إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ربيع الأول 1432 هـ

المتتاليات العددية

Suites numériques

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

تمرين 1

عين الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 و u_2 لمتتالية حسابية والمعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

-4 ، 1 ، 6	6 ، 1 ، -4

تمرين 2

لتكن a ، b و c حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما بحيث تحقق:
$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 62 \end{cases}$$
عين الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود a ، b و c.

7 ، 2 ، -3	5

تمرين 3

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 3$ وبمجموع حدودها الأربعة الأولى: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -18$.

1- عين أساس هذه المتتالية وحدها العاشر.

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3- احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_{10}$

-195	$8 - 5n$	-42	-5

تمرين 4

(u_n) متتالية حسابية حيث: $u_3 = 2$ و $u_5 = 8$.

1- عين الأساس r لهذه المتتالية وحدها الأول u_1.

2- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 95$.

10	$\frac{n(3n-11)}{2}$	-4	3

تمرين 5

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ حيث:
$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$$

1- احسب الحد u_5 علما أنه موجب ثم احسب u_0 .

2- احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $8S_n \geq 945$.

$3 \leq n \leq 12$	$\frac{(n+1)(-5n+80)}{2}$	40	15

تمرين 6

عين الحدود الثلاثة الأولى v_1 ، v_2 ، v_3 لمتتالية هندسية حدودها موجبة والمعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} v_1 \times v_2 \times v_3 = 1 \\ v_1 + v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases}$$

0,5 ، 1 ، 2

تمرين 7

(v_n) متتالية هندسية حيث:
$$\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$$
أثبت أن $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ثم احسب v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 و v_5.

-1 ، 2 ، -4 ، 8 ، -16	-16 ، 8 ، -4 ، 2 ، -1

تمرين 8

عين الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 و v_5 لمتتالية هندسية متناقصة تماما حيث:
$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 140 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 35 \end{cases}$$

5 ، 10 ، 20 ، 40 ، 80

تمرين 9

(v_n) متتالية هندسية حيث: $v_3 = 3$ و $v_6 = \frac{81}{8}$.

1- عين الأساس q لهذه المتتالية وحدها الأول v_1.

2- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3- احسب المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

$\frac{8}{3}[(\frac{3}{2})^n - 1]$	$\frac{4}{3}(\frac{3}{2})^{n-1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

تمرين 10

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}$: $u_n = \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1}$

1- بين أن (u_n) متتالية حسابية. احسب أساسها r و u_0.

2- نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

بين أن: $S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)}$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{u_n}$

بين أن (v_n) متتالية هندسية. احسب أساسها q و v_0.

4- نضع: $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_{n-1}$. بين أن: $P_n = e^{S_n}$

$v_0 = e^{\alpha - 1}$	$q = e^{\frac{1}{\alpha+1}}$	$u_0 = \alpha - 1$	$r = \frac{1}{\alpha+1}$

البرهان بالتراجع، تغيرات متتالية وتقاربها

تمرين 11
(u_n) متتالية عديـــة معرفة بحدها الأول $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+20}$
1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 0$ فإن $4\leq u_n<5$.
2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 12
(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{2}$
1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n<3$.
2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.
4- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n=3-2^{-n+2}$.

تمرين 13
(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجـل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-2}{2u_n-1}$
1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n>1$.
2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.
4- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n=\dfrac{2n+2}{2n+1}$.

تمرين 14
(u_n) متتالية معرفة بــ: $u_1=\dfrac{5}{8}$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n{}^2+1}{2}$
1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ فإن $0<u_n<1$.
2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 15
(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجـل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$
1- احسب u_1، u_2، u_3 ثم أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.
2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.
3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

تمرين 16 *Bac S France 2004*
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بــ: $u_0=1$ ومن أجـل كـل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=u_n+2n+3$
1- ادرس رتابة المتتالية (u_n).
2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>n^2$.
- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
3- أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n، ثم برهن تخمينك.

تمرين 17 *Bac S La Réunion 2007*
a عدد حقيقي حيث $-1<a\leq 0$. نعتبر المتتالية u المعرفة بـــ $u_0=a$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=u_n^2+u_n$.
1- ادرس اتجاه تغير المتتالية u.
2- أ) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $h(x)=x^2+x$.
ادرس اتجاه تغير الدالة h. استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;0[$، $h(x)$ ينتمي كذلك إلى المجال $]-1;0[$.
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_n<0$.
3- ادرس تقارب المتتالية u. احسب نهايتها.

تمرين 18
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بــ: $u_n=\ln(n+1)-\ln n$
1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ فإن $0<u_n\leq\ln 2$.
2- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما. يمكن دراســة اتجــاه تغير الدالة $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ على $[1;+\infty[$.
3- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين 19
من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ نعتبر: $u_n=n^2-2n+5$ ، $v_n=ne^{-2n+1}$ ، $w_n=n-\ln(n+2)$ و $x_n=\dfrac{n\cos n}{2n^2+1}$
1- ادرس اتجاه تغير كل من (u_n)، (v_n) و (w_n).
2- بين أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 أي $v_n>0$.
3- ادرس تقارب كل من (u_n)، (v_n)، (w_n) و (x_n).

تمرين 20
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بــ: $\begin{cases} u_0=1\ ,\ u_1=3 \\ 3u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n \end{cases}$
1- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
2- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $u_n=4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

تمرين21

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ارسم البيان $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

- مثل على المحور $(O; \vec{i})$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3؛ مبرزا خطوط الرسم ثم خمّن تغيرات المتتالية (u_n) ونهايتها.

2- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n - 2$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- ادرس تغيرات (u_n) ثم حسب نهايتها لما $n \to +\infty$.

$l = 2$	$2+2^{-n+1}$	2^{-n+1}	$q = \frac{1}{2}$

تمرين22

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n \neq 2$.

2- f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{x}$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ادرس تغيرات f ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$. (وحدة الطول 2cm).

- مثل على المحور $(O; \vec{i})$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 دون حساب، مبرزا خطوط الرسم ثم خمّن نهاية المتتالية (u_n).

3- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- احسب نهاية u_n لما $n \to +\infty$.

$l = 2$	$\frac{2(-2)^{n+1}+1}{(-2)^{n+1}-1}$	$(-2)^{n+1}$	$q = -2$

تمرين23

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 19$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - 1$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = n(u_n - 1) - 2$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- ادرس تغيرات المتتالية (v_n).

4- احسب المجموع: $S_n = \sum_{p=1}^{n} v_p = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$2^{n+4} - 16$	$\frac{2^{n+3} + n + 2}{n}$	2^{n+3}	$q = 2$

تمرين24

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$. $0 < \alpha < 1$

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n + \frac{2}{\alpha - 1}$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n > 0$.

2- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

3- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

4- احسب نهاية u_n لما $n \to +\infty$.

5- احسب المجموعين: $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} v_p$ و $S'_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

$S'_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha^n - 1)}{(\alpha-1)^2} - \frac{2n}{\alpha - 1}$	$l = \frac{2}{1-\alpha}$	$q = \alpha$

تمرين25

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \;,\; u_1 = 3 \\ 3u_{n+1} - 4u_n = -u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

2- احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

3- أثبت أن: $S_n = u_n - u_0$. استنتج عبارة u_n بدلالة n.

$4-3^{-n+1}$	$3-3^{-n+1}$

تمرين26

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

1- برهن أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما.

2- عين العددين α و β بحيث: $u_n = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{\beta}{2n-1}$

3- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

- احسب نهاية S_n لما $n \to +\infty$.

$l = \frac{1}{2}$	$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$	$u_n = \frac{-1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)}$

تمرين27

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 3\alpha + 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $2u_{n+1} = u_n + 4\alpha$.

1- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة.

في باقي التمرين نفرض أن (u_n) غير ثابتة ونضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 2\beta$.

2- أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q وحدها الأول v_0.

3- اكتب عبارة u_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4- ادرس تغيرات المتتالية (v_n). ناقش حسب قيم α.

5- احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$2(1-\alpha)(1-2^{-n-1})+4\alpha(n+1)$	$(1-\alpha)2^{-n}+4\alpha$	$\beta=2\alpha$	1

تمرين28 *Bac S Inde 2004*

1- (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

أ) احسب الحدود u_1، u_2 و u_3. عبر عن كل حد على شكل كسر غير قابل للاختزال.

ب) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية u والحدود الأربعة الأولى للمتتالية w المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = w_n$.

2- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

أ) برهن أن $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

- احسب نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

$$\boxed{S_n = -\ln(n+1)}$$

تمرين29

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة، معرفة بحدها الأول $u_1 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n > 1$: $(u_n)^2 e = u_{n-1}$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \dfrac{1 + \ln u_n}{2}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q و v_1.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- احسب المجموع: $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} v_p$ والجداء: $P_n = \prod\limits_{p=1}^{n} u_p$

- احسب نهاية S_n ونهاية P_n لما $n \to +\infty$.

$e^{8-2^{-n+3}-n}$	$4-2^{-n+2}$	$e^{2^{-n+3}-1}$	2^{-n+2}	2	$\frac{1}{2}$

المتتاليتان المتجاورتان

تمرين30

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

1- بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2- احسب النهاية المشتركة لهما.

تمرين31

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \frac{1}{2\times1} + \frac{1}{4\times3} + \frac{1}{6\times5} + \dots + \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$$

1- بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2- احسب u_4 و v_4. استنتج أن نهايتيهما $0,63 < l < 0,74$.

تمرين32 *Examen USTHB (Fev 2009)*

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1- احسب u_1، v_1، u_2 و v_2.

2- لتكن المتتالية (w_n) معرفة، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $w_n = v_n - u_n$

أ) برهن أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.

ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (w_n).

3- أ) ادرس تغيرات المتتاليتين (u_n) و (v_n).

ب) بين أن هاتين المتتاليتين متجاورتين. ماذا تستنتج؟

4- لتكن (t_n) متتالية معرفة بـ: $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$، $n \in \mathbb{N}$.

بين أن (t_n) ثابتة. استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n).

$l = \frac{11}{3}$	$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

عبد المطلب