إعداد: عبد المطلب

الدالة اللّوغاريتمية [II]

Fonction logarithme

بوزريعة: ذوالحجة 1431 هـ

تمرين1

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-3\,;1[$ بـ:

$$f(x)=a\ln(3+x)+b\ln(1-x)-2$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يقبل منحنى الدالة f عند النقطة $(0\,;-2+3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-3\,;1[$ بـ:

$$f(x)=3\ln(3+x)+\ln(1-x)-2$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

– هل المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف؟ برّر إجابتك.

2- (T) هو المماس لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

اكتب معادلة للمستقيم (T) إذا كان معامل توجيهه يساوي 1.

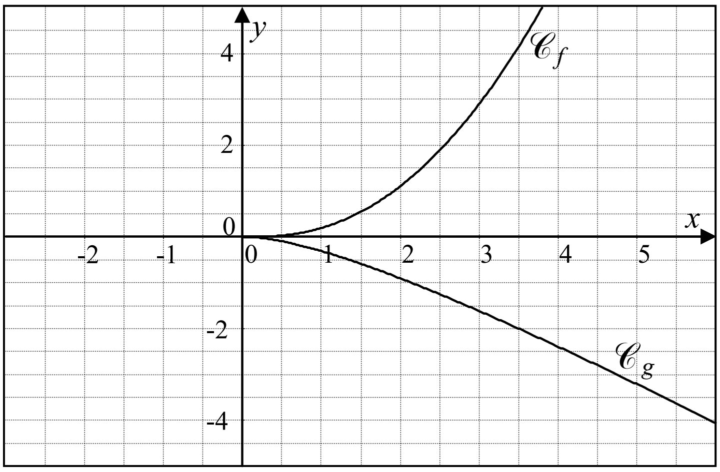
3- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطتين فاصلتيهما α و β حيث: $-2<\alpha<-1$ و $0{,}5<\beta<1$.

– ارسم المستقيم (T) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 2cm)

4- ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m $(m>0)$ عدد جذور المعادلة: $f(x)=2\ln(3+x)-2+\ln m$

تمرين2

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ بياني الدالتين f و g على $]0\,;+\infty[$.



1- ضع تخمينا بالنسبة لـ: أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) اتجاه تغير كل من f و g على $]0\,;+\infty[$.

ج) إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

2- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2} \quad \text{و} \quad g(x)=\ln(x+1)-x$$

أ) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير كل من f و g على $]0\,;+\infty[$.

ج) استنتج إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

هل تخمينك السابق كان صحيحا؟

3- أ) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب فإن: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(x+1)\le x$

ب) استنتج القيمة التقريبية إلى 10^{-3} بالزيادة للعدد $\ln(1{,}1)$.

تمرين3

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2+2-2\ln x$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها، ثم بين أنه من أجل كل $x>0$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y=\frac{x}{2}$.

ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$)

2- برهن أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها α حيث: $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

3- برهن أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيينها.

4- اكتب معادلة المماس (T) لـ $(\mathscr{C})$ والذي يوازي (Δ).

– هل المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا يشمل المبدأ؟ علل.

– ارسم (Δ)، (T) و $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 2cm)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $mx-\ln x=0$.

6- h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln|x|}{x}$

أثبت أن h فردية ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C}')$ في المعلم السابق.

تمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1+\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=1$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

4- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

5- تحقق أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$. ادرس إشارة $f(x)$.

6- احسب $f(2)$ و $f(4)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$. (الوحدة 2cm)

7- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(e^x)$.

احسب $h'(x)$ وذلك دون كتابة عبارة $h(x)$.

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل 3 مستقيمات مقاربة أحدهم (Δ) معادلته $y=x+1$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (Δ).

4- أثبت أن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C})$.

5- ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 1cm)

6- برهن على وجود مماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ معامل توجيه كل منهما يساوي $\frac{2}{3}$ ثم اكتب معادلتي هذين المماسين.

تمرين 6

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=4(\ln x-1)+x$$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}7<\alpha<1{,}8$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(\frac{x-4}{x}\right)\ln x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0\,;+\infty[$.

2- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. شكل جدول تغيرات f.

3- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\ln x$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$ ؟

- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$.

4- بين أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-4)^2}{4\alpha}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$. $\|\vec{j}\|=2\|\vec{i}\|=2\text{cm}$

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4\,;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-2\ln(1-2x) & -4\le x\le 0 \\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) & x>0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. يمكن وضع $X=-2x$

- أثبت أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}$.

- ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة f عند الصفر؟ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2- بين أن $f(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})$ لما $x>0$.

- استنتج أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $+\infty$.

3- ادرس تغيرات الدالة f على $[-4\,;+\infty[$.

- بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما معدوم والآخر α يطلب حصره بـ $\frac{-n-1}{2}$ و $\frac{-n}{2}$. n عدد طبيعي.

- ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 2cm)

4- نعتبر الدالة g_m المعرفة على $[-4\,;0]$ بـ:

$g_m(x)=1+mf(x)$ (m وسيط حقيقي غير معدوم)

بين أن جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة g_m تشمل نقطتين ثابتتين $(0\,;1)$ و $(\alpha\,;1)$.

عبد المطلب