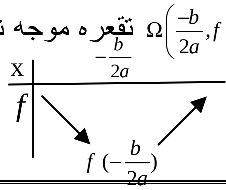
وتكون تناقصية إذا كانت لـــ f و g رتابتين مختلفتين

VIII- الدوال الاعتيادية

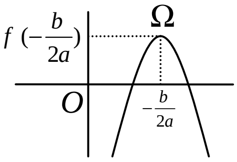
1) الدالة $\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$

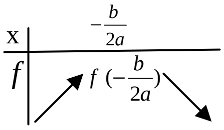
a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأعلى.





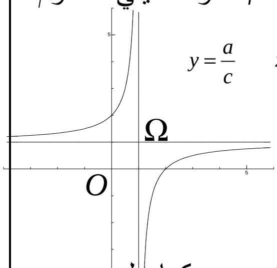
b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأسفل.

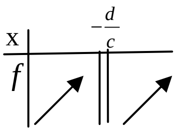




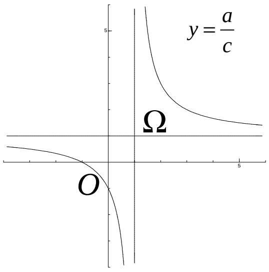
2) الدالة $\boxed{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}}$ مع $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

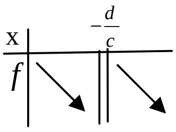
a) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}>0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$ متقارباه $x=\frac{-d}{c}$ $y=\frac{a}{c}$





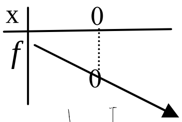
b) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}<0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$ متقارباه $x=\frac{-d}{c}$ $y=\frac{a}{c}$

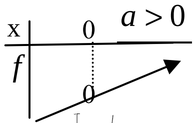


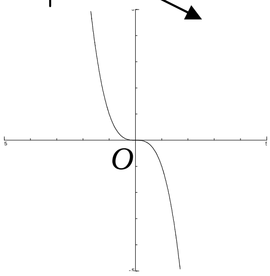


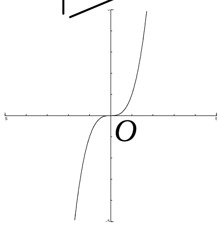
3) الدالة $\boxed{f(x)=ax^3}$

$a>0$ $a<0$





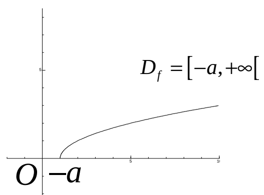


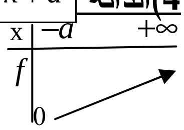


ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=ax^3+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(0)=b$

4) الدالة $\boxed{f(x)=\sqrt{x+a}}$

$D_f=[-a,+\infty[$





ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(-a)=b$

5) a) نعتبر الدالة $g(x)=|f(x)|$. C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل. ومماثل جزء Cf الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل.

b) نعتبر الدالة $g(x)=f(|x|)$. C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب.

6) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta): y=m$.

المرجح

نسمي نقطة متزنة كل زوج (A,α) حيث A نقطة من المستوى و α عدد حقيقي.

I) مرجح نقطتين.

1) **تعريف** لتكن (A,α) و (B,β) نقطتين متزنتين.

إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين (A,α) و (B,β) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

2) **خاصية مميزة:**

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إذا وفقط إذا كان $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)}$ لكل θ من المستوى P.

ملاحظة:

a) إذا أردنا أن نبين أن G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ يستحسن استعمال التعريف ونبين أن $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولهذا نتبع ما يلي:

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}$ ثم نحسب $\overrightarrow{GA}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ونعوض.

b) إذا كان G مرجح النظمة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ وأردنا حساب $\overrightarrow{AG}$ أو $\overrightarrow{BG}$ أو $\overrightarrow{CG}$ أو ... يستحسن استعمال الخاصية المميزة.

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P ثم نعوض O ب A أو B أو C ...

3) إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\}$ لكل k من $\mathbb{R}^*$. وهذا يعني أن المرجح لا يتغير إذا ضربنا الأوزان أو قسمناها على عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$ G يسمى مركز ثقل A و B.

لدينا من خلال ما سبق G مرجع $\{(A,1)(B,1)\}$ إذن $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ لكل θ من P ومن أجل $O=A$ نجد $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ إذن G منتصف $[AB]$

خاصية: مرجح النظمة $\{(A,1)(B,1)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ وهو منتصف $[AB]$.

ملاحظة: إذا أردنا أن نبين أن I منتصف $[AB]$ نبين أن I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$ يعني $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

5) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ لدينا $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)$ لكل O من P. ومن أجل $O=A$ نجد $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ إذن $G\in(AB)$

ملاحظة: إذا أردنا إنشاء المرجح G نقوم بحساب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BG}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$.

6) **إحداثيات المرجح:**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha x_A+\beta x_B\right)\\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha y_A+\beta y_B\right)\end{cases}$$

II) مرجح ثلاث نقط.

1) **تعريف:** لتكن (A,α) (B,β) (C,γ) ثلاث نقط متزنة.

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G تحقق: $\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$ النقطة G تسمى مرجح النقط (A,α) و (B,β) و (C,γ) أو مرجح النظمة المتزنة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$.

2) **خاصية مميزة:**

تكون النقطة G مرجح النظمة $\{(A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma)\}$ إذا وفقط إذا كان: $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}\right)}$ لكل O من المستوى P

ملاحظة: نفس ملاحظة I).

3) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا الأوزان على نفس عدد غير منعدم.

4) ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ مع $(\alpha\neq 0)$.

لدينا G مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$. المرجح G يسمى في هذه الحالة مركز ثقل النقط A,B,C أو مركز ثقل المثلث (ABC).

خاصة: مرجح $\{(A,\alpha)(B,\alpha)(C,\alpha)\}$ هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ وهو مركز ثقل (ABC).

5) **إحداثيات المرجح.**

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

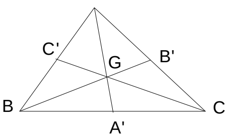
$$\begin{cases} x_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C\right)\\ y_G=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C\right)\end{cases}.$$

6) **التجميعية.**

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.

7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$



A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.

ولدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

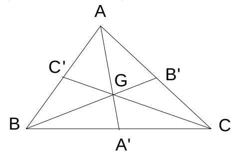
5 إحداثيات المرجح.

ليكن G مرجح $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$ إحداثيات G هي

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C) \\ y_G = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C) \end{cases}.$$

6 التجميعية.

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



7 ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات (AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G.

ولدينا $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

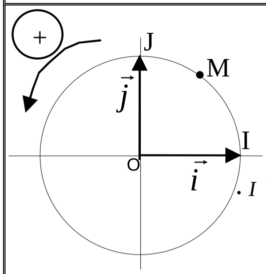
III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخاصيات السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

7 مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.

الحساب المثلثي

I- الأفاصيل المنحنية



1) $*$) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها1

$*$)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

$*$) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I .

2) لتكن M نقطة من U. للحصول على أفصول منحني لــ M .
نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.
ليكن α طول هذه القوس.

$*$) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M .

$*$) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).
وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان αوβ أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

__ملاحظة:__ 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$

$\Leftrightarrow$ (αوβ أفصولين منحنين لنفس النقطة)

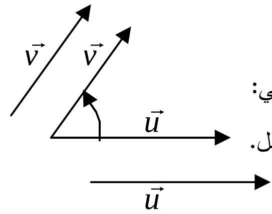
2) $*$) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\quad[2\pi]$

$*$) $\alpha\equiv\beta\,[2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\;[2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M
(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $0,1,2....,(n-1)$
وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II- قياس الزوايا الموجهة



1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.
من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:

$*$) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

$*$) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما
(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

$\longleftarrow$) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب
$(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv\alpha[2\pi]$.

$\longleftarrow$) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.
ونكتب $(\overline{\vec{u},\vec{v}})=-\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\leq\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})+(\overline{\vec{w},\vec{v}})$ $[2\;\;]$ (علاقة شال).

c) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\vec{v},\vec{u})\quad[2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون αوβ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

__ملاحظة:__

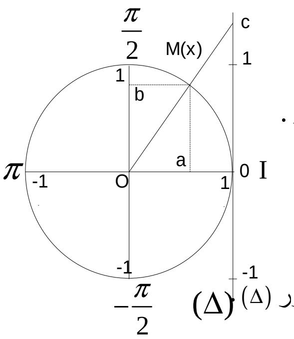
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III- الدوال المثلثية

1)تعريف



لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .
وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .
ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

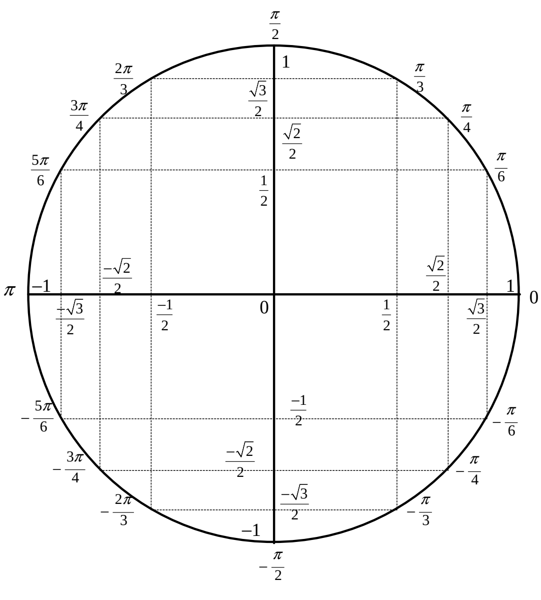
$*$) ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x
ليكن a أفصول ل M و b
ارتوب M يعني $M(a,b)$.
c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ) .
لدينا

$$\cos x=a\qquad\sin x=b\qquad\tan x=c$$

2) خاصيات

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$ $\quad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

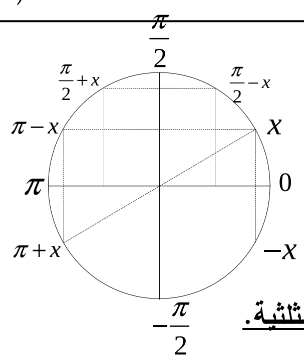
d) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\quad \sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

e) $\cos(-x)=\cos x$ $\quad \sin(-x)=-\sin x$ $\quad \tan(-x)=-\tan x$

f)
$$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\tan(\pi-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x$$

g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$$

h) $(\forall x\in\mathbb{R}): -1\leq \cos x\leq 1 \quad ; \quad -1\leq \sin x\leq 1$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$

$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$ $\qquad \cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$

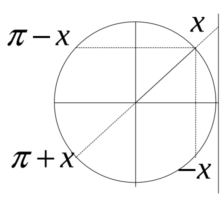
$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

b)
$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$



c) $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha\notin[-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x=a$ و $\sin x=a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x))=a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \text{ معرفة} \\ u(x)\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

3) $-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ $\quad -\sin\alpha=\sin(-\alpha)$ $\quad -\tan\alpha=\tan(-\alpha)$

$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\quad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x)=a\cos(u(x))+b$ أو $f(x)=a\sin(u(x))+b$

*) إذا كان a و b غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x))+b$ $\quad f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

b)
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned} f(x)&=a\cos x+b\sin x \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

مع $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

الجداء السلمي- الدائرة

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) نعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ و $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

4)

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})$.

b) $\sin(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\det(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ $\cos(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

c) $\cos(B\hat{A}C)=\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$

d) $\sin(B\hat{A}C)=\left|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|=\left|\dfrac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\cdot AC}\right|$.

ملاحظة:

a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية $B\hat{A}C$ يكفي حساب $\cos(B\hat{A}C)$

نجد مثلا: $\cos(B\hat{A}C)=-\frac{1}{2}$

يعني $\cos(B\hat{A}C)=\cos\frac{2\pi}{3}$

إذن $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.

b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ نقوم بحساب $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

نجد مثلا: $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ يعني $\cos(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\cos\frac{3\pi}{4}$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ أو $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

ولدينا $\sin(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\langle 0$

إذن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

يعني $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$

5) **المستقيم في المستوى**

a) ليكن (D) مستقيم و $\vec{n}$ متجهة. نقول إن المتجهة $\vec{n}$ منظمية على (D) إذا كان حامل $\vec{n}$ عمودي على (D) **(يعني** $\vec{n}\perp(D)$ **)**.

b) نعتبر المستقيم: $(D): ax+by+c=0$

لدينا $\vec{u}(-b,a)$ موجهة ل (D) و $\vec{n}(a,b)$ منظمية على (D).

c) معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه.

مثال: حدد المعادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من $A(1,2)$ والمتجهة $\vec{n}(-3,4)$ منظمية عليه.

طريقة 1.

$$M(x,y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow-3(x-1)+4(y-2)=0$$

إذن $(D): -3x+4y-5=0$

طريقة 2. لدينا $\vec{n}(-3,4)$ منظمية على (D) إذن معادلة (D) على شكل $(D): -3x+4y-5=0$ ولدينا $A(1,2)$ إذن $(-3)\cdot 1+4(2)+c=0$ يعني $c=-5$ إذن $(D): -3x+4y-5=0$.

d) ليكن (D) مستقيم مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه.

و (D') مستقيم مار من A' و $\vec{n}'$ منظمية عليه.

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذاكان $\vec{n}\perp\vec{n}'$ يعني $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$.

*) يكون $(D)//(D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}//\vec{n}'$ يعني $\det(\vec{n}\cdot\vec{n}')=0$.

e) نعتبر المستقيمين: $(D): ax+by+c=0$ $(D'): a'x+b'y+c'=0$

*) يكون $(D)\perp(D')$ إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$.

*) يكون $(D)//(D')$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=0$

f) مسافة نقطة عن مستقيم.

i) ليكن (D) مستقيم و A نقطة من المستوى.

نسمي مسافة A عن (D) العدد الذي نرمز له ب $d(A,(D))$ والمعرف بما يلي $d(A,(D))=AH$ حيث H هي المسقط العمودي ل A على (D).

ii) نعتبر المستقيم $(D): ax+by+c=0$ والنقطة $A(x_0,y_0)$

لدينا $d(A,(D))=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

ملاحظة: مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي أصغر مسافة بين A ونقط المستقيم (D).

g) واسط القطعة $[AB]$ هو المستقيم المار من I منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}$ منظمية عليه.

h) *) مركز ثقل المثلث (ABC) هو تقاطع المتوسطات.

*) مركز تعامد المثلث (ABC) هو تقاطع الارتفاعات.

*) مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع الواسطات.

*) مركز الدائرة المحاطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع المنصفات.

II) دراسة تحليلية للدائرة.

① الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة M التي تحقق $\Omega M = r$.

② معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هي $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

③ نعتبر المجموعة (Γ) التيمعادلتها $(\Gamma): x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$

من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع $a=-\dfrac{\alpha}{2}$ $\;b=-\dfrac{\beta}{2}$ $\;c=\gamma$ ونقوم بحساب a^2+b^2-c

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\langle 0}$ فإن $\Gamma=\varnothing$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c=0}$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$

*) إذا كان $\boxed{a^2+b^2-c\rangle 0}$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنرجعها على شكل $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ باستعمال بداية متطابقة هامة $\boxed{X^2+\alpha X=\left(X+\dfrac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$.

*) إذا كان $k\langle 0$ فإن $(\Gamma)=\varnothing$.

*) إذا كان $k=0$ فإن $\Gamma=\{\Omega(a,b)\}$.

*) إذا كان $k\rangle 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r=\sqrt{k}$.

④ **معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.**

لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة: $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

$M(x,y)\in(\ell)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

ط2: نتبع ما يلي: $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B\end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. مركزها هو منتصف $[BC]$ شعاعها هو $\dfrac{BC}{2}$.

⑤ **تمثيل بارامتري لدائرة.**

تمثيل بارامتري للدائرة (ℓ) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هو $(\theta\in\mathbb{R})$ $(C):\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$.

⑥ **داخل خارج دائرة.**

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ونعتبر النقطة $M(\alpha,\beta)$.

*) تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\Omega M\rangle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\rangle 0$

*) تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\Omega M\langle 0$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c\langle 0$.

*) $M\in(C)$ إذا وفقط إذا كان $\Omega M=r$ أو $\alpha^2+\beta^2+a\alpha+b\beta+c=0$.

⑦ **تقاطع مستقيم ودائرة.**

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

ونعتبر المستقيم $(\Delta):\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب $d(\Omega,(\Delta))$.

a) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\rangle r}$ فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C) .

b) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))=r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A . ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.

وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل النظمة $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\end{cases}$.

c) إذا كانت $\boxed{d(\Omega,(\Delta))\langle r}$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A و B ، وللحصول على احداثيات النقطتين A و B نقوم بحل النظمة $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\end{cases}$.

⑧ **معادلة مماس لدائرة.**

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ وليكن (T) المماس ل (C) في النقطة $A(x_0,y_0)$.

للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة $(T): x_0x+y_0y+\dfrac{a}{2}(x_0+x)+\dfrac{b}{2}(y_0+y)+c=0$

ط2: (T) هو المستقيم المار من Ω والمتجهة $\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا وفقط إذا كان (T) عموديا على (ΩA) في A .

المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$$U : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \leq M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \geq m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n\in I) : m \leq u_n \leq M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k \geq 0$ بحيث $(\forall n\in I) : |U_n| \leq k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n \leq U_{n+1}$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n < U_{n+1}$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n \geq U_{n+1}$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n > U_{n+1}$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p < n \Rightarrow u_p \leq u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p < n \Rightarrow u_p \geq u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1} - u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n > 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n\in\mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$ ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد a وb وc في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{U_n = U_0 + nr}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_1 + (n-1)r$.

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو :

$U_n = U_2 + (n-2)r$.

3) بصفة عامة: إذا كان U_n وU_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

1) $u_1 + u_2 + \ldots . + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$.

2) $u_0 + u_1 + \ldots . + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

3) بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots . + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}\ .$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) **تعريف:**

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $\boxed{U_{n+1} = q.U_n}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

c) تكون الأعداد a وb وc في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac = b^2$.

2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_p وu_n حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

النهايات والإتصال

I) النهايات

1) الأشكال الغير محددة:

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty\times 0$	$+\infty-\infty$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$

$-\infty+a=-\infty$

$+\infty+\infty=+\infty \qquad (a\in\mathbb{R})$

$-\infty-\infty=-\infty$

$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$a\times\infty=\infty \quad (a\neq 0)$

$\infty\times\infty=\infty$

$0\times\infty$ ش غ محدد

$\frac{\infty}{a}=\infty \qquad \frac{a}{\infty}=0 \qquad \frac{a\neq 0}{0}=\infty$

$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$ ش غ محدد

$$(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est paire}\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire}\end{cases}$$

$\sqrt{+\infty}=+\infty$

3) خاصيات

a) إذا كانت للدالتين f و g نهاية منتهية في x_0 فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf تقبل نهاية منتهية في x_0

و $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x).\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x))=\alpha.\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

وإذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))\neq 0$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)})=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

b) نهاية دالة حدودية في ∞ هي نهاية الحد الأكبر درجة .

c) نهاية دالة جذرية في ∞ هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة

4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

a) $\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim\limits_{\infty}(f(x)+g(x))=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim\limits_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \quad (a\neq 0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) **ملاحظة**: $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases}x=\sqrt{x^2}\,;x\geq 0\\ x=-\sqrt{x^2}\,;x\leq 0\end{cases}$

5) نهايات اعتيادية.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$

6) النهايات والترتيب.

a) إذا كان $\begin{cases}|f(x)-l|\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=0 \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

b) إذا كان $\begin{cases}f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}f(x)=+\infty \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}g(x)=+\infty$

c) إذا كان $\begin{cases}f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=-\infty \text{ و}\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $\begin{cases}g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ بجوار } x_0\\ \lim\limits_{x_0}g(x)=\lim\limits_{x_0}h(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x_0}f(x)=l$

II) الإتصال

1) تعريف

لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0^+}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كانت $\lim\limits_{x_0^-}f(x)=f(x_0)$

*) تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على يمين و على يسار x_0 .

2) خاصيات

a) كل دالة حدودية متصلة على IR .

b) كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها .

c) *) الدوال $x\to\cos x$ $x\to\sin x$ متصلة على IR .

*) الدال $x\to\tan x$ متصلة على حيز تعريفها .

d) إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و αf متصلة على I .

وإذا كانت g لاتنعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ متصلة على I .

ملاحظة

إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مجموع وجداء دوال متصلة في غالب الأحيان.

3) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفةفي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim\limits_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا $\lim\limits_{x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا g بالاتصال في x_0 معرف بما يلي:

$$\begin{cases}g(x)=f(x) & ,x\neq x_0\\ g(x_0)=l\end{cases}$$

دراسة الدوال

I) الإشتقاق

1) تعاريف

a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0)=l$.

b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f'_d(x_0)=l$.

c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان :

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\in IR$ ونكتب $f'_g(x_0)=l$.

d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0

و على يسار x_0 و $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

e) *) (f متصلة في x_0) $\Leftarrow$ (f قابلة للإشتقاق في x_0)

*) (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) $\Leftarrow$ (f غير متصلة في x_0)

2) التأويل الهندسي :

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ويكون C_f على أحد الأشكال التالية :

b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ معامله الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_1): y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ويكون C_f على أحد الشكلين التاليين :

c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .

ملاحظة *) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 و على يسار x_0 و $f'_d(x_0)\neq f'_g(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين ويكون C_f على أحد الأشكال :

*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لاينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .

3) الدالة التآلفية المماسة لدالة .

a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0

b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة ل $f(a)$

$(f(a)\approx u(a))$

4) اشتقاق دالة على مجال- الدالة المشتقة

a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I

b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a,b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق علىI فإن الدالة $f': x\to f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة

d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .

e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الإعتيادية .

1) $(a)'=0$ 10) $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

2) $(x)'=1$ 11) $(\frac{1}{f})'=\frac{-f'}{f^2}$

3) $(ax)'=a$

12) $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$

4) $(x^n)'=nx^{n-1}$ 13) $(\sin x)'=\cos x$

5) $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$

14) $(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$

6) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 15) $(\cos x)'=-\sin x$

7) $(f+g)'=f'+g'$

16) $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$

8) $(fg)'=f'g+g'f$ 17) $(\tan x)'=1+\tan^2 x$

9) $(af)'=af'$ 18) $(f^n)'=nf'f^{n-1}$

19) $(\tan(ax+b))'=a(1+\tan^2(ax+b))$

ملاحظة a) **لتكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\ }$.**

لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل f تغير صيغتها في x_0 ام لا ؟

*) إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0

*) إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .

b) إذا كانت f' تنعدم في x_0 $(f'(x_0)=0)$ فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0,f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصيل .

5) تغيرات دالة

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\geq 0$

b) تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\geq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

c) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\leq 0$

d) تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f'(x)\leq 0$ والأعداد التي تنعدم فيها f' معدودة .

6) مطارف دالة .

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرافا نسبيا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم وتغير الإشارة في x_0

II) التمثيل المبياني لدالة

1) التقعر

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

a) يكون C_f محدبا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\ge 0$

b) يكون C_f مقعرا ( ) إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in I): f''(x)\le 0$

2) نقط انعطاف

a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0,f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذاكان C_f يغير التقعر في M (C_f يخترق (T)) :

b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0\in I$ تكون النقطة $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تنعدم وتغير الإشارة في x_0 .

ملاحظة إذا كانت f' تنعدم ولاتغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازيا لمحور الأفاصيل .

b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف او دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .

3) الفروع اللانهائية .

a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لانهائيا إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية :

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

b) تصنيف الفروع اللانهائية :

1) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\infty}$

فإن المستقيم $(\Delta): x=a$ مقارب ل C_f بجوار a .

2) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y=a$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

3) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

a) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞ .

b) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

c) إذا كان $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ne 0}$ نقوم بحساب $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

i) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=b}$

فإن المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب ل C_f بجوار ∞ .

ii) إذا كان $\boxed{\lim(f(x)-ax)=\infty}$

فإن C_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه $y=ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة يكون المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا لـ C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta): y=ax+b$ مقاربا لـ C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ مع $\lim_{x\to\infty} h(x)=0$.

4) محور تماثل- مركز تماثل

a) يكون المستقيم $(\Delta): x=a$ محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a-x\in D_f$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=f(x)$

b) تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

*) لكل x من D_f لدينا $2a-x\in D_f$

*) $(\forall x\in D_f): f(2a-x)=2b-f(x)$

III) الدوال الدورية

1) تعريف

a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x\in D_f): f(x+T)=f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f

b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f $(k\in\mathbb{Z})$

c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعا .

ملاحظة **a)** لكي نبين أن f دورية يجب أولا ملاحظة الدور ثم نتحقق منه

b) *) $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ *) $\cos(x+\pi)=-\cos x$

*) $\sin(x+k\pi)=\sin x$ *) $\sin(x+\pi)=-\sin x$

*) $\tan(x+k\pi)=\tan x$

2) ادوار بعض الدوال الإعتيادية .

a) $f(x)=\cos(ax+b)$ أو $f(x)=\sin(ax+b)$ $T=\frac{2\pi}{|a|}$

b) $f(x)=\cos^2(ax+b)$ أو $f(x)=\sin^2(ax+b)$ $T=\frac{\pi}{|a|}$

c) $f(x)=\tan(ax+b)$ $T=\frac{\pi}{|a|}$

d) لكي نحدد دور $f+g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .

3) رتابة دالة دورية .

لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة على $[a,b]$ فإن f رتيبة على $[a+T,b+T]$ ولها نفس الرتابة .

4) منحنى دالة دورية

a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $[0,T]\cap D_f$) ثم إزاحته بالإزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزئ نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزيحها بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بالأرتوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار .

b) إذا كانت f دالة دورية دورها T وزوجية(أو فردية) فيكفي إنشاء C_f على $\left[0,\frac{t}{2}\right]\cap D_f$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (او أصل المعلم) ثم الإزاحة .

الدوران

I) تعريف

الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α هو التطبيق الذي يترك Ω صامدة $(r(\Omega)=\Omega)$ ويربط كل نقطة $M\neq\Omega$ بالنقطة M' بحيث :

$$\begin{cases}\Omega M=\Omega M' \\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$$

II) خاصيات

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته α $r=r(\Omega,\alpha)$

1) *) $r(\Omega)=\Omega$

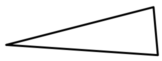
*) $(\forall M\in(P)):r(M)=M\Leftrightarrow M=\Omega$

هذا يعني أن النقطة M هي النقطة الوحيدة الصامدة بالدوران r .

2)

$$(\forall M\in(P)):r(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M=\Omega M' \\ (\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$$

3) $r(M)=M'$ تكافئ المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الساقين في Ω و $(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\alpha[2\pi]$



4) الدوران يحافظ على المسافة يعني

إذا كان $\begin{cases}r(A)=A' \\ r(B)=B'\end{cases}$ فإن $AB=A'B'$

5) إذا كان $\begin{cases}r(A)=A' \\ r(B)=B'\end{cases}$ فإن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}})\equiv\alpha[2\pi]$

6) الدوران يحافظ على قياس الزوايا الموجهة يعني

إذا كان $\begin{cases}r(A)=A' \;\; et \;\; r(B)=B' \\ r(C)=C' \;\; et \;\; r(C)=C'\end{cases}$

فإن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})\equiv(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}})[2\pi]$

7) a) الدوران يحافظ على المرجح يعني :

إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

b) الدوران يحافظ على المنتصف يعني :

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$

c) الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{C'D'}$

d) الدوران يحافظ على استقامية 3 نقط يعني :

إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية فإن صورها A' و B' و C' مستقيمية .

8) الدوران يحافظ على التعامد والتوازي يعني :

صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان

و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

9) ليكن $r=r(\Omega,\mp\frac{\pi}{2})$.

a) إذا كان $r(M)=M'$ فإن المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω .

b) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') عمودي عل (D) .

10) ليكن $r=r(\Omega,\mp\frac{\pi}{3})$.

إذا كان $r(M)=M'$ فإن المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الأضلاع

11) a) صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$.

b) صورة المستقيم (AB) بالدوران r $(A'B')$.

c) صورة النصف المستقيم $[AB)$ بالدوران r هي النصفالمستقيم $[A'B')$.

d) صورة الدائرة $C(\Omega,R)$ بالدوران r هي الدائرة $C'(\Omega',R)$ مع $\Omega'=r(\Omega)$.

12) a) نعتبر الدوران $r=r(\Omega,\alpha)$ الدوران $r=r(\Omega,-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران r ونرمز له بـــ r^{-1} .

b) إذا كان $r=r(\Omega,\alpha)$ فإن $r^{-1}=r(\Omega,-\alpha)$ ولدينا :

$r(M)=M'\Leftrightarrow r^{-1}(M')=M$

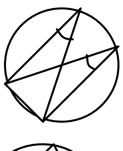
III) بعض الملاحظات وبعض التقنيات .

1) لكي نحدد قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. نحدد قياس الزاوية الهندسية $[B\hat{A}C]$ ليكن α هذا القياس .

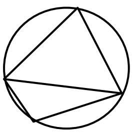
*) إذا كان التحرك من $\overrightarrow{AB}$ نحو $\overrightarrow{AC}$ يتم حسب المنحى الموجب فإن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\alpha[2\pi]$.

*) إذا كان التحرك حسب المنحى السالب فإن $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv-\alpha[2\pi]$

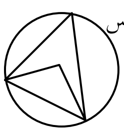
2) لتكن C دائرة مركزها O .



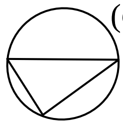
a) إذا كانت $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{A}=\hat{B}$



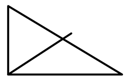
b) إذا كانت $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر وتوجدان من جهتين مختلفتين لهذا الأخير فإن $\hat{A}+\hat{B}=\pi$



c) إذا كانت زاوية محيطية $\hat{A}$ وزاوية مركزية $\hat{O}$ تحصران نفس الوتر وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{O}=2\hat{A}$.



3) إذا كن $[AB]$ قطر في دائرة (C) و M نقطة من (C) فإن المثلث (ABM) قائم الزاوية في M .



4) ليكن (ABC) مثلث قائم الزاوية في A وليكن I منتصف الوتر $[BC]$. لدينا $IA = IB = IC$ I هو مركز الدائرة المحيطة بـــ (ABC) و $[BC]$ قطر لها .

5) a) ليكن r دوران مركزه Ω . إذا كان $r(A) = A'$ فإن $\Omega A = \Omega A'$ وبالتالي Ω ينتمي الى واسط القطعة $[AA']$.

b) لكي نحدد مركز دوران r ، نبحث عن نقطتين A و B و صورتاهما . إذا كان $r(A) = A'$ و $r(B) = B'$ فإن مركز r هو تقاطع واسطي $[AA']$ و $[BB']$.

6) لكي نحدد زاوية دوران r ، نسميها α ونبحث عن نقطتين A و B و صورتاهما ونستعمل الخاصية (II5) أو نبحث عن المركز Ω ونقطة A وصورتها ونستعمل (II2)

7) لكي نبين أن : $AB = CD$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II4) .

8) لكي نحدد $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

9) لكي نبين أن $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) [2\pi]$ نبحث عن دوران يحول A و B و C و D إلى A' و B' و C' و D' أو العكس ونستعمل الخاصية (II6) .

10) لكي نبين أن $(AB) \perp (CD)$ نبحث عن دوران زاويته $\mp\frac{\pi}{2}$ يحول A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

11) لكي نبحث عن دوران يحول A إلى B نبحث عن مثلث متساوي الساقين (OAB) تكون قاعدته $[AB]$ ويكون هذا الدوران مركزه O وزاويته $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

12) a) إذا كان (ABC) متساوي الساقين وله زاوية هندسية قياسها $\frac{\pi}{3}$ فإنه متساوي الأضلاع .

b) ليكن $r = r(O, \mp\frac{\pi}{3})$ إذا كان $r(A) = A'$ فإن (OAA') متساوي الأضلاع .

c) لكي نبين أن (IJK) متساوي أضلاع نبحث عن دوران مركزه I ويحول J إلى K مثلا .

13) لكي نبين أن A و B و C مستقيمية نبين أنها صور لنقط مستقيمية أو صورها مستقيمية ونستعمل (II7d) أو نبين أن :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv o \ ou \ \pi [2\pi]$$

14) إذا كانت $M \in (E) \cap (F)$ فإن $r(M) \in r(E) \cap r(F)$

15) ليكن $r = r(\Omega, \alpha)$. إذا أردنا تحديد $r(M)$ نتحقق أولا من تعريف M :

a) إذا كانت M تكون مثلثا متساوي الساقين مع O ونقطة M' نستعمل (II2) ونبين أن $r(M) = M'$.

b) إذا كانت M منتصف قطعة أو مرجح نظمة نضع $r(M) = M'$ ونستعمل (II7a ou b)

c) إذا كانت $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ نضع $r(M) = M'$ ونستعمل (II.7c)

d) إذا كانت $M \in [AB]$ وتحقق شرطا ما نضع $r(M) = M'$ ونبين أن M' تحقق نفس الشرط مع نقطة N ونستنتج أن $r(M) = N$.

e) إذا كانت $M \in (E) \cap (F)$ نستعمل (III.14) .

15) إذا أردنا أن نبين أن J منتصف القطعة $[A'B']$ نبين أن $r(I) = J$ و I منتصف $[AB]$. ونستعمل (II.7b)

تحليليـــة الفضـــاء

I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

1) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ 3متجهات من V_3 و A و Bو C و D 4نقط بحيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$.

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و Bو C و D مستوائية .

نقول إن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و Bو C و D غيرمستوائية .

2) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية من V_3 .

*) كل متجهة من V_3 تكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

*) نقول إن المثلوث $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

*) إذا كانت $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ فإن المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ونكتب $\vec{u}:(x,y,z)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

3) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

a) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

لدينا $\vec{u}+\vec{v}:(x+x',y+y',z+z')$ و $\alpha\vec{u}:(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$.

من أجل دراسة استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وهي :

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}$$.

*) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين .

*) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غيرمستقيميتين .

c) نعتبر المتجهات $\vec{u}:(x,y,z)$ و $\vec{v}:(x',y',z')$ و $\vec{w}:(x'',y'',z'')$.

*) نسمي محددت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ العدد الذي نرمز له بالرمز $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ والمعرف بما يلي :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

*) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

ملاحظة

a) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

c) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت تكتب إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية و $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=\gamma=0$.

II) المعلـــــم في الفضـــــاء

1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث O نقطة من الفضاء و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ 3متجهات غير مستوائية يعني أساس .

2) ليكن $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما في الفضاء .

a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة $\overrightarrow{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. المثلوث (x,y,z) يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة المعلم R ونكتب $M(x,y,z)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ملاحظة $M(x,y,z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

b) نعتبر النقطتين $A(x,y,z)$ و $B(x',y',z')$

*) لدينا $\overrightarrow{AB}(x'-x,y'-y,z'-z)$

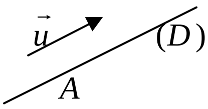
*) إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$$

III) المستقبـــــم فـــــي الفضـــــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة . المستقيم المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $D(A,\vec{u})$ والمعرفة ب



$$D(A,\vec{u})=\left\{M\in E\ /\ \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\right\}$$

ملاحظة $M\in D(A,\vec{u}) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

2) تمثيل باراميتري لمستقيم

تمثيل باراميتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ هو :

$$(D):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\quad(t\in IR)$$

3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم .

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

*) إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتا (D) هما :

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

*) إذا كان عدد واحد منعدم وعددين غير منعدمين .مثلا $a\neq0$ ، $b=0$ و $c\neq0$ فإن معادلتا (D) هما :

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{z-z_0}{c}\\ y-y_0=0\end{cases}$$

*) إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين .مثلا $a=0$ ، $b=0$ و $c\neq 0$ فإن معادلتا (D) هما :
$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$$

4) الأوضاع النسبية لمستقيمين .

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين .

نعتبر المستقيمين
$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \quad و \quad (\Delta'):\begin{cases} x=x_1+a't' \\ y=y_1+b't' \\ z=z_1+c't' \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0,y_0,z_0)$ وموجه ب $\vec{u}(a,b,c)$

و (Δ') مار من $B(x_1,y_1,z_1)$ وموجه ب $\vec{u}(a',b',c')$

من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نقو بدراسة استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$

a) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فإن $(\Delta)//(\Delta')$. ولمعرفة هل (Δ) و (Δ') منطبقان أم متوازيان قطعا . نتحقق هل $A\in(\Delta')$ ؟

*) إذا كان $A\in(\Delta')$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

*) إذا كان $A\notin(\Delta')$ فإن (Δ) و (Δ') متوازيان قطعا .

b) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فإن (Δ) و (Δ') متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظمة :
$$(S)\begin{cases} x_0+at=x_1+a't' \\ y_0+bt=y_1+b't' \\ z_0+ct=z_1+c't' \end{cases}$$
بحل النظمة المكونة من معادلتين والتحقق في الثالثة .

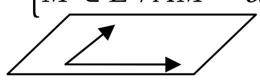
i) إذا كان للنظمة (S) حلا فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان وللحصول على إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

ii) إذا كانت النظمة (S) لا تقبل حلا فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

IV) المستــــــوى فــــي الفضـــــاء

1) تعريف

لتكن A نقطة و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين . المستوى المار من A والموجه بـ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المجموعة التي نرمز لها ب $P(A,\vec{u},\vec{v})$ والمعرفة ب
$$P(A,\vec{u},\vec{v})=\left\{M\in E \,/\, \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right\}$$



ملاحظة $M\in P(A,\vec{u},\vec{v}) \iff$ ($\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية)

2) تمثيل باراميتري لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ تمثيل باراميتري للمستوى (P) هو :
$$(P):\begin{cases} x=x_0+at+a't' \\ y=y_0+bt+b't' \quad (t,t'\in IR) \\ z=z_0+ct+c't' \end{cases}$$

3) معادلة ديكارتية لمستوى .

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0,y_0,z_0)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$.

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :

$$M(x,y,z)\in(P) \iff \det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$$
$$\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix}=0$$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+Cz+D=0$ حيث $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

4) تقاطع مستويين .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معدلتين ديكارتيتين

نعتبر المستويين :
$$(P):ax+by+cz+d=0$$
$$(Q):a'x+b'y+c'z+d'=0$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $(P)//(Q)$.

b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلتاه الديكارتيتان هما :
$$(D):\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

5) تقاطع مستوى ومستقيم .

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالنسبة للمستقيم .

نعتبر المستوى $(P):\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ والمستقيم
$$(\Delta):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظمة :
$$\begin{cases} x=x_0+at & (1) \\ y=y_0+bt & (2) \\ z=z_0+ct & (3) \\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 & (4) \end{cases}$$

ولهاذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد t .

a) إذا كان لهذه المعادلة حلا $t=t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3) .

b) إذا كان لهذه المعادلة مالانهاية له من الحلول $(0=0)$ فإن $(\Delta)\subset(P)$.

c) إذا كنت هذه المعادلة لاتقبل حلا" $(4=0)$ مثلا " فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعا .

ملاحظة

*) $D(A,\vec{u})//D'(B,\vec{v})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

*) $D(A,\vec{u})//P(B,\vec{v},\vec{w})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

*) $P(A,\vec{u},\vec{v})//P'(B,\vec{x},\vec{y})$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ و $\vec{y}$ مستوائية .