إعداد: عبد المطلب
تقني رياضي

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

تمرين1

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن مجموعهما يساوي 99 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 11.

(11،88)	(22،77)	(44،55)	(88،11)	(77،22)	(55،44)

تمرين2

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن جداءهما يساوي 2700 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 6.

(6،450)	(18،150)	(450،6)	(150،18)

تمرين3

1- حلل العدد الطبيعي 975 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين عددين طبيعيين a و b أوليان فيما بينهما حيث:

$$a>b \quad \text{و} \quad a\times b=975$$

$3\times5\times5\times13$	(1،975)؛(3،325)؛(13،75)؛(25،39)

تمرين4

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 13 وأكبر هذين العددين يساوي 117.

(13،117)	(26،117)	(52،117)	(65،117)	(91،117)	(104،117)
(117،13)	(117،26)	(117،52)	(117،65)	(117،91)	(117،104)

تمرين5

1- حلل العدد الطبيعي 1432 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} x^2-y^2=5728 \\ PGCD(x,y)=2 \end{cases}$$

$179\times2\times2\times2$	(354،362) ؛ (714،718)

تمرين6

α و β عددان طبيعيان.

1- عين مجموعة الأزواج $(\alpha\,,\beta)$ بحيث $\alpha\times\beta=51$.

2- استنتج مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

أ) $x^2-y^2=51$

ب) $x.y+2x-51=0$

ج) $x.y-3x+3y=60$

(1،51) ؛ (3،17) ؛ (17،3) ؛ (51،1)	(7،10) ؛ (25،26)		
(1،49) ؛ (3،15) ؛ (17،1)	(4،48) ؛ (20،0) ؛ (6،14)		

تمرين7

عين كل الثنائيات $(x\,,y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق:

1) $(x-1)(2y-3)=11$

2) $4x^2-y^2=36$

3) $x^2y+xy^2+2=0$

4) $x^2+5y^2=45$

(10،1-) ؛ (4،0-) ؛ (12،2-) ؛ (7،2-)	(0،3-) ؛ (3،0-) ؛ (8،5-) ؛ (8،5-) ؛ (5،8-) ؛ (8،5-) ؛ (5،8-)
(2،1-) ؛ (1،2-) ؛ (1،1-)	(3،5-) ؛ (2،5-) ؛ (5،2-) ؛ (2،5-) ؛ (5،2-) ؛ (2،5-) ؛ (3،0-)

تمرين8

1- حلل العدد 608 إلى جداء عوامل أولية.

2- α و β عددان طبيعيان.

نضع: $a=\alpha+2\beta$ و $b=2\alpha+3\beta$

بين أن $PGCD\,(a\,,b)=PGCD\,(\alpha\,,\beta)$

3- عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} (x+2y)(2x+3y)=9728 \\ PGCD(x,y)=4 \end{cases}$$

$19\times2\times2\times2\times2\times2$	(24،28)

تمرين9

n ، a و b أعددا طبيعية. عين قيم العدد n بحيث a يقسم b في كل حالة من الحالات التالية:

1) $a=n+1$ و $b=n+5$ حيث $n\geq0$.

2) $a=n-1$ و $b=2n+3$ حيث $n>1$.

3) $a=n-2$ و $b=n^2+3n+4$ حيث $n>2$.

0 ، 1 ، 3	2 ، 6	3 ، 4 ، 9 ، 16

تمرين10

n عدد طبيعي غير معدوم. ليكن: $a=3n-2$ و $b=n+5$

1- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

2- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون الكسر $\frac{a}{b}$ قابلا للاختزال (العددان a و b غير أوليان فيما بينهما).

3- عين قيم n حتى يكون الكسر $\frac{a}{b}$ عددا طبيعيا.

4- أثبت أن العددين: $a+6$ و $2b-7$ أوليان فيما بينهما.

1 ، 17	17k+12	12

تمرين11

نعتبر العددين: $a=3n-1$ و $b=5n-4$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

1- ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ a و b. عين قيم d.

2- بين أنه إذا كان $d=7$، فإن العدد 7 يقسم العدد $n+2$.

3- عين قيمتي a و b حتى يكون $d=7$.

$b=35k-14$; $a=21k-7$	1 ، 7

تمرين12

n عدد صحيح. نضع: $a=n-2$ و $b=2n^2-7n+17$.

1- عين قيم العدد n بحيث b يقبل القسمة على a.

2- ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+17}{x-2}$$

عين نقط المنحنى $(\mathscr{C})$ التي إحداثياها أعدادا صحيحة.

(3،14) ؛ (13،24) ؛ (1،-12) ؛ (-9،-22)

تمرين13

n عدد طبيعي. نضع: $a=n+3$ و $b=2n^2+7n+4$.

1- بين أن العدد a يقسم العدد $2n^2+7n+3$.

2- استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3- عين قيم العدد n بحيث a يقسم العدد $b+7$.

1 ، 5

تمرين14

n عدد طبيعي.

1- بين أن العددين: $a=n^2+5n+6$ و $b=n^2+6n+8$ يقبلان القسمة على $n+2$.

2- بين أن $n+2$ هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b.

3- عين قيم العدد n بحيث العدد $c=2n^2+5n+11$ يقبل القسمة على $n+2$.

4- استنتج أن العدد c غير قابل للقسمة على a و b.

1 ، 7

تمرين15 بكالوريا 2008 تقني رياضي

n عدد طبيعي أكبر من5.

1- a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$.

أ) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

2- نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$

أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب) عيّن تبعا لقيم n وبدلالة $PGCD(p;q)$.

d=n-5 أو d=7(n-5)	7k-5	1 ، 7

تمرين16

1- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 8044 و 4022.

2- عين أصغر عدد طبيعي x ، متكون من أربعة أرقام بحيث: باقي قسمة العدد 4024 على x هو 2 ، و باقي قسمة العدد 8048 على x هو 4.

2011

تمرين17

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتاليين أوليان فيما بينهما.

2- بين أنه إذا كان a و b عددين أوليين فيما بينهما، فإن $a+b$ و $a\times b$ كذلك أوليان فيما بينهما.

3- استنتج أن الكسر $\frac{2n+1}{n^2+n}$ غير قابل للاختزال. $(n\in\mathbb{N})$

4- عين قيمة العدد n حتى يكون $\frac{2n+1}{n^2+n}=\frac{15}{56}$.

7

تمرين18 بكالوريا

n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العددين $N=9n+1$ و $M=9n-1$.

1- نفرض أن n زوجي. نضع $n=2p$، حيث p عدد طبيعي غير معدوم.

أ) بين أن M و N عددان فرديان.

ب) بملاحظة أن $N=M+2$، عين $PGCD(M;N)$.

2- نفرض أن n فردي. نضع $n=2p+1$، حيث p عدد طبيعي.

أ) بين أن M و N عددان زوجيان.

ب) بملاحظة أن $N=M+2$، عين $PGCD(M;N)$.

3- n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العدد $81n^2-1$.

أ) عبر عن $81n^2-1$ بدلالة M و N.

ب) بين أنه إذا كان n زوجي فإن $81n^2-1$ فردي.

ج) بين $81n^2-1$ مضاعف لـ 4 إذا وفقط إذا n فردي.