إعداد وإخراج الأستاذ: أ. لقوي

أسئلة شائعة في الحساب والاجابات عليها

متقن القل/ العام الدراسي: 15-2016

① القسمة في $\mathbb{Z}$

السؤال بأمثلة توضيحية	الاجابات
1) عيّن الأعداد n من $\mathbb{Z}$ حيث: 6 يقسم $n+3$	$n+3=6k$ وينتج: $\boxed{n=6k-3}; k\in\mathbb{Z}$
2) عيّن الأعداد n من $\mathbb{Z}$ حيث: $3n+7$ يقسم 10	نعين $D_{10}=\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$ مجموعة قواسم 10، ثم نحل في $\mathbb{Z}$ كل المعادلات من الشكل: $\boxed{3n+7=\lambda}$ و $\lambda\in D_{10}$ مثلا: لما: $3n+7=10$ نجد: $\boxed{n=1}$ .... و لما: $3n+7=-1$ نجد: $n\notin\mathbb{Z}$ ... ونواصل
3) عيّن الأعداد n من $\mathbb{Z}$ حيث: $3n+7$ يقسم $n+5$	لدينا: $3n+7 \mid n+5$ ومنه: $3n+7 \mid 3n+3\times5$ ينتج: $3n+7 \mid 3n+15-(3n+7)$ ومنه: $\boxed{3n+7 \mid 8}$ ، نعين D_8 مجموعة قواسم 8 ونكمل الحل كما في السؤال (2)
4) عيّن الأعداد n من $\mathbb{Z}$ حيث: $3n+7$ يقسم $5n+4$ وبصفة عامة: f و g دالتان للمتغير الصحيح n. عيّن الأعداد n حيث: $f(n)$ يقسم $g(n)$	لدينا $3n+7 \mid 5n+4$ ومنه: $3n+7 \mid 15n+12$ ينتج $3n+7 \mid 5(3n+7)-35+12$ ومنه: $\boxed{3n+7 \mid (-23)}$ نعين D_{23} مجموعة قواسم 23 ونكمل الحل كما في السؤال (2). ترجع السؤال إلى $h(n)$ يقسم عددا معلوما m ونكمل الحل كما في السؤال (2)
5) n عدد طبيعي، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي. عيّن القيم الممكنة لـ n.	$n=7k+r=3q+r$ و $\boxed{0\le r<3}$ وينتج: $n-r=7k=3q$ وهذه تمثل مضاعفات العدد 21 لأن: $ppcm(3;7)=21$ إذن: $\boxed{n=21m+r}$ ، $m\in\mathbb{N}$ أي: $\boxed{n\in\{21m;\ 21m+1;\ 21m+2\}}$
6) برهن أن مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $pgcd(a;b)$ نفرض: $pgcd(a;b)=d$	1) من أجل كل قاسم x لـ d فإن x يقسم a و x يقسم b. 2) من أجل كل قاسم x لـ a و b لدينا: $b=x\beta;\ a=x\alpha$ إذا كان: $pgcd(\alpha;\beta)=1$ فإن: $pgcd(a;b)=x=d$ ومنه x يقسم d. إذا كان: $pgcd(\alpha;\beta)=y\neq1$ فإن: $\beta=y\beta';\ \alpha=y\alpha'$ و $pgcd(\alpha';\beta')=1$ ومنه: $b=xy\beta';\ a=xy\alpha'$ وينتج $pgcd(a;b)=xy=d$ ومنه: x يقسم d. $b=xy\beta';\ a=xy\alpha'$

② القاسم المشترك الأكبر

السؤال بأمثلة توضيحية	الإجابات
1) عيّن: $pgcd(2030;2002)$	هو أخر باقي غير معدوم في خوارزمية إقليدس لقسمة 2030 على 2002 وينتج: 14.
2) عيّن: $pgcd(882;828;171)$	نعين: $pgcd(882;828)=18$ ، ثم $pgcd(18;171)=9$
3) عين القواسم الطبيعية المشتركة لـ: 18 و 171	لدينا: $pgcd(18;171)=9$ مجموعة القواسم هي $D_9=\{1;3;9\}$
4) عيّن: $pgcd(189;-171)$	$pgcd(189;-171)=pgcd(189;171)=9$
5) تعطى x و y بدلالة العدد الطبيعي n: ماهي القيم الممكنة لـ $pgcd(x;y)$ في كل مما يلي أ) $x=3n+7$ و $y=5n+4$ ب) $x=6n+5$ و $y=4n+1$ نفرض: $d=pgcd(x;y)$	أ) لدينا: 3 و 5 أوليين فيما بينهما. و d يقسم $5x-3y$ ونجد: d يقسم 23. ومنه: $\boxed{d\in D_{23}=\{1;23\}}$ ب) 6 و 4 غير أوليين فيما بينهما: نحسب $ppcm(6;4)=12$ وينتج: $12=6\times2$ و $12=4\times3$ وينتج: d يقسم $2x-3y$ ومنه: d يقسم 7، وأخيرا: $\boxed{d\in D_{8}=\{1;7\}}$
6) تعطى x و y بدلالة العدد الطبيعي n: $x=3n+7$ و $y=5n+4$ عين القيم الممكنة لـ n حتى يكون: $pgcd(x;y)=23$	نبحث عن n بدلالة d بحل الجملة $\begin{cases}3n+7=23k\\5n+4=23t\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}9n+21=23(3k)\\10n+8=23(2t)\end{cases}$ بالطرح نجد: $n-13=23k'$ أي: $\boxed{n=23k'+13}$

③ القاسم المشترك الأكبر (تابع)

السؤال بأمثلة توضيحية — الإجابات

7) عين الثنائيات $(x;\ y)$ الطبيعية بحيث: $(x-1)y = 6$

الإجابة: نعين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 6. $D_6 = \{1;2;3;6\}$ ثم نحل في $\mathbb{N}^2$ كل الجمل من الشكل: $\begin{cases} x-1=d \\ y=d' \end{cases}$ ، $d \times d' = 6$

مثلا: $\begin{cases} x-1=2 \\ y=3 \end{cases}$ ومنه: $\boxed{(x=3;y=3)}$ ... ونواصل

8) عين الثنائيات $(x;\ y)$ الطبيعية بحيث: $4x^2 - y^2 = 12$

لاحظ: $4x^2 - y^2 = (2x-y)(2x+y)$

الإجابة: نعين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 12. $D_{12} = \{1;2;3;4;6;12\}$

نحل في $\mathbb{N}^2$ كل الجمل من الشكل: $\begin{cases} 2x+y=d \\ 2x-y=d' \end{cases}$ ، حيث: $d \times d' = 12$ و $d \geq d'$ مثلا: $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

ومنه: $\boxed{(x=2;y=2)}$ ... ونواصل

10) عين كل الثنائيات $(x;\ y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث: $\begin{cases} x+y=45 \\ pgcd(x;y)=d=9 \end{cases}$

لاحظ: إذا كان $(a;\ b)$ حلا فإنّ $(b;\ a)$ حل.

الإجابة: $\begin{cases} x+y=45 \\ pgcd(x;y)=9 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 9x'+9y'=45 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $x'+y'=5$ ينتج: $(x';y') \in \{(1;4);(2;3)\}$

$(x;y) = 9(x';y') \in \boxed{\{(9;36);(18;27)\}}$

9) أ) عين: $pgcd(198,171)$

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس، جد عددين صحيحين α و β يحققان: $198\alpha + 171\beta = 9$

نجد: $(\alpha;\beta) = (-6;7)$ كما في الحل المقابل

الإجابة:

أ)

$198 = 1 \times 171 + 27 \ldots (1)$

$171 = 6 \times 27 + \boxed{9} \ldots (2)$

$27 = 3 \times 9 + 0$

$\boxed{pgcd(198,171) = 9}$

ب) نعبّر في كل معادلة على الباقي، فنجد:

$27 = 198 - 1 \times 171$

ومنه: $9 = 171 - 6 \times \boxed{27}$

$9 = 171 - 6(198 - 1 \times 171)$

$9 = \boxed{-6} \times 198 + \boxed{7} \times 171$

11) عين كل الثنائيات $(x;\ y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث: $\begin{cases} x \times y = 540 \\ pgcd(x;y)=6 \end{cases}$

لاحظ: إذا كان $(a;\ b)$ حلا فإنّ $(b;\ a)$ حل.

الإجابة: $\begin{cases} x \times y = 540 \\ pgcd(x;y)=6 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 6x' \times 6y' = 540 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $x'y' = 15$ ينتج: $(x';y') \in \{(1;15);(3;5)\}$

$(x;y) = 6(x';y') \in \boxed{\{(6;90);(18;30)\}}$

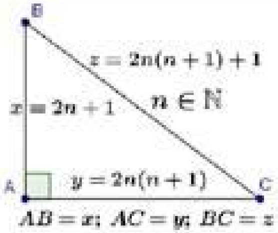
12) عين كل الثنائيات $(x;\ y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 539 \\ pgcd(x;y)=7 \end{cases}$

الإجابة: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 539 \\ pgcd(x;y)=7 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 49(x'^2 - y'^2) = 539 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $(x'-y')(x'+y') = 11$ ونكمل الحل كما في المثال (8)، بتعيين D_{11} مع مراعاة x' و y' أوليين فيما بينهما.

الثلاثية الفيثاغورثية 1: بشرط $z = y + 1$

هي الثلاثية $(x;y;z)$ من الأعداد الطبيعية التي تمثل حلول المعادلة: $x^2 + y^2 = z^2$

حيث: $\left\langle \boxed{x = 2n+1};\ \boxed{y = 2n(n+1)} \quad \boxed{z = 2n(n+1)+1} \right\rangle$ و $n \in \mathbb{N}$



جدول (1) لبعض القيم:

الثلاثية الفيثاغورثية

z	y	x	n
5	4	3	1
13	12	5	2
25	24	7	3
41	40	9	4
61	60	11	5
85	84	13	6
113	112	15	7

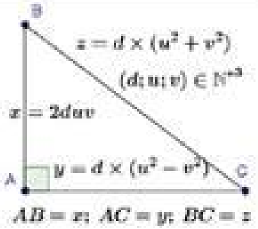
لاحظ: هذا الجدول ينتج من الجدول (2) الموجود إلى اليسار عندما $d = 1$

الثلاثية الفيثاغورثية 2:

هي الثلاثية $(x;y;z)$ من الأعداد الطبيعية التي تمثل حلول المعادلة: $x^2 + y^2 = z^2$

حيث: $\left\langle \boxed{x = 2duv};\ \boxed{y = d \times (u^2 - v^2)} \quad \boxed{z = d \times (u^2 + v^2)} \right\rangle$

و $u > v;\quad (d;u;v) \in \mathbb{N}^{*3}$



جدول (2) لبعض القيم:

2	v0=	1	d0=	2
	1	=c	الثلاثية الفيثاغورثية	

z	y	x	u	v	d
10	6	8	2	1	2
26	10	24	3	2	2
50	14	48	4	3	2
82	18	80	5	4	2
122	22	120	6	5	2
170	26	168	7	6	2

حالة خاصة: الجدول (1) الموجود إلى اليمين ينتج من هذا الجدول عندما $d = 1$

السؤال بأمثلة توضيحية	الإجابات	السؤال بأمثلة توضيحية	الإجابات
(13 عين كل الثنائيات الطبيعية غير المعدومة $(x; y)$. بحيث: $\begin{cases} x^2+y^2=225 \\ pgcd(x;y)=3 \end{cases}$ لاحظ: إذا كان $(x; y)$ حلا فإنّ $(y; x)$ حل.	$\begin{cases} x^2+y^2=225 \\ pgcd(x;y)=3 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 9(x'^2+y'^2)=225 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2+y'^2=25 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2=25-y'^2 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ $x'^2=(5-y')(5+y')$ واضح أن: $0<y'<5$ بالتجريب ينتج: لما: $y'=1$ نجد: $x'^2=24$ مرفوض (ليس مربعا تاما) لما: $y'=2$ نجد: $x'^2=21$ مرفوض (ليس مربعا تاما) لما: $y'=3$ نجد: $x'^2=16$ ومنه: $x'=4$ ومنه: $(x;y)=3(x';y')\in\boxed{\{(12;9);(9;12)\}}$	(14 عين كل الثنائيات الطبيعية غير المعدومة $(x; y)$. بحيث: $\begin{cases} x^2+y^2=676 \\ pgcd(x;y)=2 \end{cases}$ لاحظ: إذا كان $(x; y)$ حلا فإنّ $(y; x)$ حل.	$\begin{cases} x^2+y^2=676 \\ pgcd(x;y)=2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 4(x'^2+y'^2)=676 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2+y'^2=169 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2=169-y'^2 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ $x'^2=(13-y')(13+y')$ واضح أن: $0<y'<13$ بالتجريب ينتج: لما: $y'=1$ نجد: $x'^2=168$ مرفوض (ليس مربعا تاما) ... ونواصل ... لما: $y'=5$ نجد: $x'=12$ ومنه: $(x;y)=2(x';y')\in\boxed{\{24;10);(10;24)\}}$
(15 عين كل الثنائيات الطبيعية غير المعدومة $(x; y)$. بحيث: $\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ pgcd(x;y)=5 \end{cases}$ لاحظ: إذا كان $(x; y)$ حلا فإنّ $(y; x)$ حل.	$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ pgcd(x;y)=5 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 25(x'^2+y'^2)=625 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2+y'^2=25 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x'^2=25-y'^2 \\ pgcd(x';y')=1 \end{cases}$ $x'^2=(5-y')(5+y')$ واضح أن: $0<y'<5$ بالتجريب ينتج: لما: $y'=1$ نجد: $x'^2=24$ مرفوض (ليس مربعا تاما) لما: $y'=2$ نجد: $x'^2=21$ مرفوض (ليس مربعا تاما) لما: $y'=3$ نجد: $x'^2=16$ ومنه: $x'=4$ ومنه: $(x;y)=5(x';y')\in\boxed{\{(20;15);(15;20)\}}$	(16 عين كل الثنائيات الطبيعية غير المعدومة $(x; y)$. بحيث: $\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ 3x+3=y \end{cases}$ لاحظ: $y>x$	$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ 3x+3=y \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=25^2 \\ 3(x+1)=y \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x^2+y^2=25^2 \\ y\equiv 0[3];\ 1<y<25 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x^2=25^2-y^2 \\ y\in\{3;6;9;12;15;18;21;24\} \end{cases}$ بالتجريب ينتج: لما: $y=24$ نجد: $x^2=49$ ومنه: $x=7$ $\boxed{(x;y)=(7;24)}$