

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (01)

السنة الدراسية: 2010/2009

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

- المحور : النهايات والاستمرارية + التدريب على دراسة دوال والتوظيف

التمكن من حساب النهايات و التفسير البياني

التمرين (01) : اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 = +\infty \quad /2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad /1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7 \quad /4 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x + 4} = 3 \quad /3$$

التمرين (02) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم

احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها و عيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f .

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2} \quad /3 \quad , \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} \quad /2 \quad , \quad f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3} \quad /1$$

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad /5 \quad , \quad f(x) = \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 5} \quad /4$$

التمرين (03) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم

احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها و عيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f .

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad /2 \quad , \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} \quad /1$$

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} \quad /4 \quad , \quad f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad /3$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2(x^2 - 1)} \quad /6 \quad , \quad f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad /5$$

التمرين (04) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x}) \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{4x+3}} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} \quad (8) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad (7)$$

التمرين (05) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x) \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x) \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \quad (7) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+2}} \quad (5)$$

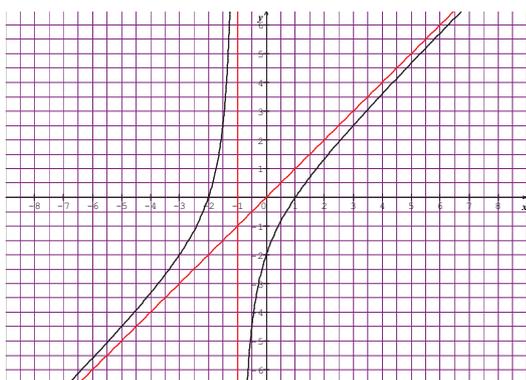
التمرين (06) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2007} - 1}{x - 1} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 + 8x - 12}{x - 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi} \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{x+1} \quad (4)$$

التمرين (07) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$

- وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- عين بيانيا ثم حسابيا نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف
 - أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ،



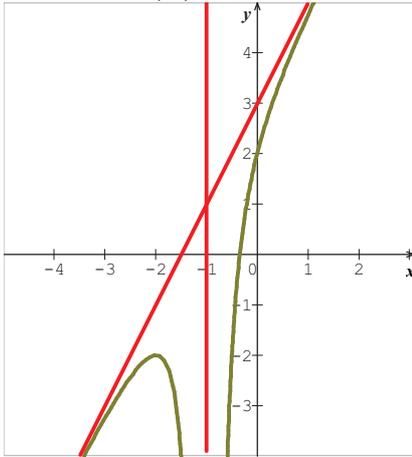
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

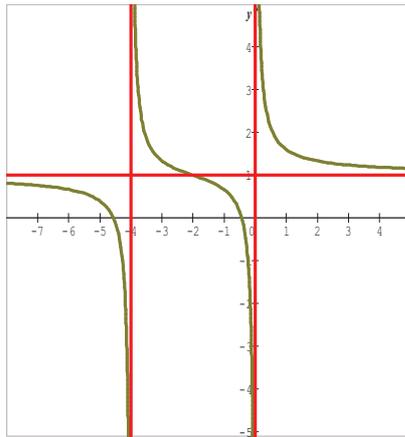
- استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني C_f
- حدد الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم المقارب المائل من البيان ثم تحقق حسابيا

التمرين (08) في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهيات في حدود المجموعة D_f وشكل جدول التغيرات لكل دالة .

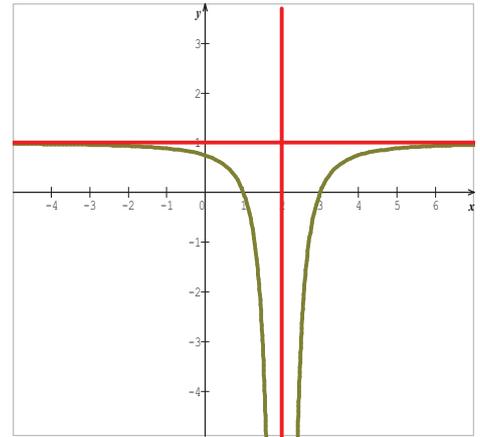
الحالة (3)



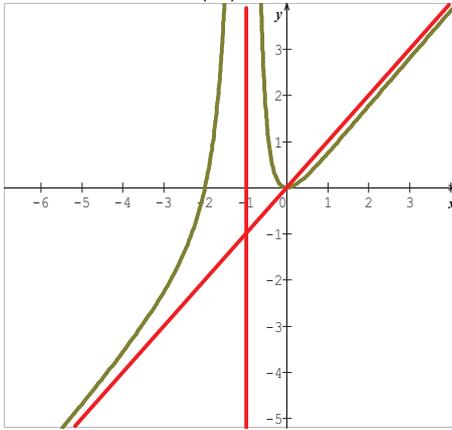
الحالة (2)



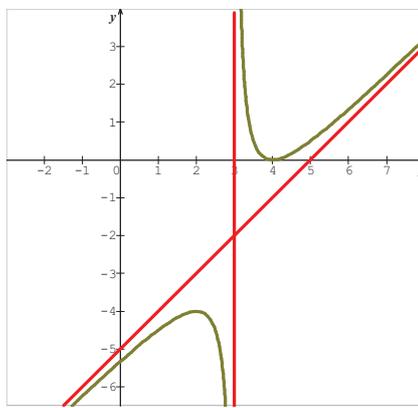
الحالة (1)



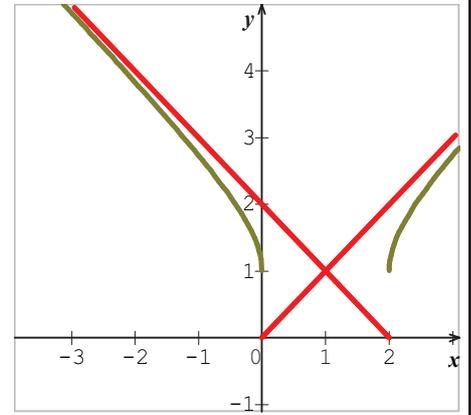
الحالة (6)



الحالة (5)



الحالة (4)



النهيات و المقارنة (الترتيب)

التمرين (09) لتكن f دالة معرفة على $D = [0; +\infty[$ حيث : $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(1) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1 \quad \text{و} \quad x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x + 1)^2$$

(2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

التمرين (10) باستعمال مبرهنات المقارنة احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x^2 + 1} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \sin x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + E(x)) \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + E(x)) \quad (5) \quad , \quad \text{حيث } E \text{ هي دالة الجزء الصحيح}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x - \cos 2x}{x} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \sin x)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \quad (7) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} - \sqrt{x} \quad (8)$$

التمرين (11) (u_n) متتالية معرفة بـ :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$$

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

حساب نهايات باستعمال النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ أو تعريف العدد

المشتق أو تبديل المتغير

التمرين (12) احسب النهايات التالية :

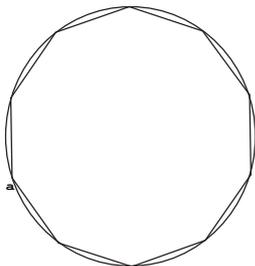
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} \quad (7) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{2x} \quad (10) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{x - \frac{\pi}{6}} \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \quad (8)$$

التمرين (13) هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره r هي πr^2 ؟

إليك برهان من بين البراهين : خذ قرص نصف قطره r مركزه O و ارسم داخله مضلع منتظم مركزه O ذي n رأس بحيث رؤوسه تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r



$$1- \text{بين أن مساحة المضلع تساوي : } \frac{1}{2} r^2 . n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

2- استنتج عندئذ مساحة القرص

الاستمرارية

التمرين (14) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 1 \\ \frac{1}{x} - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 1

2- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً

3- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين (15) f هي الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- استنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $[-1; +\infty[$.

التمرين (16) حدد العددين a و b حتى تكون الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x - 2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{2x + b}{3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

مستمرة عند القيمة $x_0 = 2$

التمرين (17) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- انطلاقاً من منحني ممثل لدالة مرجعية استنتج التمثيل البياني للدالة f

التمرين (18) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{2x-8} & , x \in]-\infty; 0[\\ \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} & , x \in [0; 4] \\ x-5+\frac{4}{x} & , x \in]4; +\infty[\end{cases}$$

- بين أن الدالة f مستمرة على \mathbb{R}

التمرين (19) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} & , x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

- 1- بين أن f دالة زوجية
- 2- اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة
- 3- ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها
- 4- احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانياً
- 5- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- 6- ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين (20) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$f(x) = x^2 + E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$$

حيث E هي دالة الجزء الصحيح

- 1/ عيّن D_f مجموعة تعريف f و اكتب $f(x)$ بدون رمز $E(x)$
 - 2/ ادرس استمرارية f عند القيم $x = \pm 1$ و $x = \pm\sqrt{2}$
 - 3/ ادرس تغيرات الدالة f .
 - 4/ ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- تعريف** : نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على \mathbb{R} و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n
- حيث $n \leq x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[]$.

مبرهنة القيم المتوسطة و الدوال الرتيبة تماما وتطبيقات مبرهنة

القيم المتوسطة في التعرف على حلول المعادلة : $f(x) = k$

التمرين (21) بيّن أن المعادلات التالية تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال I .

$$I = [0;1] \quad X^4 + X^2 + 4X - 1 = 0 \quad (1)$$

$$I = [0;\pi] \quad \cos x = x \quad (2)$$

$$I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi \right] \quad 2 \sin x - x = 0 \quad (3)$$

التمرين (22) f دالة معرفة على $I = [1;3]$ بالعلاقة $f(x) = -x + 2 + \frac{3}{x^2}$

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عيّن $f(I)$

(2) ماهو عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{4}$ على I ؟

التمرين (23) f دالة معرفة على $I = [-1;1]$ بالعلاقة $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

1- احسب : $f(-1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f(1)$

2- استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$ في المجال $I = [-1;1]$

التمرين (24) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \text{ بـ:}$$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f و بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلته

(3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

(4) بيّن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

(5) باستعمال طريقة التصنيف أوجد حصر الـ α سعته 0.05 ثم ارسم المنحني C_f

التمرين (25) /1 دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث $f(a) > a$ و $f(b) < b$. بين أن

المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال $[a;b]$

/2 دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$. بين أنه يوجد عدد

حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث يكون : $f(c) = bc$

التمرين (26) عيّن جدول إشارات الدالة f علما أنها تتعدم عند القيمتين -5 و 6 و جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$
$f(x)$	1		-1		$+\infty$

التمرين (27) f دالة معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول

تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$	$1-$	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

أجب بـ : خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة .

- المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f)
- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا .
- مجموعة حلول المترابحة $f(x) > 0$ هي $S =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$
- في المجال $]-\infty; -1[$ يكون : " $f(-2) > f(x)$ " عندما يكون $x < -2$.
- النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f) .
- الدالة f زوجية .

التمرين (28) -1 ادرس تغيرات الدالة $f : x \rightarrow x^3 - 3x + 1$ على المجال $[-1; 1]$

2- بين أن المعادلة : $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; 1[$

3- باستعمال آلة حاسبة عيّن قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α

التمرين (29) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على \mathbb{R}^* و \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 - x + 2$$

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0، المعادلة $f(x) = g(x)$ تكافئ المعادلة $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

- أدرس اتجاه تغير الدالة h على \mathbb{R} . أحسب $h(0)$ و $h(1)$.
- برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا c على \mathbb{R} . ماذا يمثل بيانيا العدد c
- باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للحل c سعته 10^{-2} .

التمرين (30) نعتبر الدالتين $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g : x \mapsto -x^3$

• بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة

$$\text{فاصلتها } x_0 \text{ حيث } -\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$$

التمرين (31) الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته 0,1.
3. حدد، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$.

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* ، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج، باستعمال حصر العدد α ، حصر العدد $f(\alpha)$.
5. أرسم المنحني (C_f) (نأخذ $\alpha \approx \frac{2}{3}$).

التمرين (32) n عدد طبيعي غير معدوم.

(1) بين أن المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2.

(2) هل المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل حلا في \mathbb{R} إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

{ التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) - الجزء الأول }

تحضير تمارين البكالوريات

مسألة (01) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

- 1) ادرس تغيرات الدالة f . 2) عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى C_f .
- 3) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع المحورين الإحداثيين
- 4) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي
- 5) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 2$ محور تناظر للمنحنى C_f .
- 6) ارسم المنحنى C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

مسألة (02) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}$$

- وليكن C_f منحنىها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1) ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى C_f
 - 2) اثبت ان النقطة $\omega(-2;1)$ مركز تناظر للمنحنى C_f
 - 3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى C_f في النقطة ω
- احسب $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ثم عيّن نقط تقاطع المنحنى C_f مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس والمنحنى C_f

مسألة (03) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

- وليكن C_f منحنىها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ ادرس تغيرات الدالة f
 - 2/ عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع المحورين الإحداثيين
 - 3/ أثبت صحة المساواة لكل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، $f(2-x) = f(2+x)$ ،
- ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمنحنى C_f
 - 4/ ارسم المنحنى C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 - 5/ باستعمال المنحنى C_f حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

مسألة (04) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ .

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين واثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المنحني C_f .

6/ استنتج رسم المنحني C' الممثل للدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{(x-4)^2}{|x-3|}$

مسألة (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني C_f .

2) عيّن وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left] \frac{-3}{8}; \frac{-1}{4} \right[$.

4) استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

5) اكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6) ارسم المماس Δ و المنحني C_f

مسألة (06) الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته 0,1.

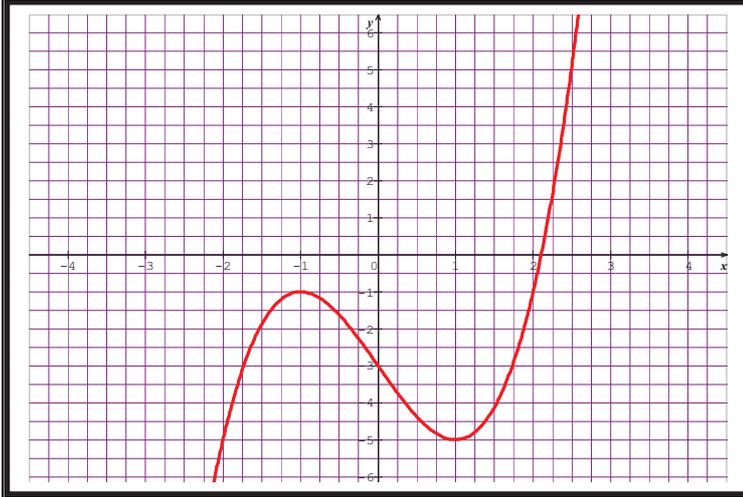
3. حدّد، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R}^* ، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج، باستعمال حصر العدد α ، حصر العدد $f(\alpha)$.
5. أرسم المنحني (C_f) (نأخذ $\alpha \approx \frac{2}{3}$).

مسألة (07)



- I - المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني**
 للدالة العددية g المعرفة على المجال \mathbb{R} كما يأتي :
 $g(x) = ax^3 + bx + c$:
 1- أوجد الأعداد a, b, c
 2- أكتب جدول تغيرات الدالة g
 3- بين ان المعادلة $x^3 - 3x - 3 = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left] 2; \frac{5}{2} \right[$
 4- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

II - دالة معرفة على $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بالعلاقة :
 $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:
 $f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

(ب) عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

(ج) احسب النهايات عند حدود D

(د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(هـ) بين أن : $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ ثم استنتج حصر العدد $f(\alpha)$

(و) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (Γ)

ثم ادرس وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(ي) ارسم (Γ)

مسألة (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكرتية له

4/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5/ احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

6/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مماسا Δ معامل توجيهه 1. اكتب معادلة Δ

7/ أنشئ المماس Δ و المنحني C_f

8/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

مسألة (09) (I) $P(x)$ كثير حدود حيث: $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

1/ احسب $P(1)$ واستنتج تحليلا لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

(II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$

1- عيّن مجموعة التعريف D_f للدالة f

2- بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-2)^3}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- بيّن أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

6- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

7- ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني C_f

مسألة (10) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 2/ بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x$ هو مقارب مائل للمنحني C_f بجوار $(\infty+)$.
 3/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0.
 4/ ارسم المماس (T) و المنحني C_f
 5/ باستعمال المنحني C_f استنتج رسم المنحني (Γ) الممثل للدالة : $g(x) = |x| + \sqrt{x^2 + 1}$

مسألة (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يأتي :

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته : $y = x$

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و (D) .

3) أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3 < x_0 < 1.4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماساً للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب .

ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

4) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = |f(x)|$

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقاً من (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة

$$g(x) = m^2 : x$$
 ذات المجهول

مسألة (12) (O; \vec{i}; \vec{j}) معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرفة على \mathbb{R} بـ : $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ نسمي e تمثيلها البياني .

1. أ - عين نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

- استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$

2. أ - بيّن أنّ $[u(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x) > 0$. استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$.

ج - فسّر هذه النتائج بيانياً .

3 . بيّن أنّ : $u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة u

4. أرسم e ومستقيمه المقارب المائل

مسألة (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = x + \alpha + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ .

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ثم ارسم المنحني C_f

5/ استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$3x^2 + (x-m)x^2 + (10-2m)x + 5 - m = 0$$

$$g(x) = \frac{|x|^3 + 3x^2 + 10|x| + 5}{(|x|+1)^2} \quad \text{6/ الدالة المعرفة بـ:}$$

أ) بيّن أن الدالة g زوجية

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f - ارسم (Γ)

مسألة (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (γ) تمثيلها البياني يشمل النقطة

$D(0; -3)$ وتكون النقطة $E(-1; -2)$ ذروة للمنحني (γ) .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة: $x \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

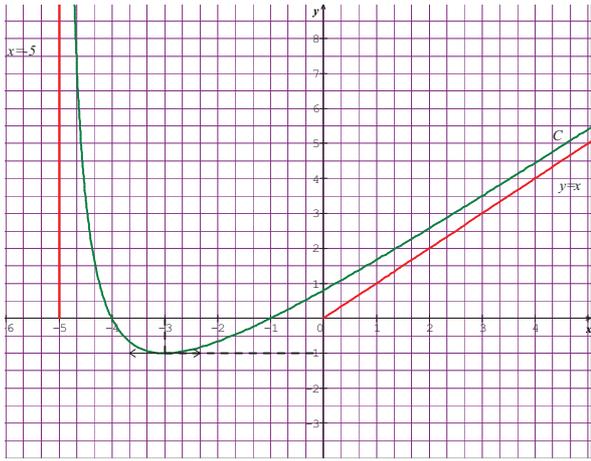
3/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (γ)

4/ ارسم المنحني (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

5/ لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{x^2 + 3}{|x-1|}$ (γ') تمثيلها البياني

بيّن أن المنحني (γ') يستنتج بسهولة من رسم (γ) ثم ارسم (γ')

مسألة (15)



I . f دالة معرفة على $]-5; +\infty[$: $I =]-5; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 5} \quad (C_f) \text{ تمثيلها البياني}$$

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين في الشكل .

- 1) أ- احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I
- ب- بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها .

$$g(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} \quad \text{بالعبارة : }]-\infty; -5[\text{ على المجال}$$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ- احسب نهاية g عند حدود مجموعة تعريفها .

- ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ - يطلب تعيين معادلة له
- ج - ادرس تغيرات g

$$k(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{|x + 5|} \quad \text{II دالة معرفة على } \mathbb{R} - \{-5\} \text{ كما يلي :}$$

1) اكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

2) من نتائج الجزء الأول شكل جدول تغيرات الدالة k

3) ارسم (C_k) المنحني الممثل للدالة k في معلم متعامد و متجانس

مسألة (16) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$g(x) = 3x + \frac{1}{(x+1)^3}$$

نسـمـي (Γ) المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة g واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (Γ)

2/ ادرس وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3/ أثبت أن النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (Γ)

3/ ارسم المنحني (Γ) واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2(x+1)^2} \quad \text{II دالة العددية للمتغير الحقيقي } x \text{ المعرفة بـ:}$$

نسـمـي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بيّن أنه لكل x من D_f : $f'(x) = g(x)$

2/ استنتج جدول تغيرات الدالة f

3/ أثبت أن المنحني C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in]0;1[$

4/ عين حصر الـ α سعته 0.25

5/ (P) المنحني الممثل للدالة p حيث: $p(x) = \frac{3}{2}x^2$

- بين أن (P) و C_f متقاربان ب- احسب $f\left(\frac{-3}{2}\right)$ وارسم المنحني C_f

مسألة (17) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ) 1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f عند نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

3/ بين أن المماس (Δ) يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيين إحداثيتها.

4/ احسب: $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) ثم المنحني C_f .

ب) m وسيط حقيقي، (Δ_m) مستقيم معادلته: $y = 4x + m$

- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد النقط المشتركة بين المنحني C_f و (Δ_m)

مسألة (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 4$

أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) اثبت أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث: $g(\alpha) = 0$ ، ثم عين قيمة مقربة إلى 10^{-2}

ج) ادرس إشارة g على \mathbb{R}

2- أحسب نهايات الدالة عند حدود كل مجالات مجموعة تعريفها.

3- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

4- استنتج جدول تغيرات الدالة f .

5- برهن أنه من أجل x من $\mathbb{R} - \{-1;1\}$: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$

- استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم (D) .

6- ارسم (D) و C_f

{ التدريب على حل مسائل : توظيف الدوال العددية لحل مشكل } وضعيات ادماجية- الجزء الأول - مسائل الإستمثال

تمرين (01) : f دالة معرفة على المجال $D =]2; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x-2}$

وليكن (C_f) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس.

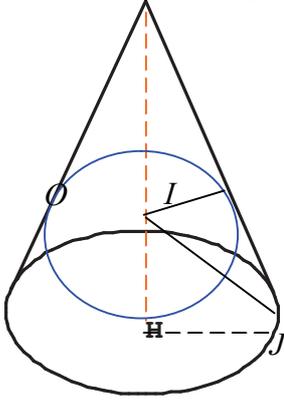
1/ ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) . ثم ارسم (C_f)

2/ مثلنا في الشكل المقابل مخروط (Γ) ارتفاعه h ،

نصف قطر قاعدته r ومحيطا بسطح كرة التي مركزها O

ونصف قطرها 1. النقط J, H, I, O, A تنتمي إلى

نفس المستوي حيث $(OI) \perp (AJ)$ و $(AH) \perp (HJ)$.



نضع : $g(h) = \frac{1}{2}V(h)$ حيث $V(h)$ هو حجم المخروط (Γ)

- تحقق أن $h > 2$

- احسب $V(h)$ بدلالة h ثم باستعمال نتائج السؤال 1 عيّن h

بحيث يكون $V(h)$ اصغر ما يمكن.

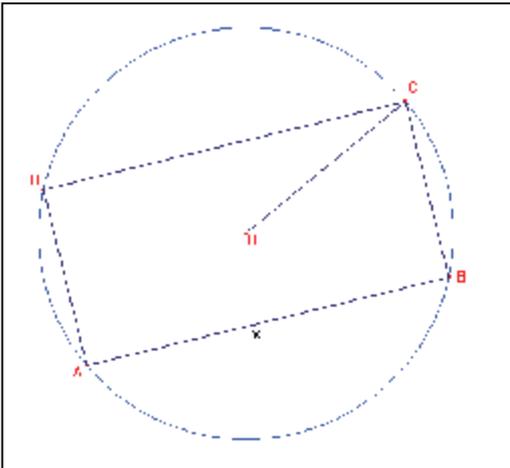
تمرين (02) قطعة أرض دائرية الشكل نصف قطرها 10m

أراد صاحبها أن يبني عليها منزلا قاعدته مستطيلة الشكل.

نضع $AB = x$.

1. احسب مساحة قاعدة هذا المنزل بدلالة x .

2. عين x بحيث تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن؟



تمرين (03) شاحنة تقطع مسافة 200 km بسرعة v مقدره بـ km/h ، الشاحنة تستهلك :

$\left(5 + \frac{v^2}{320}\right) l / h$ من الوقود . ثمن الوقود هو 16DA للتر الواحد ويتقاضا السائق أجرتا تقدر بـ 100DA في الساعة.

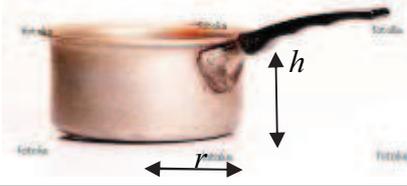
1) نسمي t زمن الرحلة . عبر عن t بدلالة v

2) احسب الكلفة $P(v)$ بدلالة v

3) ماهي سرعة الشاحنة حتى تكون الرحلة أقل تكلفة.

تمرين (04) مصنع الألمنيوم يريد صنع أواني طبخ منزلية اسطوانية الشكل نصف قطرها r

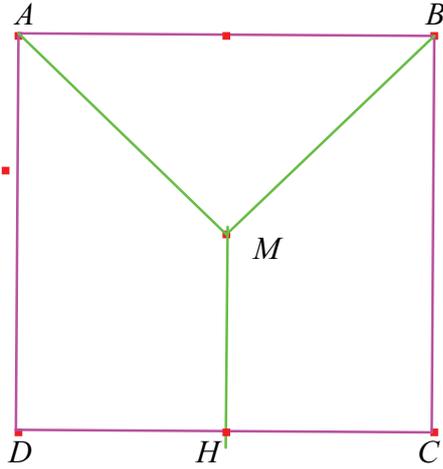
كما هو موضح في الشكل المقابل. خصص لكل إناء صفيحة معدنية مساحتها ثابتة A
نفرض أنه لا يوجد غطاء وأنه لا يوجد نفاية للمعدن أي سمك الإناء ثابت
ما هو الارتفاع المناسب h بحيث يكون حجم الإناء أكبر ما يمكن ؟



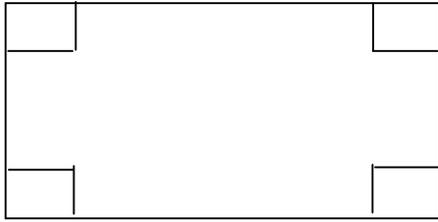
(problème de la casserole)

تمرين (05) يملك عبد الله أرض مربعة الشكل طول

ضلعها $15m$ أراد أن يصنع خزان للماء في النقطة M
الواقعة على محور $[AB]$ يملأ هذا الخزان بواسطة
أنابيب من المنابع A و B و H منتصف $[CD]$.
يريد عبد الله المساعدة في تحديد النقطة M التي من أجلها
تكون تكلفة المشروع أقل ما يمكن .



تمرين (06) انطلاقاً من مستطيل بعده 16 و 10 بالسنتيمترات



نصنع علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم بالكيفية
التالية: من كل ركن من المستطيل نقطع مربعاً طول
ضلعه يساوي x ثم نرفع الجوانب بالطي .
- حدد قيمة x ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟

تمرين (07) نريد صنع علبة مصبرات اسطوانية الشكل

(بغطاء) ذات حجم V معطى

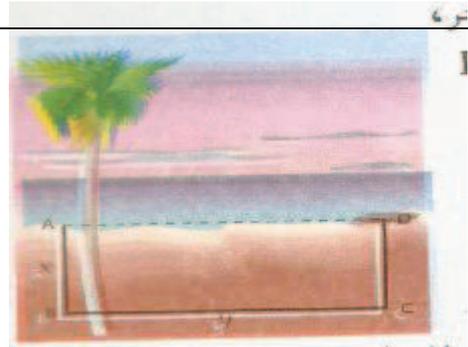
- اوجد النسبة بين الإرتفاع h ونصف القطر r حتى نستعمل
أقل مايمكن من المعدن
(علبة اقتصادية الصنع)

problème de la boîte de conserve



تمرين (08) : لتحديد حيز مستطيل الشكل للاصطياف

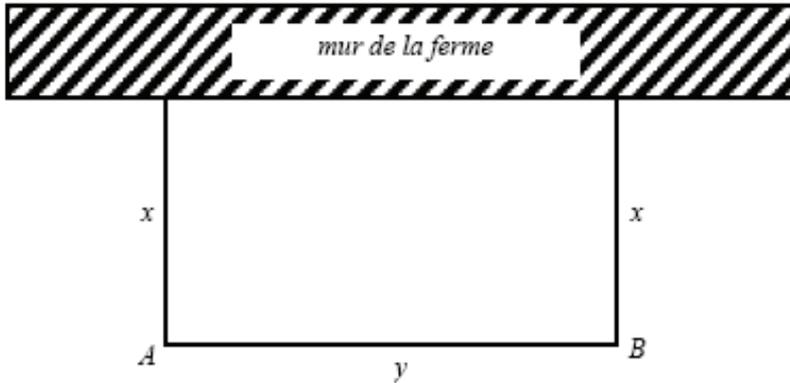
على شاطئ البحر ثبت حبل طوله 40 متراً بواسطة أربعة أوتاد
 A, B, C, D على أن يكون طرفا الحبل هما A, D
(كما في الشكل) نفرض أن : $AB = x$, $BC = y$
ما هو طول وعرض الحيز حتى تكون مساحته أعظمية ؟



تمرين (09) : أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة الشكل مساحتها $392m^2$ أحد جدرانها حائط

ضيغته كما هو مبين في الشكل

نرمز لبعدها كل من الوتدين A و B عن الحائط بالرمز x و نرمز للبعد بين الوتدين A و B بالرمز y أين يمكن وضع الوتدين A و B حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن ؟



تمرين (10) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. النقط $A(-1;2)$ ، $B(-1;0)$ ،

$C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x < -1$ المستقيم (AM) يقطع محور الترتيب في النقطة N .

1. احسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N ومساحات المثلثات OMN ، CAN ، ABM .

2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ وليكن (C_f) منحنياها في المعلم

(أ) بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad : \quad]-\infty; -1[$$

(ب) ادرس تغيرات f على المجال $]-\infty; -1[$

(ج) تحقق ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما. (د) ارسم (C_f)

(هـ) ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن ؟

(و) احسب عندئذ هذه المساحة.

النجاح مطلب الجميع وتحقيق النجاح الدراسي يعتبر من أولويات

الأهداف لدى الطالب .. ولكل نجاح مفتاح وفلسفة وخطوات ينبغي

الاهتمام بها... ولذلك أصبح النجاح علما وهندسة

1- الطموح كثر لا يفنى :

لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى ..فكن طموحا وانظر

2- العطاء يساوي الأخذ :

إلى المعالي..

النجاح عمل وجدّ وتضحية وصبر ومن منح طموحه صبيرا وعملا وجدا حصد نجاحا وثمارا

..فاعمل واجتهد وابدل الجهد لتحقيق النجاح والطموح والهدف ..فمن جدّ وجد ومن زرع حصد..

وقل من جد في أمر يحاوله وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر

سلسلة استعداد للباكالوريا رقم (06)

السنة الدراسية: 2009/2008

المستوى : ثانية ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور : النهايات + دراسة دوال ومساائل

مفاهيم وتطبيقات على استعمال التعاريف والقراءة البيانية

التمرين (01) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;3[\cup]3;6]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2/ أكمل الجدول التالي :

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01
$f(x)$							

3/ ماذا تلاحظ ؟

4/ بين أنه حتى يكون $f(x) \geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $[3-10^{-4};3[\cup]3;3+10^{-4}]$

5/ أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ ثم أكمل جدول التغيرات

6/ ارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين (02) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بالعلاقة : $f(x) = 1 + \frac{1}{x-3}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول التغيرات

2/ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين

3/ بين أنه يمكن استنتاج رسم C_f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية.

4/ ارسم المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 3$ و $y = 1$ ثم ارسم C_f .

4/ ما هو تخمينك لـ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ثم أكمل جدول

التغيرات ثم أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

التمرين (03) اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية : 1/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

2/ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)} = +\infty$ ، 3/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$ ، 4/ $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+5) = 7$

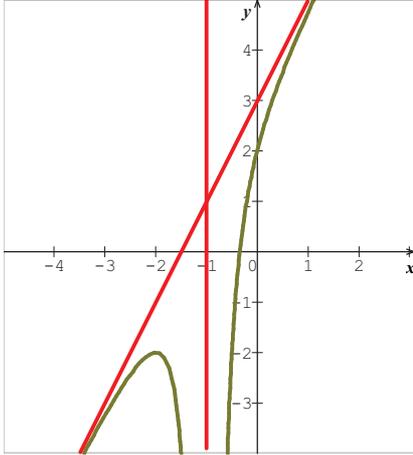
التمرين (04) اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \quad /3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = +\infty \quad /2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty \quad /1$$

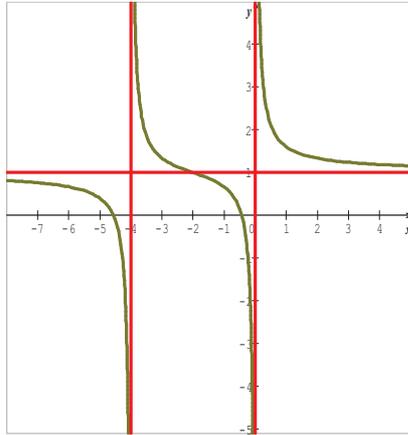
التمرين (05) في كل حالة من الحالات التالية عيّن مجموعة التعريف والنهايات في حدود

المجموعة D_f و عين معادلات المستقيمات المقاربة ثم اكتب جدول تغيرات الدالة f

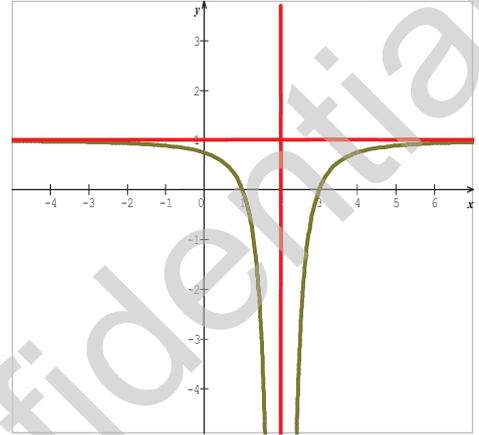
الحالة (3)



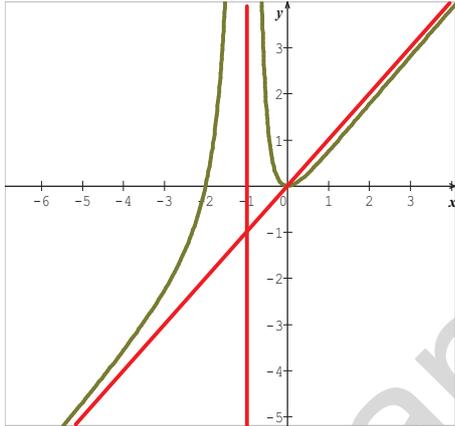
الحالة (2)



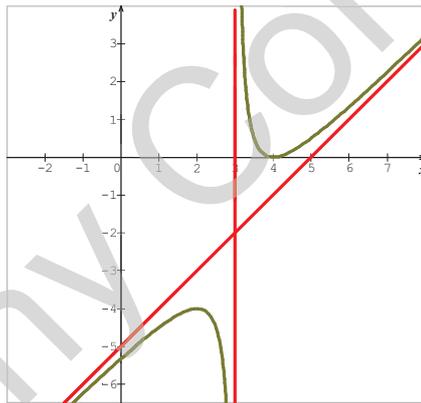
الحالة (1)



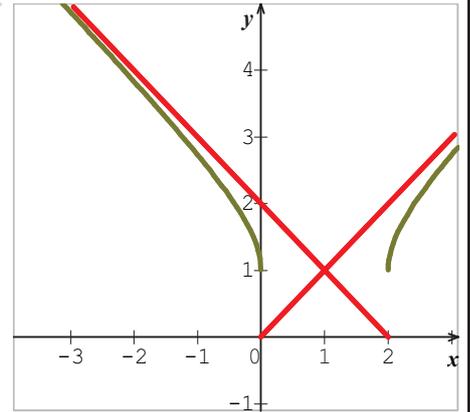
الحالة (6)



الحالة (5)



الحالة (4)



النمكّن من حساب النهايات والتفسير الياني

التمرين (06) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x+5} \quad (3), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3+3x^2-x+3) \quad (2), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2+3x-1) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x^2+x-3} \quad (7), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x} \quad (6), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x^2+5x} \quad (5), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x+5} \quad (4)$$

التمرين (07) f دالة معرفة بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

(1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f . (2) احسب النهايات عند حدود D

التمرين (08) f دالة معرفة بالعلاقة: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$

(1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f . (2) احسب النهايات عند حدود D

التمرين (09) f دالة معرفة بالعلاقة: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x}$

(1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f
(2) احسب النهايات عند حدود D ثم أكد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيمتا مقارنة

التمرين (10) في كل حالة من الحالات التالية عين اكبر مجموعة تعريف ممكنة D الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها D واكد إن كان منحنى الدالة f يقبل مستقيمتا مقارنة معينتا معادلاتها

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2} / 3, \quad f(x) = \frac{-3x+2}{x+1} / 2, \quad f(x) = \frac{2x+3}{x-1} / 1$$

$$f(x) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+5} / 6, \quad f(x) = 4 + \frac{1}{x-2} / 5, \quad f(x) = \frac{-x^2+4x}{x^2-4x+3} / 4$$

التمرين (11) في كل حالة من الحالات التالية عين اكبر مجموعة تعريف ممكنة D الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها D وعين معادلات المستقيمتا المقاربة لمنحنى الدالة .

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2} \quad (2), \quad f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-2} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x-4} \quad (4), \quad f(x) = 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3-x} \quad (3)$$

التمرين (12) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x+1}$

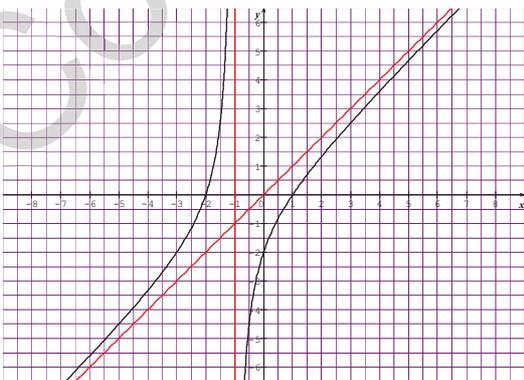
وليكن C_f منحنىها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(1) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

(2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ، $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ،

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

(3) استنتج معادلات للمستقيمتا المقاربة للمنحنى C_f

(4) حدد الوضع النسبي للمنحنى C_f والمستقيم المقارب المائل



التمرين (13) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3} \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{4x+3}} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3} \quad (7) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+2}+x) \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-2x) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \quad (10) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}) \quad (8)$$

التمرين (14) لتكن f دالة معرفة على $D = [0; +\infty[$ حيث $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$

$$(1) \text{ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } D \text{ لدينا : } f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$$

$$(2) \text{ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } D : 0 \leq f(x) \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$$

(3) استنتج نهاية f عندما x يؤول إلى $+\infty$

التمرين (15) لتكن f دالة معرفة على $D = [0; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(1) أكمل الجدول التالي :

x	10^4	10^6	10^{10}	10^{12}	10^{20}	10^{40}
$f(x)$						

(2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1 \quad \text{و} \quad x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x + 1)^2$$

(3) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

التمرين (16) لتكن f دالة معرفة على $D = [0; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}$

$$(1) \text{ برهن انه من اجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } D \text{ يكون : } \frac{x^2-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{x}$$

(2) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x}$

التمرين (17) (u_n) متتالية معرفة بـ :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

تمارين شاملة للدراسة دوال

دوال كثيرات الحدود

التمرين (01) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول التغيرات

(2) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات

(3) برهن أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

(4) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

(5) ارسم (T) و (C_f)

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4 - m = 0$

التمرين (02) f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 2x + 3 \text{ و } f(x) = x^2 - x - 2$$

1- ادرس تغيرات كل من الدالتين التاليتين f و g

(C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيان على الترتيب في المستوي المنسوب لمعلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

2- عين نقط تقاطع كل من المنحنيين (C_f) و (C_g) مع المحورين

3- أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ محور تناظر للمنحني (C_g)

4- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسمهما.

التمرين (03) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. a و b عدنان حقيقيان

(1) عين العددين a و b حتى الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8

(2) نفرض أن: $a = -1$ و $b = 1$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) احسب: $f(5), f(1), f(0), f(-2)$

(ج) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة I التي فاصلتها 1.

(د) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ) . ماذا تستنتج؟

(هـ) ارسم المماس (Δ) و (C_f)

- التمرين (04)** نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = ax^4 + bx^2$
- (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. a و b عدنان حقيقيان
- 1) أثبت ان الدالة f زوجية
 - 2) عين العددين a و b إذا علمت أن النقطة $(1;1)$ ذروة للمنحني (C_f)
 - 3) ادرس تغيرات الدالة f
 - 4) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين ثم ارسم المنحني (C_f)

- التمرين (05)** نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = x^3 - 3x^2$
- (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1) ادرس تغيرات الدالة f
 - 2) اوجد معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1
 - 3) بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) ميل كل منهما 9 يطلب إيجاد معادلتيهما.
 - 4) ارسم المماسات (Δ)، (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

- التمرين (06)** نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$
- 1) ادرس تغيرات الدالة f
 - 2) برهن أن النقطة $\omega(2;2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)
 - 3) أثبت ان المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\omega(2;2)$
 - 4) ارسم C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - 5) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $g(x) = -x^2|x| + 6x^2 - 9|x| + 4$
- أ - أدرس شفعية الدالة g
- ب- بين أنه يمكن استنتاج المنحني (C_g) الممثل للدالة g انطلاقاً من المنحني C_f ثم ارسم (C_g)

- التمرين (07)** نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
- (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ ادرس تغيرات الدالة f
 - 2/ بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) يشملان النقطة $A\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ يطلب تعيين معادلتيهما.
 - 3/ ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)
 - 4/ اكتب معادلة للمستقيم (Δ_m) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه m
 - 5/ ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $f(x) = m\left(x - \frac{5}{2}\right) + 2$

دوال ناطقة

التمرين (08) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ ادرس تغيرات الدالة f ثم اكتب معادلات المستقيمت المقاربة للمنحني (C_f)
 - 2/ عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين الإحداثيين
 - 3/ بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما 3 يطلب إيجاد معادلتيهما
 - 4/ أثبت أن النقطة I تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (C_f)
 - 5/ ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

التمرين (09) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالعلاقة: $f(x) = a + \frac{b}{x-3}$

- (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ عين العددين a و b إذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الترتيب في النقطة التي ترتيبها $\frac{4}{3}$ و يقبل المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقاربا
 - 2/ نفرض أن: $a = 2$ و $b = 2$. أ) ادرس تغيرات الدالة f
 - ب) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين الإحداثيين
 - ج) بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي -2 يطلب إيجاد معادلتيهما. هـ) ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

التمرين (10) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$

- a و b عدنان حقيقيان. (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1) عين العددين a و b بحيث المنحني (C) يقبل عند النقطة $A\left(0; \frac{7}{2}\right)$ مماسا يوازي محور

الفواصل. ثم بين أن: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$ الشكل

- 2) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول التغيرات
- 3) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب إعطاء معادلته
- 4) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.
- 5) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
- 6) نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)
- 7) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .
- 8) ارسم (T) و (Δ) ثم (C_f)

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

- 1) عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني C_f .
- 2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين
- 3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي
- 4) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 2$ محور تناظر للمنحني C_f .
- 6) ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين (12) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}$$

ولیکن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f
 - 2) اثبت ان النقطة $\omega(-2; 1)$ مركز تناظر للمنحني C_f
 - 3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة ω
- احسب $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ثم عيّن نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس والمنحني C_f

التمرين (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ولیکن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f
- 2/ عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين
- 3/ أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 2$ محور تناظر للمنحني C_f .
- 4/ ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 5/ باستعمال المنحني C_f حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

التمرين (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

ولیکن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f
- 2/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي
- 3/ ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين (15) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

3/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب

تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ .

4/ أوجد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين واثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المنحني C_f .

6/ استنتج رسم المنحني C' الممثل للدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{(x - 4)^2}{|x - 3|}$

التمرين (16) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x + 1)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x + 1} + \frac{\gamma}{(x + 1)^2}$$

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

4/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5/ احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

6/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مماسا Δ معامل توجيهه 1. اكتب معادلة لـ Δ

7/ أنشئ المماس Δ و المنحني C_f

8/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

التمرين (17) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f
 - 2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f عند نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.
 - 3/ بين أن المماس (Δ) يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيين إحداثيتها.
 - 4/ احسب: $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) ثم المنحني C_f .
- ب) m وسيط حقيقي ، (Δ_m) مستقيم معادلته: $y = 4x + m$
- ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد النقط المشتركة بين المنحني C_f و (Δ_m)

التمرين (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

1/ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (γ) تمثيلها البياني يشمل النقطة $(0; -3)$ وتكون النقطة $E(-1; -2)$ ذروة للمنحني (γ) .

2/ بين أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة: $x \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

3/ بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (γ)

4/ ارسم المنحني (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

5/ لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{x^2 + 3}{|x-1|}$ (γ') تمثيلها البياني

بين أن المنحني (γ') يستنتج بسهولة من رسم (γ) ثم ارسم (γ')

التمرين (19) (I) $P(x)$ كثير حدود حيث: $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

1/ احسب $P(1)$ واستنتج تحليلاً لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

(II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$

1- عين مجموعة التعريف D_f للدالة f

2- بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-2)^3}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- بيّن أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته له.

5- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

6- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

7- ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني C_f

التمرين (20) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين D أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

(2) ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

(3) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

(4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 1$ محور تناظر للمنحني C_f .

(6) ارسم المماس (T) و (Δ) والمنحني C_f

(7) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ بالعلاقة : $g(x) = \left| \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x} \right|$

- بين انه يمكن استنتاج المنحني (C_g) الممثل للدالة g انطلاقا من C_f .

التمرين (21) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$

1/ عين D_f أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

2/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث من اجل كل x من D_f يكون :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

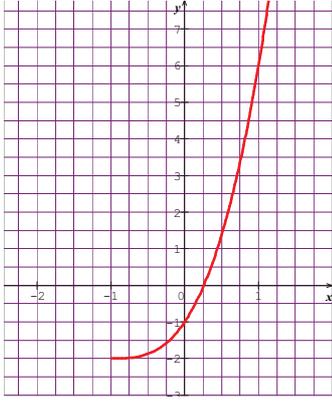
3/ ادرس تغيرات الدالة f . ماذا تستنتج بخصوص النقطة ذات الفاصلة 0.

4/ بيّن أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

الديكارتية وتحديد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

4/ ارسم (Δ) و (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين (22) : المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال



$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \quad : \text{ كما يأتي }]-1; +\infty[$$

1- أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

$$\text{وحدد } g(0) \text{ و إشارة } g\left(\frac{1}{2}\right) .$$

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $0; \frac{1}{2}$] يحقق : $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \quad \text{و ليكن } (\Gamma) \text{ تمثيلها البياني في معلم متعامد } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسّر النتيجة بيانياً.

ج) احسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسّر النتيجة بيانياً.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- نأخذ $\alpha \approx 0.26$. أ) عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} . ب) ارسم المنحني (Γ) .

التمرين (23) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x-2)}$

وليكن e منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f وادرس الفروع اللانهائية للمنحني

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني e

4/ برهن انه يوجد مماسان للمنحني معامل توجيه كل منهما

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين

B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A.

6/ نعتبر الدالة العددية (f_m) للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f_m(x) = \frac{4x^2 + (m-8)x - m + 4}{2(x-2)}$$

نسُمي (C_m) المنحني الممثل للدالة (f_m) في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ - بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب - ما هو المنحني (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\frac{7}{4}; 0)$

الهدية

النجاح هو ما تصنعه (فكر بالنجاح - أحب النجاح..)

النجاح شعور والناجح يبدأ رحلته بحب النجاح والتفكير بالنجاح ..فكر وأحب وابدأ رحلتك نحو هدفك .. تذكر : " يبدأ النجاح من الحالة النفسية للفرد ، فعليك أن تؤمن بأنك ستنجح - بإذن الله - من أجل أن يكتب لك فعلا النجاح . " الناجحون لا ينجحون وهم جالسون لاهون ينتظرون النجاح ولا يعتقدون أنه فرصة حظ وإنما يصنعونه بالعمل والجد والتفكير والحب واستغلال الفرص والاعتماد على ما ينجزونه بأيديهم .

في أهمية اللغات

فتلك له عند الملمات أعوان

بقدر لغات المرء يكثر نفعه

فكل لسان في الحقيقة إنسان ! .

فأقبل على درس اللغات وحفظها

قال زيد : أمرني رسول الله - صلى الله عليه وسلم - فتعلمت له كتاب يهود بالسريانية وقال: إني والله ما آمن يهود على كتابي، فما مر لي نصف شهر حتى تعلمته وحذقته، فكنت أكتب له إليهم، وقرأ له كتبهم. (رواه البخاري، وأبو داود والترمذي)

حكم بالانجليزية

- 1/ Proverbs are the adornment of speech
- 2/ A friend in need is friend indeed.
- 3/ A tree is known by its fruit
- 4/ Birds of feather flock together
- 5/ Action speak louder than words

Des proverbes algeriens

- 1/ Un métier à la main vaut mieux que toute fortune dont on tient
- 2/ Etre pauvre et fier est mieux qu'être riche et avoir le nez sous la terre
- 3/ Celui qui est chanceux , même les montagnes s'abaissent devant lui
- 4/ Celui qui n'a pas de cœur recevra des condoléances.
- 5/ les pieds marchent vers ce que désire le cœur .
- 6/ Quand il était vivant , il désirait ardemment une datte , et quand il mourut , il on accrocher toute une tonne au dessus de lui

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (04)

السنة الدراسية: 2008/2007

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

إعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور : الاشتقاقية + التدريب على دراسة دوال والتوظيف

التمرين (01) : ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة x_0 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة .

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \quad x_0 = 1 \quad /4 \quad f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2 \quad x_0 = 1 \quad /1$$

$$f(x) = 3x + |x^2 - 4| \quad x_0 = -2 \quad /5 \quad f(x) = \sqrt{x-2} \quad x_0 = 2 \quad /2$$

$$f(x) = \sin x \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad /6 \quad f(x) = 2x|x-1| \quad x_0 = 1 \quad /3$$

التمرين (02) احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّنا المجموعـة التي تجري الحسابات عليها .

$$f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n \quad /3 \quad f(x) = \frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3} \quad /2 \quad f(x) = x^3(x^2+1)^4 \quad /1$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} \quad /5 \quad f(t) = \tan^3 t \quad /4 \quad f(x) = \cos^3(x^2+1) + \sin(x^2+1) \quad /3$$

التمرين (03) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{2 \cos x - 1} \quad /4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad /3, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} \quad /2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad /1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} \quad /7, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} \quad /6, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \quad /5$$

التمرين (04) n عدد طبيعي غير معدوم ، و x عدد حقيقي يختلف عن 1.

(1) بسط المجموع $1 + x + x^2 + \dots + x^n$

(2) استنتج تبسيطا للعبارة : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

التمرين (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

1/ عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2/ أعط تخميننا ، حسب قيم العدد n لعبارة $f^{(n)}(x)$

إعداد الأستاذ
حليلات عمارة

التمرين (06) الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x \cos x$.

- 1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.
- 2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (07) لدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

- 1) جد عددين حقيقيين a و b بحيث : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.
- 2) n عدد طبيعي غير معدوم . باستعمال النتيجة السابقة ، أعط عبارة لـ : $f^{(n)}(x)$.

التمرين (08) كرة حديدية نصف قطرها 8cm تتمدد عند ارتفاع درجة الحرارة.

1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بـ 1mm ؟
2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

التمرين (09) 1/بررّ التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

- أ $(1+x)^3 \approx 1+3x$.
 - ب $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$.
 - ج $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$.
 - د $\sin x \approx x$.
- 2/ باختيار دالة مناسبة وباستعمال التقريب التآلفي احسب : أ $\tan 46^\circ$ ، ب $\sqrt{3654}$

التمرين (10) لتكن f دالة تحقق : $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,5$ شكل جدولاً يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0; 5]$ ثم أنشئ تمثيلاً تقريبياً للدالة f . تدور النتائج إلى $0,01$. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
2. باختيار خطوة جديدة $h = 0,1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
3. نبرهن أن $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$. تحقق أن $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة مع القيم المقربة المحصل عليها سابقاً بالخطوتين $0,5$ و $0,1$.

التمرين (11) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$

- وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1/ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون للمنحني C_f مستقيم مقارب معادلته : $y = x - 3$ ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

2/ ادرس تغيرات الدالة f

- 3/ اثبت ان المنحني C_f يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتى المماسين (D_1) و (D_2)

4/ ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحني C_f
 5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني C_f والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته : $y = -3x + m$

التمرين (12) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على

$$f_n(x) = (x^2 - 2x)^n \quad \mathbb{R} \text{ بـ :}$$

- 1) أدرس تغيرات الدالة f_n (مميز الحالتين n زوجي ثم فردي) .
- 2) نسمي C_n المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس .
- أ - تحقق من أنّ المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني C_n .
- ب - برّر أنّ C_n يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n .
- أحسب إحداثيات هذه النقط . أرسم في نفس المعلم المنحنيين C_1 و C_7 .

التمرين (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 1 + 2\cos x + \cos 2x$

- 1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π
- 2/ بيّن ان الدالة f زوجية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f
- 3/ ادرس تغيرات الدالة f
- 4/ أوجد نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل
- 5/ ارسم المنحني C_f على المجال $[-\pi; \pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحني C_f
- 6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول الجملة $\left\{ \cos^2 x + \cos x = \frac{m}{2}; -\pi \leq x \leq \pi \right\}$

التمرين (14) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم مثلها بيانيا:

$$\begin{aligned} & 1/ \quad f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \quad , \quad 2/ \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad , \quad 3/ \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} \\ & 4/ \quad f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad 5/ \quad f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad 6/ \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \\ & 7/ \quad f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{\sqrt{(x+5)^2}} \quad , \quad 8/ \quad f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1} \quad , \quad 9/ \quad f(x) = x - \sqrt{x-2} \end{aligned}$$

التمرين (15) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم مثلها بيانيا:

$$\begin{aligned} & 1/ \quad f(x) = \sin 3x - 3\sin x \quad , \quad 2/ \quad f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x \quad , \quad 3/ \quad f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x} \\ & 4/ \quad f(x) = \cos^2 x \cdot \sin 2x \quad , \quad 5/ \quad f(x) = 2\tan x - \tan 2x \quad , \quad 6/ \quad f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} \end{aligned}$$

التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) - الجزء الثاني

مسألة (01) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها ثم ارسم المنحني C_f .

3/ نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = -x - \sqrt{x^2 + 8}$

وليكن C_g منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) بين ان C_f و C_g متناظران بالنسبة للمبدأ O

(ب) ارسم C_g ثم عين معادلة لـ (Γ) حيث $(\Gamma) = (C_f) \cup (C_g)$

مسألة (02) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) 1/ ادرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2/ اكتب معادلة للمماس (D) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0

3/ احسب $f(-x) + f(x)$ وماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f

4/ ادرس الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم (D) . ماذا تستنتج؟

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع المستقيم الذي معادلته $y = x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $1 < x_0 < 2$

6/ ارسم المنحني C_f .

(II) / لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = 1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$ تمثيلها البياني

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة $x_0 = 0$

2/ بين أن الدالة h زوجية ثم استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقاً من رسم C_f

مسألة (03) الجزء الأول الدالة العددية: $f(x) = ax + \frac{bx + c}{(x - 2)^2}$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني C_f يشمل النقطة $D(3; 1)$ وتكون

النقطة $E(1; 1)$ ذروة للمنحني C_f .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال (1) هي الدالة : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ وبيّن أنه يوجد حل وحيد α في المجال $\left] \frac{5}{2}; 3 \right[$

5/ باستعمال خوارزمية التنصيف اوجد حصرًا للعدد α سعته 0.125

6/ ادرس وضعي المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

7/ بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسا (Δ) يوازي المستقيم المقارب المائل

8/ اثبت ان المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

9/ ارسم (Δ) و C_f .

10/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

الجزء الثاني h الدالة المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & x \geq 3 \\ h(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} & x < 3 \end{cases}$$

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق h عند القيمة $x_0 = 3$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2/ ادرس تغيرات الدالة h مستعينا بتغيرات الدالة f

3/ ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_h) ثم ارسم المنحني (C_h)

مسألة (04) f الدالة العددية : $f(x) = |x-2| + \frac{1}{x-1}$

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0 = 2$. فسر النتيجة بيانيا

2/ ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

3/ اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left] 0; \frac{1}{2} \right[$

4/ ارسم المنحني (C_f)

5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $|x-2| + \frac{1-m(x-1)}{x-1} = 0$

6/ استنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي θ : $|\cos \theta - 2| + \frac{1-m(\cos \theta - 1)}{\cos - 1} = 0$

مسألة (05) الجزء الأول f هي الدالة المعرفة على المجموعة \mathcal{D}_f بـ :

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

مع $\mathcal{D}_f =]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$ ؛ و C تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب النهايتين للدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

(2) بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = 2x + 3$ ، هو مستقيم مقارب للمنحني C بجوار $(+\infty)$.

(3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟ (4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in \mathcal{D}_f - \{-4; 0\}$.

5) أنشئ جدول التغيرات للدالة f (6) أرسم المستقيمات المقاربة ثم المنحني C .

الجزء الثاني نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}$

C' تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

أ- برهن ان المنحنيين C و C' متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2; -1)$

ب- نعتبر المنحني $(\Gamma) = (C) \cup (C')$. بي أن ان معادلة (Γ) هي : $y^2 - 2(x+1)y - 2x + 1 = 0$

ج- ارسم (Γ)

د- عيّن معادلة (Γ) في المعلم $(\omega; \vec{i}; \vec{u})$ حيث : $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ثم حدد طبيعة (Γ)

مسألة (06) الدالة العددية: $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{2x}$

(γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ احسب : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]$ وماذا تستنتج ؟

3/ اكتب معادلة المماس (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$

4/ بيّن أن المماس (T) يقطع المنحني (γ) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

5/ اثبت ان المنحني (γ) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

6/ مستعينا بالنتائج السابقة ارسم المنحني (γ)

7/ نعتبر الدالة h حيث : $h : x \rightarrow \frac{-x^2|x| - |x| - 2}{2x}$

أ- ادرس شفعية الدالة h . ب- استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم المنحني (γ)

مسألة (07) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = x - 1 + \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 3)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3/ بيّن ان النقطة $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني C_f

4/ بين أن المنحني C_f يقبل مماسين T_1 و T_2 ميلهما $\frac{5}{2}$ ثم حدد معادلتيهما

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{5}{8}$

6/ ارسم C_f ثم استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

7/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي

مسألة (08) دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث $F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x

$F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$. نسمي C تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث $F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(1) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $G(x) = F(x) + F(-x)$

أ - برّر أن G تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} وأحسب $G'(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$.
ب - أحسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية .

(2) الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ : $H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$

أ - برّر أن H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من أجل $x \in I$.
ب - برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$.

ج - استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1)$. ماذا ينتج عن المنحني C ؟

(3 - د) الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ بـ : $T(x) = F(\tan x) - x$

أ - أحسب $T'(x)$. ماذا ينتج عن الدالة T ؟ ب - أحسب $F(1)$.
4 أنجز جدول تغيّرات الدالة F على \mathbb{R} .

5) أرسم المنحني C ، مستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

مسألة (09) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = \frac{4x^2 - 11x + 7}{2(x-2)}$

وليكن C منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيّرات الدالة f وادرس الفروع اللانهائية للمنحني

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني C

4/ برهن انه يوجد مماسان للمنحني معامل توجيه كل منهما

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A .

6/ نعتبر الدالة العددية (f_m) للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

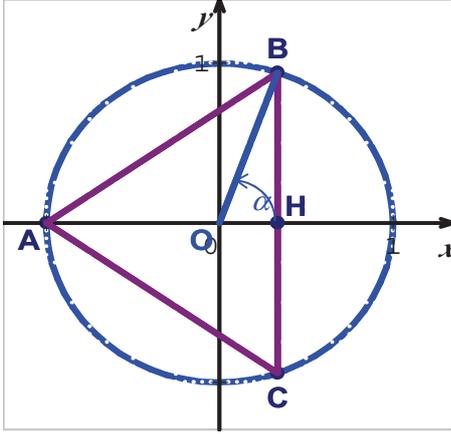
$$f_m(x) = \frac{4x^2 + (m-8)x - m + 4}{2(x-2)}$$

نسمي (C_m) المنحني الممثل للدالة (f_m) في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ - بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب - ما هو المنحني (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $\left(\frac{7}{4}; 0\right)$

مسألة (10) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



مثلث ABC متساوي الساقين رأسه $A(-1;0)$ ، محيط بالدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1. النقطة B تقع فوق

المحور (Ox) ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

ليكن α قياسا رئيسيا موجبا مقدرا بالراديان للزاوية (\vec{i}, \overline{OB})

(1) – عين إحداثيتي النقطة B .

– عبّر عن المسافتين BH و AH بدلالة α .

– استنتج بدلالة α مساحة المثلث ABC .

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ : $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$

أ – عين الدالة المشتقة للدالة f وبرهن أنه من أجل كل $x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

استنتج أنه من أجل كل $x \in [0; \pi]$ ، $f'(x) = (2 \cos - 1)(\cos x + 1)$

ب – أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

(3) برهن أنه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن ، المطلوب

تحديد هذه المساحة . ما هي إذن طبيعة المثلث ABC .

مسألة (11) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. النقط $A(-1;2)$ ، $B(-1;0)$ ،

$C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x < -1$ المستقيم (AM) يقطع محور الترتيب في النقطة N .

1. احسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N ومساحات المثلثات OMN ، CAN ، ABM .

2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ وليكن (C_f) منحنيها في المعلم

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

(أ) بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad : \quad]-\infty; -1[$$

(ب) ادرس تغيرات f على المجال $]-\infty; -1[$

(ج) تحقق ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما

(د) ارسم (C_f)

(هـ) ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن ؟

(و) احسب عندئذ هذه المساحة.

التدريب على معالجة وضعيات ادماجية- الجزء الثاني

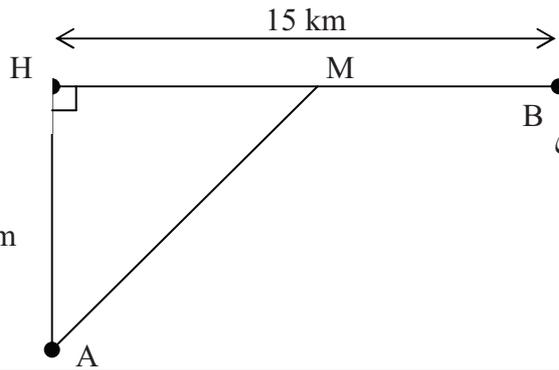
التمرين (01) : أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة الشكل مساحتها $392m^2$ أحد جدرانها حائط

ضياعته كما هو مبين في الشكل

نرمز لبعدها من الوتدين A و B عن الحائط بالرمز x و نرمز للبعد بين الوتدين A و B بالرمز y أين يمكن وضع الوتدين A و B حتى يكون سباح المدجنة أصغر ما يمكن ؟



التمرين (02) بسبب الظلام يريد حارس المنارة الوصول إلى بيته الواقع على الساحل ، ينتقل



بالقارب بسرعة : $4km.h^{-1}$ إلى الضفة النهر ، ثم ينتقل راجلا بسرعة : $5km.h^{-1}$. (الشكل)

أين يجب إرساء القارب حتى يصل الحارس إلى المنزل في أقل مدة ممكنة؟ وما هي هذه المدة علما أن الطريق من الضفة إلى المنزل مستقيما ؟

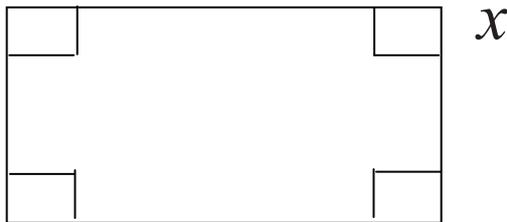
التمرين (03) يراد إنجاز خزان دون غطاء قاعدته مربعة الشكل وجوانبه مستطيلة ، سعته $4m^3$

من الماء تكلفة المربع الواحد $100D.A$

- ماهي ابعاد الخزان التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن ؟

- احسب هذه التكلفة.

التمرين (04)



انطلاقا من مستطيل بعدها 16 و 10 بالسنتيمترات نصنع علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم بالكيفية التالية: من كل ركن من المستطيل نقطع مربعا طول ضلعه يساوي x ثم نرفع الجوانب بالطي . حدد قيمة x ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن ؟

التمرين (05) من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على رافد مستطيل

المقطع قاعدته x وارتفاعه h .

نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار xh^2 كبيراً مع $h > x$.

(I) هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ بـ : $f(x) = -x^3 + \frac{9}{4}x$.

C المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث يؤخذ $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

1. أحسب $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .

2. أكتب معادلة لـ t_1 مماس المنحني C عند النقطة O ثم معادلة لـ t_2 مماس المنحني C عند

نقطته A ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحني C بالنسبة لـ

t_1 وبالنسبة لـ t_2 .

3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحني C .

(II) تطبيق : نضع $D = 1,5\text{m}$. (D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة)

1. اشرح لماذا $x^2 + h^2 = \frac{9}{4}$.

2. أحسب xh^2 بدلالة x .

3. استعمل الجزء (I) لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء



التمرين (06)

نريد صنع علبة مصبرات اسطوانية الشكل (بغطاء)

ذات حجم V معطى

اوجد النسبة بين الارتفاع h ونصف القطر r حتى نستعمل

اقل ما يمكن من المعدن

(علبة اقتصادية الصنع)

problème de la boîte de conserve



المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

الهدية

4- النجاح هو ما تصنعه (فكر بالنجاح - أحب النجاح..)

النجاح شعور والنجاح يبدأ رحلته بحب النجاح والتفكير بالنجاح .. فكر وأحب وابدأ رحلتك نحو هدفك .. تذكر : " يبدأ النجاح من الحالة النفسية للفرد ، فعليك أن تؤمن بأنك ستنتج - بإذن الله - من أجل أن يكتب لك فعلاً النجاح . " الناجحون لا ينجحون وهم جالسون لاهون ينتظرون النجاح ولا يعتقدون أنه فرصة حظ وإنما يصنعونه بالعمل والجد والتفكير والحب واستغلال الفرص والاعتماد على ما ينجزونه بأيديهم .

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (03)

السنة الدراسية: 2009/2008

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

إعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور: الدوال الأسية والمعادلات التفاضلية

الدالة الأسية النيبيرية

التمرين (01) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} \quad (3) \quad , \quad e^{-5x} = \frac{1}{e} \quad (2) \quad , \quad e^{2x} = 1 \quad (1)$$

$$e^x + 3e^{-x} - 4 = 0 \quad /6 \quad , \quad e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \quad /5 \quad , \quad e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \quad (4)$$

$$e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3 = 0 \quad , \quad 6e^{-3x} + e^{-x} - 13e^{-2x} + 2 = 0 \quad (7)$$

التمرين (02) حل في \mathbb{R} المترجمات التالية:

$$e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} \quad (4) \quad , \quad e^{x+1} > e^{-\frac{2}{x}} \quad (3) \quad , \quad e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \quad (2) \quad , \quad e^{3x} \leq 1 \quad (1)$$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 < 0 \quad (6) \quad , \quad (e^x + 3)(2 - e^x) \geq 0 \quad (5)$$

التمرين (03) عيّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad /3 \quad , \quad f(x) = e^x(x^2 + x - 3) \quad /2 \quad , \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad /1$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x}} \quad /6 \quad , \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x} \quad /5 \quad , \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad /4$$

التمرين (04) تحقق من صحة المساواة المعطاة من اجل كل x في كل حالة من الحالات التالية:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad /2 \quad , \quad \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1} \quad /1$$

$$\frac{e^x}{e^x - x} = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \quad /4 \quad , \quad (e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} + 2 \quad /3$$

التمرين (05) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. بين أن الدالة f فردية.

2. بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$

التمرين (06) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \quad (4) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1) \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \quad (8) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-x} \quad (7) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{x-1} \quad (11) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)e^{-x+1} \quad (10) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{-x+1} \quad (9)$$

التمرين (07) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f واثبت ان المنحني C_f يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة.

2/ بين ان النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f وارسم المنحني C_f .

3/ لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$ (γ') تمثيلها البياني

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) باستخدام المنحني C_f ، ارسم المنحني (γ') .

جـ) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول

$$\text{الحقيقي } x : |e^x - 1| = 2e^x : (m - 3)$$

التمرين (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين .

3) اثبت أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

4) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين (09) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x^2 e^{-x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

(3) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(4) استنتج رسم المنحني (Γ) الممثل للدالة h حيث : $h(x) = x^2 e^{-|x|}$

التمرين (10) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

(2) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$

(2) احسب $f(-x) + f(x)$ من اجل كل قيم x من \mathbb{R} وماذا تستنتج بالنسبة للنقطة

$$A(0; 1 + \ln 4)$$

(3) ادرس تغيرات الدالة f

(4) تحقق انه من اجل كل قيم x من \mathbb{R} فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا.

(5) بيّن انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

(6) بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما ثم ارسم المنحني C_f .

التمرين (12) نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta e^{2x}}{e^{2x} - 1}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) بيّن أن النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر للمنحني C_f ثم ارسم المنحني C_f

(4) بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسين ميل كل منهما -6 عند نقطتين من C_f يطلب تعيين

هاتين النقطتين.

التمرين (13) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية و الفروع اللانهائية للمنحني الممثل لها ثم

ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$f(x) = (x+1)e^x \quad /3 \quad f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1} \quad /2 \quad f(x) = \frac{e^x}{x-1} \quad /1$$

$$f(x) = (1+x)e^{-x} \quad /6 \quad f(x) = 2e^{2x} - 4e^x \quad /5 \quad f(x) = 3 - x - \frac{1}{e^x - 2} \quad /4$$

$$f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x+1} \quad /9 \quad f(x) = 4xe^{-2x} \quad /8 \quad f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \quad /7$$

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} \quad /12 \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad /11 \quad f(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 4}{e^x - 1} \quad /10$$

التمرين (14) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 ادرس تغيرات الدالة f .
- 2 بين أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).
- 3 عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .
- 4 لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$

$$g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2} \quad : x \in \mathbb{R}$$

- أ) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$
- ب) شكل جدول تغيرات الدالة g . ج) استنتج إشارة g على \mathbb{R} .
- د) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T .
- 5) ارسم T و (C).

التمرين (15) f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) بين ان المستقيم (D) $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C)
- 2) ادرس قابلية اشتقاق f عند 0
- 3) ادرس تغيرات f
- 4) ارسم المنحني (C)

التمرين (16) 1/ بين أن الدالة : $e^x \rightarrow x$ هي مجموع دالة زوجية و دالة فردية

2/ نضع : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (دالة تجب الزائدية) ، المنحني الممثل لها (C)

3/ $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (دالة الجيب الزائدية) ، المنحني الممثل لها (C')

أ- ادرس شفعية ch و sh

ب- ادرس تغيرات كلا من ch و sh .

ج- ارسم في نفس المعلم المنحنيين (C) و (C')

3/ بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b يكون :

$$ch(a+b) = ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b) \quad ch^2(a) - sh^2(a) = 1$$

$$sh(a+b) = sh(a).ch(a) + sh(b).ch(b)$$

4/ استنتج : $ch(2a)$ و $sh(2a)$

التمرين (17) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حيث : a, b, c أعداد حقيقية. (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أحسب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a, b, c

2/ عين الأعداد الحقيقية a, b, c إذا علمت أن (C_f) يشمل النقطة $A(0, 1)$ ويقبل

مماسا يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 و $f'(0) = -6$

3/ فيما يلي نعتبر f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$

أ) احسب $f(0)$

ب) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ج) ارسم المنحني (C_f)

التمرين (18) : لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية. (C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) عين a, b, c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة O و الدالة المشتقة f' تتعدم من أجل $x = \ln \frac{3}{4}$

و المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$

أ) ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب) حدد نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل.

ج) عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

د) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) . هـ) ارسم (C) .

المعادلات التفاضلية

التمرين (19): عيّن الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

(أ) $y' = 2y$ ، (ب) $2y' - y = 0$ ، (ج) $y' + 3y = 2$ ، (د) $3y' - 2y + 1 = 0$

التمرين (20): عيّن الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة والمرفقة بشرط ابتدائي :

(أ) $2y' + y = 0$ و $f(\ln 4) = 1$ ، (ب) $y' - 3y = 0$ و $f(0) = 1$

(ج) $2y' + y = 1$ و $f(-1) = 2$

في الحالة الأخيرة (ج) . ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم في معلم متعامد ومتجانس تمثيلها البياني .

التمرين (21): نعتبر الدالة m المعرفة على $[0; +\infty[$ التي ترفق بالعدد t ، العدد $m(t)$ حيث

$m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي (ماء + ملح) عند اللحظة t بالدقائق نقبل

أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية : $5y' + y = 0$ (E) و أن الشرط الابتدائي

هو : $m(0) = 300$

1. حل المعادلة (E)

2. عيّن العدد t_0 بحيث يكون : $m(t_0) = 150$

3. نقبل انه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلا إذا كان $m(t) \leq 10^{-2}$

- ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح ؟

التمرين (22): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' - 2y = 2x + 1$

1. أوجد دالة f تآلفية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (1).

2. بوضع : $y = z + f$ ، بيّن أنه إذا كان y حل للمعادلة التفاضلية (1) فإن z حل للمعادلة

التفاضلية : (2) $z' - 2z = 0$...

3. حل عندئذ المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (1)

التمرين (23): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$

1. بوضع : $y = z - 3e^{-3x}$ ، أوجد المعادلة التفاضلية (2) التي تحققها الدالة z

2. حل المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج حل المعادلة التفاضلية (1)

3. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث : $f(0) = \frac{3}{2}$

4. تحقق أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$

5. ادرس تغيرات الدالة f

6. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

7. احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحني (C_f)

{ التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) - الجزء الثالث }

مسألة (01) (I) نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يأتي

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1 \quad \text{حيث : } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .
عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1; 1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجييه المماس عند A يساوي $(-e)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1 \quad (C_g) \quad \text{تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق}$$

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و فسّر هذه النتيجة بيانياً. (نذكر أن $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$)
(ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المنحني (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين احداثيها.

(د) اكتب معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I . (هـ) ارسم (C_g).

(III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يأتي : $k(x) = g(x^2)$
- باستعمال مشتقة دالة مركبة، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

مسألة (02) (I) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- (أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω و أكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ω

(ب) أثبت أن ω مركز تناظر للمنحني (C_f).

3- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$.

(ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما

4- (أ) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$

(ب) احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم (C_f) ومستقيمه المقاربين.

(II) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ (C_g) منحنى الدالة g

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(-x)$

- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_g)

2- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_g) (دون دراسة g)

مسألة (03) I - g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$g(x) = -1 - xe^x$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g . (2) استنتج إشارة $g(x)$

II - f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = -x + (1-x)e^x$ وليكن (γ) منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f وطبيعة الفروع اللانهائية للمنحني (γ)

(4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (γ) عند النقطة التي فاصلتها 0

(5) اثبت أن للمنحني (γ) نقطة انعطاف يطلب إيجاد إحداثياتها.

(6) بين أنه يوجد عدد حقيقي x_0 ينتمي إلى المجال $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$ حيث $f(x_0) = 0$

(7) ارسم (Δ) و (γ) .

مسألة (04) لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة:

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) وبين أنه يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب إعطاء معادلته.

(3) ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) و (Δ) .

(4) أ- x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .

عيّن x_0 حتى يكون (T) موازيا لـ (Δ) ، اكتب عندئذ معادلة لـ (T) .

ب- بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ج- ارسم (T) و (C) في نفس المعلم .

(5) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي

معادلته (T_m) الذي معادلته : $y = -x + m$

مسألة (05) ليكن $C(t)$ التركيز بـ (mg/l) لدواء في الدم بدلالة الزمن $(t > 0)$ حيث t

معبرا عنه بالساعات . سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة ، ثابت التخلص يساوي 0.25 ، التركيز الابتدائي هو $5mg/l$.

(1) برر المساواة : $C'(t) = -0.25C(t)$ ثم اوجد عبارة $C(t)$

(2) ادرس تغيرات C ثم ارسم بيان الدالة C

(3) أعط حصرا بتقريب 0.01 للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t) < 2$

مسألة (06) (I) دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = x + 1 + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. اثبت أن المنحني الممثل لها (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب إعطاء معادلته.
3. بيّن أن للمعادلة: $g(x) = 0$ حلا وحيدا α في المجال $]-1.3; -1.2[$
4. استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
5. أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة g .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

(γ) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) بيّن أن: $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ثم استنتج تغيرات f
 - 2) بيّن أن: $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصر الـ $f(\alpha)$
 - 3) عيّن معادلة المماس (D) للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم ادرس وضعية المنحني (γ) بالنسبة للمستقيم (D) .
 - 4) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$ مقارب مائل للمنحني (γ) في جوار $+\infty$
 - 5) ادرس وضعية المنحني (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- ارسم (Δ) و (D) و (γ)

مسألة (07) (I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = e^{-x} + x - 1$

- 1) ادرس تغيرات الدالة g .
- 2) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن: $e^{-x} + x \geq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(II) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f
- 1) بيّن أن: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$
- 2) بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.
- 3) ادرس تغيرات الدالة f
- 4) أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ) .
ج) أنشئ (Δ) و (C_f) .

مسألة (08) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

و (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ - تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ لكل x من \mathbb{R}

ب - استنتج أن f فردية

(2) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ - بين أن : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ لكل x من \mathbb{R}

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^+

ج - استنتج ان : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$ لكل x من \mathbb{R}

(4) بين ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right] = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

(5) أنشئ في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم الذي معادلته : $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

مسألة (09) (I) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$g(x) = 1 - xe^{1-x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = x + (x+1)e^{1-x}$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{1-x} = 0$

ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_f)

(4) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه 1. اكتب معادلة هذا المماس.

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left] -1; \frac{-1}{2} \right[$.

(6) ارسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(x+1)e^{1-x} = m$

مسألة (10) الجزء الأول : تحديد حل المعادلة التفاضلية : (1)..... $g' - 2g = xe^x$

1- حل المعادلة التفاضلية :

(2)..... $y' - 2y = 0$ حيث y دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

2- ليكن a و b عددين حقيقيين و μ الدالة المعرفة على \mathbb{R} :

$$\mu(x) = (ax + b)e^x$$

أ) حدد a و b حتى يكون μ حلا للمعادلة (1)

ب) برهن أن الدالة v تكون حلا للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $\mu + v$ حلا للمعادلة (1)

ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).

د) حدد الحل للمعادلة (1) والذي ينعدم عند القيمة 0.

الجزء الثاني : دراسة دالة مساعدة:

لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 2e^x - x - 2$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) حدد عدد حلول المعادلة : $g(x) = 0$. نسمي α الحل غير المعدوم تحقق أن :

$$-1.6 < \alpha < -1.5$$

(3) حدد إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x

الجزء الثالث : دراسة الدالة f : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

(1) حدد نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3) بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(4) ارسم المنحني البياني (γ) للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(خذ الوحدة : $2cm$)

مسألة (11) الجزء الأول لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (20x + 10)e^{\frac{1}{2}x}$$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) ادرس تغيرات f وشكل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0; +\infty[$. أعط قيمة

مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

(5) ارسم المنحني (C_f) .

الجزء الثاني : نضع $y(t)$ قيمة درجة حرارة تفاعل كيميائي ، مقدره بالدرجات سيلسيوس ، عند اللحظة t ، مقدره بالساعات. القيمة الابتدائية عند اللحظة $t = 0$ هي $y(0) = 10$.

نقبل بأن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي t من المجال $[0; +\infty[$ العدد $y(t)$ هي حل للمعادلة

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t} \dots\dots(1)$$

1) تحقق من ان الدالة f المدروسة في الجزء الأول حل للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$

2) نقترح فيما يلي : البرهان أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$ التي تأخذ القيمة 10 عند اللحظة 0.

أ) ليكن g حلا كفيها للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0; +\infty[$ بحيث : $g(0) = 10$.

$$y' + \frac{1}{2}y = 0 \dots\dots(2)$$

ب) حل المعادلة التفاضلية (2).
ج) ماذا تستنتج ؟

3) ما هو الوقت اللازم حتى تنزل درجة الحرارة إلى قيمتها الابتدائية ؟ تدور النتيجة إلى الدقيقة.

مسألة (12) الجزء الأول: نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x) = e^x - 3x - 1$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين : $M(\alpha; 0)$ و $O(0; 0)$ حيث : $\alpha \in \left] \frac{5}{4}; 2 \right[$

3- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) وحدد وضعيته بالنسبة للمنحني (C_f) .

4- بين أن (C_f) لا يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$ ، حدد طبيعة هذا الفرع اللانهائي ، ارسم (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $g(x) = e^x - \frac{3}{2}x^2 - x + 1$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- تأكد من أنه لكل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$

2- استنتج تغيرات الدالة g

3- باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة . برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال

$\left[-1; -\frac{3}{2} \right]$. ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_g)

4- بين ان المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثيها. أرسم (C_g)

مسألة (13) الجزء الأول : لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)
- 2- عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع المحورين الإحداثيين .
- 3- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي وحدد نقطة تقاطعهما A .
- 4- اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A
- 5- ارسم المماس والمنحني (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1- عين مجموعة تعريف الدالة g
- 2- بين أن : $g'(x) = e^x f'(e^x)$
- 3- استنتج تغيرات الدالة g .
- 4- بين أن النقطة $\omega \left(0; -\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_g) .
- 5- ارسم المنحني (C_g)

6- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(1-m)e^{2x} - 4e^x + 4 + m = 0$

مسألة (14) (I) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x + 1}$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 2/ برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D_1) في جوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .
- 3/ أثبت ان المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$
- 4/ برهن ان المنحني (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان (D_1) و (D_2)
- 5/ برهن ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-1 < \alpha < 0$
- 6/ لتكن النقطة ω تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الترتيب ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

7/ بين أنه توجد نقطة من (C_f) يكون عندها ميل المماس يساوي $\frac{5}{4}$

8/ أنشئ المستقيمين (D_1) و (D_2) و المنحني (C_f)

II-1/ انطلاقاً من المنحني (C_f) أشرح كيف نحصل على المنحنيين (C_g) و (C_h) حيث :

$$h(x) = f(x) + 1 \quad \text{و} \quad g(x) = f(|x|)$$

2/ ارسم عندئذ المنحنيين (C_h) و (C_g) .

مسألة (15)) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2- بين ان المستقيم (D) الذي معادلته : $y = 2x - 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

3- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و المستقيم (D) .

4- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$$

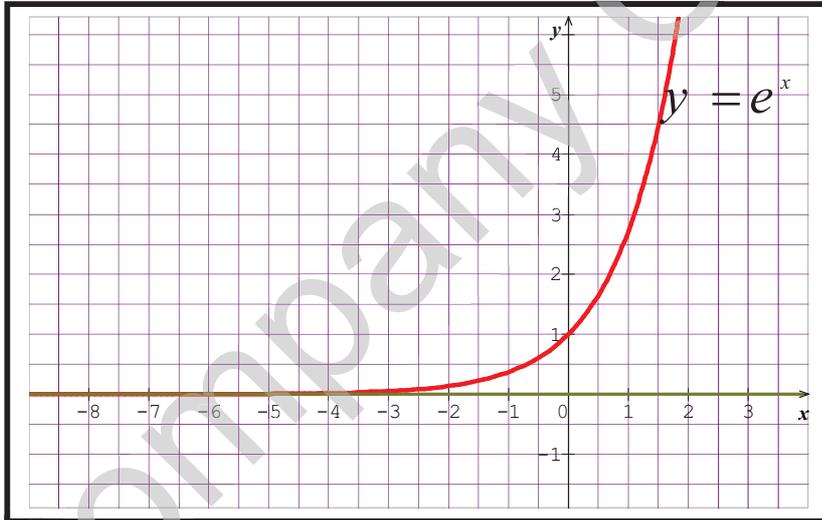
ب) أثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x و $x > 0$ أنه $f'(x) > 0$

5- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 وفسر النتيجة بيانياً.

6- شكل جدول تغيرات الدالة f .

7- ارسم المستقيم (D) و المنحني (C_f) .

8- عيّن النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم (D) .



الهدية

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

لبست المنى وخلعت الحذر

إذا ما طمحت إلى غاية

ولا كبة اللهب المستعر

ولم أتخوف و عور الشعاب

يعش أبد الدهر بين الحفر

ومن لا يجب صعود الجبال

يقول الإمام الشافعي رحمه الله :

سأتيك عنها مخبر إبيان

أخي لن تنال العلم إلا بسنة

وصحبة أستاذ وطول زمان

ذكاء وحرص وإصطبار وبلغة

المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية

الجزء الثاني : الدوال اللوغاريتمية

التمرين (01) عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = \ln(x+2)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3) \quad (1)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \quad (4)$$

$$f(x) = \ln|x+1| \quad (3)$$

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-1) \quad (6)$$

$$f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \quad (5)$$

$$f(x) = \ln(-2x+3) \quad (8)$$

$$f(x) = \ln|x+1| - \ln|x| \quad (7)$$

التمرين (02) عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = \ln(\ln(x)) \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x - 1} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{\ln(x)} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(x)-2} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{1+\ln(x)} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{1-(\ln x)^2} \quad (5)$$

التمرين (03) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$\ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\ln(2x) \quad (1)$$

$$\ln(4x-10) + \ln(2x-2)^2 - 2\ln(4x-4) = 0 \quad (2)$$

$$2(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 + 3(\ln x) = 0 \quad (3)$$

التمرين (04) حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية :

$$\ln(2x+3) < 4 \quad (3) \quad , \quad \ln 2x > -1 \quad (2) \quad , \quad \ln x < 1 \quad (1)$$

$$2\ln(x-1) + 3 \geq 0 \quad (6) \quad , \quad \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) \leq 0 \quad (5) \quad , \quad \ln(x-2)^2 \geq 0 \quad (4)$$

التمرين (05) بسط ما يلي :

$$C = \ln 2 + \ln(8e) - \ln(4e^2) \bullet \quad B = \ln(e\sqrt{e}) \bullet \quad A = \ln e^3 - \ln e^2 \bullet$$

$$D = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \ln^2\left(\frac{1}{e}\right) \bullet$$

التمرين (06) ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية :

$$\begin{aligned} & (\ln x - 1)\ln x \quad (3) \quad , \quad \ln^2 x - \ln x - 6 < 0 \quad (2) \quad , \quad 2\ln x - 1 \quad (1) \\ & 2x \ln(1-x) \quad (6) \quad , \quad 3 + 2\ln x \quad (5) \quad , \quad \frac{2 - \ln x}{1 + \ln x} \quad (4) \end{aligned}$$

التمرين (07) حل في \mathbb{R}^2 الجمل التالية :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \sqrt{3} - 2\ln 2 \\ 2(x + y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases} \quad (2) \quad , \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 15 \end{cases} \quad (4) \quad , \quad \begin{cases} x \cdot y = 4 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2 \end{cases} \quad (3)$$

التمرين (08) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln x} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} + 5\ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (9) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 2 - \ln(x+1)^2] \quad (8) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{x} \quad (7)$$

التمرين (09) احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - x^2)}{x} \quad (3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x \ln x} \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2\ln x}{x + \ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (6) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \quad (5) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

التمرين (10) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- أثبت أن الدالة f فردية .

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

(3) بيّن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

(4) ارسم المنحني C_f .

التمرين (12) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2$$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين .

(3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f

(4) ارسم المنحني C_f .

التمرين (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = \frac{1 + \ln(x^2)}{x}$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس شفعية الدالة f

(2) ادرس تغيرات الدالة f في المجال $]0; +\infty[$

(3) اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f .

(4) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع محاور الإحداثيات ثم ارسم المنحني C_f

التمرين (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

$$f(x) = x + 2 + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|$$

وليكن C_f منحنيا البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) اثبت أن المنحني الممثل C_f لها يقبل مستقيما مقاربا (Δ) مائلا يطلب إعطاء معادلته.

(3) عيّن النقطة ω تقاطع المنحني C_f مع المستقيم (Δ) و أثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f .

(4) احسب: $f(-3)$ و $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ و $f(-4)$ ثم ارسم المنحني C_f .

التمرين (15) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f و ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f

(2) بين أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

(3) ارسم المنحني C_f

التمرين (16) 1/ لتكن الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

(أ) ادرس تغيرات الدالة g

(ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x في المجال $]0; +\infty[$

2/ لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x}$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) أثبت أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

(ج) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(د) بين أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1 حيث :

$$\frac{1}{4} < x_0 < 1 \quad \text{و} \quad 3 < x_1 < 4 \quad \text{ثم ارسم المنحني } C_f$$

التمرين (17) لتكن الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $f(x) = 1 + (\ln x)^2$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f و حدّد طبيعة الفروع اللانهائية .

(2) أثبت أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف يطلب ω يطلب تعيينها.

(3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e$

(4) ارسم (Δ) و C_f .

التمرين (18) الدالة العددية : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f

(2) برهن أنه توجد نقطتا انعطاف للمنحني C_f يطلب تعيين إحداثيي كل منهما.

(3) جد معادلة كل من المماسين للمنحني C_f عند نقطتي الانعطاف

(4) أنشئ هذين المماسين ثم أنشئ المنحني C_f .

التمرين (19) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x - 2 + \ln(x - 1)$$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : $\frac{1}{2}cm$)

- 1/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f
- 2/ احسب $f(2)$ واستنتج إشارة $f(x)$
- 3/ جد معادلة للمماس (Δ) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 2
- 4/ احسب احداثي A نقطة تقاطع C_f مع المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.
- 5/ أنشئ (Δ) و C_f .
- 6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = 2x + m$

التمرين (20) -1 لتكن φ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$\varphi(x) = x^2 - 4x + 3 + 6\ln|x - 2|$$

أ- احسب $\varphi(1)$ و $\varphi(3)$

ب- ادرس تغيرات الدالة φ و استنتج إشارة $\varphi(x)$

2- لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 2 - \frac{5}{x-2} - \frac{6\ln|x-2|}{x-2}$

أ- بين أن : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

ليكن (Γ) المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ج- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ) .

د- احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(4)$ ، $f(-4)$ بالتقريب إلى $\frac{1}{10}$.

3- تحقق أن النقطة $\omega(2;4)$ مركز تناظر للمنحني (Γ) ثم ارسم المنحني (Γ) .

التمرين (21) f الدالة العددية : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - 2\ln x$

وليكن C_f منحنيتها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f .

2/ أنشئ المنحني C_f .

3/ استنتج إنشاء (Γ) المنحني الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|} - \ln x^2$

التمرين (22) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x + \ln|e^x - 2|$$

ولیکن C_f منحنیها البياني في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة f ، يمكن كتابة $f(x)$

$$\text{على الشكل : } f(x) = 2x + \ln|1 - 2e^{-x}|$$

3/ بيّن أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على التوالي :

$$y = 2x \quad , \quad y = x + \ln 2$$

4/ عيّن نقاط تقاطع C_f مع محور الفواصل.

5/ أنشئ المنحنى C_f .

التمرين (23) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية و الفروع اللانهائية للمنحنى الممثل لها ثم

ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \ln|x+1| \quad /3 \quad , \quad f(x) = \ln x + (\ln x)^2 \quad /2 \quad , \quad f(x) = \ln(x-2)^2 \quad /1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln|x| \quad /6 \quad , \quad f(x) = \frac{x+3+2\ln(x+1)}{x+1} \quad /5 \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x}(1+\ln x) \quad /4$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) \quad /8 \quad , \quad f(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{2} \ln|2x+3| \quad /7$$

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)} \quad /11 \quad , \quad f(x) = -2x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad /10 \quad , \quad f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad /9$$

$$f(x) = \ln\frac{1}{2}(e^x - 2)^2 \quad /13 \quad , \quad f(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)^2 \quad /12$$

التمرين (24) I- نعتبر العدد الطبيعي n حيث : $n = 2^{1234}$

(أ) عيّن بإستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

(ب) استنتج الحصر التالي : $10^{371} \leq n < 10^{372}$ ثم حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n

II- 1. ما قيمة pH محلول يحتوي على $5 \times 10^{-8} \text{ moles}$ من شوارد H^+ في اللتر الواحد ؟

2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل ($pH = 7$) ؟

III- حل في \mathbb{R} ما يلي : $\log(x) = 5$ ، $\log(x) = -3$ ، $\log(x) \geq 0.1$ ،

$$\log(x) < \log(1-x)$$

التمرين (25) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 \cdot e = u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$

- 1/ أثبت أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- 2/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . 3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)
- 4/ احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- 5/ ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln u_n$

التمرين (26) -1 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4 \quad \text{و} \quad \ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

- عيّن أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 . احسب u_n بدلالة n
- نسمي S_n المجموع : $u_0 + u_1 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- 2 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$
- بيّن أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
- نسمي T_n المجموع : $v_0 + v_1 + \dots + v_n$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين (27) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\begin{cases} u_3 - u_1 = 3 \ln 2 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 (\ln 2)^3 \end{cases}$$

- 1/ عيّن u_2 ثم u_1 و u_3 ثم الأساس r لهذه المتتالية .
- 2/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- 3/ عيّن n بحيث : $S_n = 31 \cdot \ln 2$

التمرين (28) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنيها البياني (C) انطلاقاً من التمثيل البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم أرسم (C) .

$$\text{(أ)} \quad f(x) = 1 + \ln x \quad \text{(ب)} \quad g(x) = -\ln x$$

$$\text{(جـ)} \quad h(x) = \ln(x + 2) \quad \text{(د)} \quad k(x) = 1 + \ln(x - 1)$$

2. نعتبر الدالتين ψ و φ المعرفتين على \mathbb{R}^* كما يلي : $\varphi(x) = \ln(|x|)$ و $\psi(x) = |\ln(|x|)|$

نرمز إلى منحنيهما البيانيين على التوالي بـ (C_φ) و (C_ψ) .

- بين أن المنحني (C_φ) متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب ثم أرسمه .
- أرسم المنحني (C_ψ) انطلاقاً من المنحني (C_φ) .

التدريب على حل مسائل (دراسة دوال والتوظيف) - الجزء الرابع

مسألة (01) 1. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$$

(أ) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

2. لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$$

C تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$.

(أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ليكن D المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

(د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

(هـ) أنشئ المستقيم D والمنحنى C الممثل للدالة f .

مسألة (02) المستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ متعامد و متجانس.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

ادرس تغيرات الدالة g . بين أن $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ موجب، استنتج إشارة $g(x)$.

2. لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

(أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، عين نهايتي f عند 0 و عند $+\infty$.

(ج) بين أن المستقيم d الذي معادلته $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .
عين النقطة التي يقطع عندها المستقيم d المنحنى (C_f) .
(د) أنشئ المنحنى (C_f) .

مسألة (03) الدالة العددية f معرفة على المجال I حيث $I =]-2; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ من أجل كل عدد من I .

ب) عين إشارة $f''(x)$ ثم استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال

$$[-0,6; -0,5]$$

بحيث $f'(\alpha) = 0$.

2. أدرس تغيرات الدالة f .

3. بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha + 2 - \alpha^2}{\alpha + 2}$ ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.

4. M_0 نقطة من (C) فاصلتها x_0 و (T_{x_0}) المماس للمنحنى (C) في M_0 .

أ) بين أن (T_{x_0}) يمر بالمبدأ O إذا فقط إذا كان $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.

ب) استنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمران بالمبدأ O . عين العددين a و b .

5. أرسم المماسين (T_a) و (T_b) ثم المنحنى (C).

مسألة (04) : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = 3 \ln x - (\ln x)^2$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C).

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3- احسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .

4- حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $3 - 2 \ln x = 0$ ثم المتراجحة $3 - 2 \ln x > 0$

مستنتجا إشارة $f'(x)$.

5- اكتب جدول تغيرات الدالة f .

6- حل في $]0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

أنشئ المنحنى (C).

مسألة (05) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x-1}{x+2} + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- بين أن (C) يقبل عند نقطتين منه A و B مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، عيّن عندئذ إحداثيات نقطتي التماس A و B .

3- بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $x_0 \in \left] \frac{13}{4}; \frac{7}{2} \right[$

4- احسب $f(2)$ ، $f(-5)$ ، $f(-3)$ ثم أنشئ (C)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول

الحقيقي x التالية : $(x+2)\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) - mx - 2m - 3 = 0$

مسألة (06) الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$

1- ادرس تغيرات الدالة g .
2- استنتج أنه لكل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $g(x) \geq \frac{1}{2}$.

الجزء الثاني : f الدالة العددية : $x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x}$

(δ) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أثبت أنه لكل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $f'(x) = \frac{1+g(x)}{x^2}$

(2) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (δ)

(3) ادرس وضعية المنحني (δ) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

(4) أثبت أن المنحني (δ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(5) (Δ) هو مماس للمنحني (δ) في النقطة ذات الفاصلة x_0 ، عيّن x_0 إذا كان ميل (Δ) هو $\frac{1}{2}$

ثم اكتب معادلة (Δ)

(6) أثبت أن المنحني (δ) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_1 حيث : $\frac{1}{2} < x_1 < 1$

(7) أنشئ (Δ) و (δ) (تؤخذ $2cm$ وحدة للطول)

(8) ناقش بيانيا وحسي قيم الوسيط m وجود وعدد حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

مسألة (07) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{3}{x} - x + 4 \ln x$

(δ) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (δ).
- 2) احسب : $f(5)$ و $f(9)$ و $f(10)$ وتحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 9 و 10
- 3) أثبت أن المنحني (δ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس في هذه النقطة
- 4) برهن على أنه يوجد مماسان للمنحني (δ) معامل توجيه كل منهما $\frac{1}{4}$
- 5) ارسم المنحني (δ)

6) نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{3-x^2}{|x|} + 2 \ln x^2$

- أ) أثبت أن الدالة g زوجية
- ب) ارسم المنحني (C_g) الممثل للدالة g انطلاقا من رسم المنحني (δ).

مسألة (08) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = (x+2) - 2 \ln|2x+1|$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- I -1 ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (C_f)
- 2 بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه (-3). اكتب معادلة لـ (Δ)
- 3 احسب إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$
- 4 احسب $f(-1)$ و $f(0)$. ارسم المماس (Δ) و المنحني (C_f).
- 5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m وجود وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{3}{2} + \left| x + \frac{1}{2} \right| - \ln(2x+1)^2$

1- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\left(\frac{-1}{2}\right)$ يكون لدينا :

$$g(-1-x) = g(x) \quad \text{و} \quad -1-x \neq -\frac{1}{2}$$

- 2 استنتج أن (Γ) المنحني الممثل للدالة g يقبل محور تناظر يطلب تعيين معادلته
- 3 أثبت أن $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.
- 4 استنتج إنشاء (Γ) انطلاقا من (C_f). ارسم (Γ) في نفس المعلم السابق

مسألة (09) I. f و g دالتان معرفتان على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{ و } f(x) = \ln(1+x) - x$$

1. ادرس تغيرات كل من f و g على $[0; +\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ و $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n . استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن l نهايتها.

ج- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n \leq w_n$ من أجل

كل عدد طبيعي n فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ "

د- بين إذن أن: $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$. استنتج حصر l .

مسألة (10) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

3) نعتبر الدالة φ المعرفة كما يلي: $\varphi(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

أ) ادرس تغيرات الدالة φ . ب) احسب $\varphi(1)$ ثم استنتج إشارة $\varphi(x)$

4) ادرس تغيرات الدالة f

5) ارسم المنحني (C_f)

مسألة (11) I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = xe^{-x}$

1- ادرس تغيرات الدالة g . -2 استنتج أنه لكل $x \in [0; +\infty[$ فإن $g(x) < 1$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$: $f(x) = e^{-x} + \ln x$

1- احسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2- احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم ادرس طبيعة هذا الفرع اللانهائي

3- بيّن أن : $f'(x) = \frac{1-g(x)}{x}$

4- شكل جدول تغيرات الدالة f

5- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0.5; 0.6[$

6- ارسم المنحني C الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

مسألة (12) m عدد حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m \ln x \quad , \quad C_m \text{ تمثيلها البياني}$$

1-أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$. (ب) حسب قيم الوسيط m ، احسب نهاية f_m عند 0

2- عيّن الدالة المشتقة للدالة f_m .

أعط حسب قيم m ، مختلف جداول التغيرات الممكنة

3- لتكن $M_0(x_0, y_0)$ نقطة من المستوي بحيث : $x_0 > 0$ و $x_0 \neq 1$

أ) برهن أنه يمر منحني وحيد C_m بالنقطة M_0 .

ب) بيّن أنه توجد نقطة وحيدة A تنتمي إلى كل المنحنيات C_m .

4- ارسم C_0 ، C_4 ، C_{-1} في نفس المعلم

مسألة (13) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب- عيّن الدالة المشتقة للدالة f .

ج- ادرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيرات f .

2. أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C) .

3. عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$

أ) بالحساب . (ب) باستعمال تغيرات الدالة f .

مسألة (14) f دالة عددية معرفة على $]-\infty; 3[$ كما يلي: $f(x) = -40 \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 10x$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة: 1cm).

الجزء الأول:

1. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً ظاهراً.
2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty; 3[$.
3. احسب $f(-1)$ و $f(3-3e)$. تعطى في كل حالة النتيجة المضبوطة ثم بتقريب $\frac{1}{10}$.
4. أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً، وحلاً وحيداً α في المجال $]-1; 3-3e[$ (لا يطلب حساب α).

ب) بين أن $\ln\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) = -\frac{\alpha}{4}$ (ج) اعط قيمة للعدد α بتقريب $\frac{1}{10}$.

الجزء الثاني: 1. أوجد $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

2. نعرف على $]-\infty; 3[$ الدالة g كما يلي: $g(x) = \frac{f(x)}{3-x}$

أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 10$ (ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

3. ارسم المماس T في النقطة التي فاصلتها 0 ثم المنحنى (C) (نأخذ $\alpha \approx -2,2$).

الهدية

اخترت لك:

إذا كنت في قومٍ فصاحب خيارهم *** ولا تصحب الأردى فتردى مع الردي
عن المرء لا تسلّ وسلّ عن قرينه *** فكلّ قرين بالمقارن يقتدي

أثبتت الأبحاث الحديثة أن درجة الحفظ تكون عالية في الأيام الأولى للتعلم وسرعان

ما تضعف إذا لم يتم تأكيدها بالمراجعة والتكرار.

– ثبت أن الحفظ على ظهر قلباي بدون فهم حقيقي يكون أكثر عرضة للنسيان في الحفظ للمادة المفهومة فلاشك أنه من السهل أن يحفظ الطالب جملة مفيدة مفهومة في لغته الأصلية بعكس الحال عندما يحاول تعلم جملة أخرى لا تزيد عنها في الكلمات والحروف ولكنها من لغة أجنبية مجهولة

– أيضاً ثبت أن لفهم القصيدة الشعرية دوراً كبيراً في تسهيل حفظها

– ومن المهم التمرين على التطبيق لما تم حفظه لتثبيتته فعلاً مثلاً يستطيع الطالب أن يحفظ معاني ألف كلمة إنجليزية لكن إذا لم يتمرن على استخدامها فعلياً فتقل درجة حفظه لهذه الكلمات تدريجاً

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (02)

السنة الدراسية: 2008/2007

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عماس

المحور: الجداء السلمي في الفضاء والمستقيمات والمستويات وتطبيقاته

التمارين من 1 إلى 3 مراجعات الهندسة المستوية

التمرين (01) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن النقط :

$$A(1;3), B(3;0) \text{ و } C(-5;-1)$$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم .
2. عيّن معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC. 3. عيّن معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

التمرين (02) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر النقطتين $A(1;2)$ و $B(0;5)$ والدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-3=0$

1. عيّن التمثيل الوسيط ومعادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $(-1;1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1)$.
2. حدد مركز ونصف قطر الدائرة (C) و تأكد أن $A \in (C)$.
3. أ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و $\vec{n}(3;4)$ شعاع ناظمي له.
ب) بيّن أن تقاطع (C) و (Δ) مجموعة خالية
4. تأكد أن (D) و (C) يتقاطعان وحدد تقاطعهما.
5. احسب المسافة بين مركز الدائرة (C) والمستقيم (D) بطريقتين.

التمرين (03) ABC مثلث قائم في A حيث $AB=3$ و $AC=4$

ليكن G مرجح $(A;1)$ ، $(B;-2)$ و $(C;3)$

(I) أ) أنشئ النقطة G واحسب : GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ ($k \in R$)

(II) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(A; \vec{i}; \vec{j})$ حيث : $\vec{i} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ و $\vec{j} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$

أ) عيّن إحداثيات النقطة G واحسب : GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ ($k \in R$)

Descartes dit dans sa géométrie(1637):la géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul.

التمرين (04) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء.

تعطى النقط : $A(1; 0; 2)$ ، $B(0; 2; 1)$ ، $C(2; 1; 0)$ ، $D(2; 4; 3)$

1. برهن أن الشعاع $\vec{V}(1; 1; 1)$ عمودي على المستوي (ABC) .
2. استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
3. تحقق أن الرباعي $ABCD$ هو رباعي وجوه.
4. احسب حجم المجسم الرباعي $ABCD$.

التمرين (05) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء محاوره (OX) ، (OY) ، (OZ)

نعتبر النقطة $A(1; -2; 4)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $2x - 3y + z + 2 = 0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستوي (P) .
2. عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (Δ) و (P) .
3. اكتب معادلة لسطح الكرة التي مركزها A والتي تمس المستوي (P) .
4. عيّن إحداثيات $C; D$ نقطتي تقاطع سطح الكرة والمستقيم (OZ)
5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين (06) : في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء . نعتبر المستوي (P) و سطح

الكرة (S) المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكرتيتين :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0 \quad , \quad (P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$$

1. حدد مركز و نصف قطر سطح الكرة (S) .
2. بيّن أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) .
3. حدد نقطة تماس المستوي (P) و سطح الكرة (S) .

التمرين (07) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء . نعتبر المستويين المعرفين

بالمعادلتين التاليتين : $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$ و $(P') : -x + y + z = 0$ و النقطة $A(0; 1; 1)$

1. بيّن أن المستويين متعامدان
2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')
3. عيّن بعد النقطة A عن المستوي (P) وعن (P')
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (d)

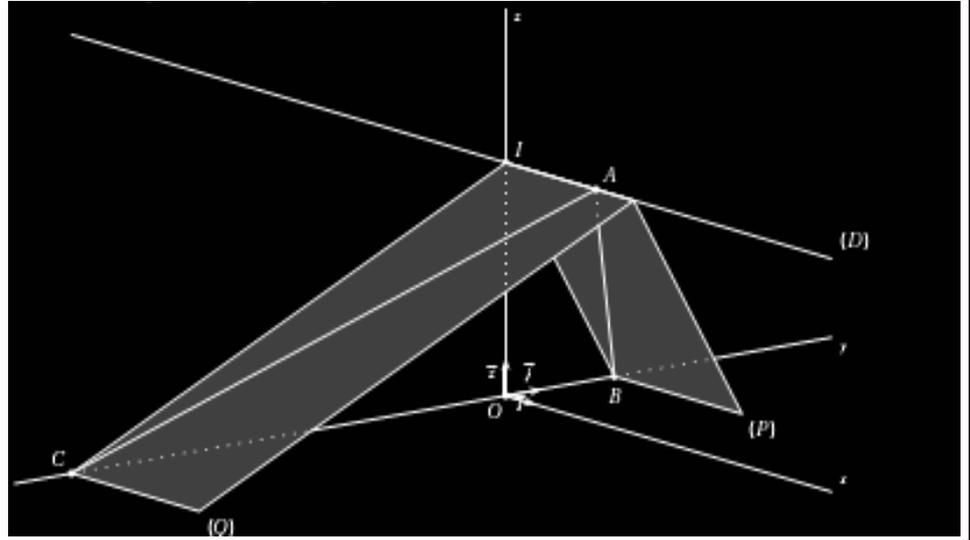
التمرين (08) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء . نعتبر النقطة $A(2; 0; 2)$

والمستوي (P) ذا المعادلة : $x + y - z - 3 = 0$

1. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على المستوي (P) .
2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوي (P) .
3. نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها 2 .
أ- حدد نصف قطر سطح الكرة (S)
ب- اكتب معادلة ديكرتية لسطح الكرة (S) .

- التمرين (09)** في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقطتين $A(3; 0; 6)$ و $I(0; 0; 6)$ وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و I نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): 2y + z - 6 = 0$ و $(Q): y - 2z + 12 = 0$
1. بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان
 2. بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)
 3. بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ، المحور $(O; \vec{j})$ في النقطتين B و C
 4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع \overrightarrow{AC} ناظمي له هي :

$$x + 4y + 2z - 12 = 0$$
 5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) . برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.
 6. ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.



- التمرين (10)** في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :
 $C(2; 1; -2)$ ، $B(1; -1; 1)$ ، $A(1; 2; -2)$

1. (أ) بيّن أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
 (ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
2. لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
 أ- بيّن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ثم حدد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و (S)
 ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوي (ABC) . بيّن أن : $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة :

$$2x + y - 2z + 4 = 0$$

و النقط : $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ ، $C(4; -2; 5)$

1. أ) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا . ب- بيّن أن هذا المستوي هو المستوي (P) .

2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم

ب) Δ مستقيم يشمل O ويعامد المستوي (P) ، أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ

ج- K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . احسب OK

د) احسب حجم الرباعي OABC

3. نعتبر الجملة المتقلة : $S = \{ (O;3), (A;1), (B;1), (C;1) \}$

أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحا

ب) نرمز بـ I إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

ج- عيّن المسافة بين G والمستوي (P)

4. أ) عيّن (E) مجموعة M من الفضاء التي تحقق : $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (P) و (E) .

التمرين (12) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$A(2; 1; 3)$ ، $B(-3; -1; 7)$ ، $C(3; 2; 4)$

1. أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

أ) بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC) .

أ) بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{ (A; -2), (B; -1), (C; 2) \}$

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \right) \left(\vec{MB} - \vec{MC} \right) = 0$$

وحدد العناصر المميزة

ج- عيّن طبيعة المجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

وحدد العناصر المميزة

د) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

هـ) هل النقطة $S(-8; 1; 3)$ تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

التمرين (13) الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1; -2; 1)$ و $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي له. والمستوي

(R) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $x + 2y - 7 = 0$.

أ- بيّن أن المستويين (P) و (R) متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1; 4; -1)$

وشعاع توجيه له $\vec{u}(2; -1; 1)$.

ج- لتكن النقطة $A(5; -2; -1)$. احسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A

عن المستوي (R) .

د- عيّن بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1 + 2t; 3 - t; t)$.

- عيّن بدلالة t الطول AM_t . ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$. ونعرف الدالة φ من R في R .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

ج- فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى .

التمرين (14) : الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

النقطة $A(1; -1; 3)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $x - y + 3z = 0$

1. أ) تحقق من أن : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} (t \in R)$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA) .

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) العمودي على المستقيم في النقطة A

ج) تحقق من أن (P) يوازي المستوي (Q) .

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماس للمستوي (Q) في A والتي يقطعها المستوي (P) وفق الدائرة Γ

التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

أ) بيّن أن $\Omega(a; b; c)$ مركز سطح الكرة (S) ينتمي إلى (OA) ثم استنتج أن : $b = -a$ و $c = 3a$

ب) بيّن أن : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ ثم استنتج أن : $a - b + 3c = -11$

ج) استنتج إحداثيات Ω مركز سطح الكرة (S) وبيّن أن نصف قطرها يساوي $2\sqrt{11}$.

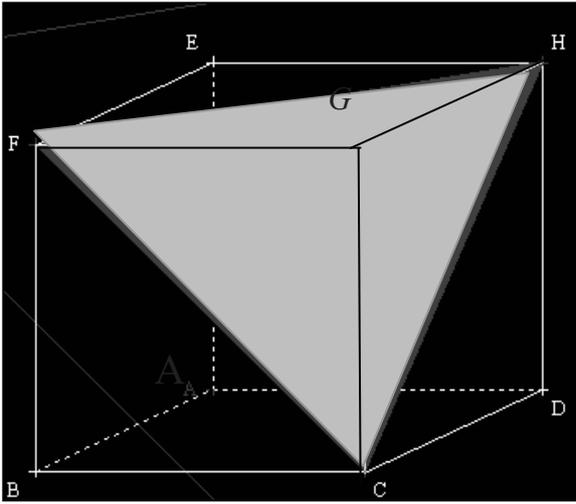
التمرين (15) نعتبر المكعب ABCDEFGH .

1. بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH) . (الشكل 1)

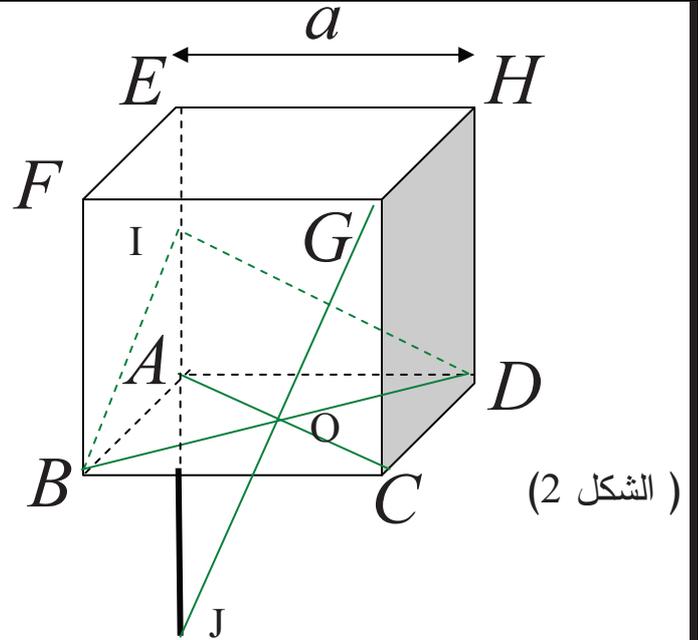
2. أحسب الجداء السلمي $\overline{AE} \cdot \overline{HC}$. (الشكل 2)

3. نعتبر النقطة I منتصف الحرف [AE] والنقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة [EJ]

- أثبت أن المستوي (BDI) هو مستوي محوري للقطعة [GJ] . (الشكل 2)



(الشكل 1)



(الشكل 2)

التمرين (16) : ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي

من المجال $[-1 ; 1]$. G_k مرجح الجملة $\{(A; k^2 + 1), (B; k); (C; -k)\}$.

(1) مثل النقط A, B, C و I منتصف $[BC]$ ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

(2) بين أنه من أجل كل k من المجال $[-1 ; 1]$ لدينا : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$

(b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1 ; 1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$

(c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يسمح المجال $[-1 ; 1]$

(3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

(5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، النقط A, B, C تأخذ الإحداثيات

$(0; 0; 2)$ ، $(-1; 2; 1)$ و $(-1; 2; 5)$ على الترتيب .

(a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان .

(b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

التمرين (17) نعتبر المكعب $OABCO'A'B'C'$ و لتكن J منتصف $[OA]$ و G مرجح الجملة $\{(O;1),(A;1),(C;3)\}$. حرف المكعب يؤخذ كوحدة .

(I) (1) تحقق أن الشعاعين \overline{CG} و \overline{CJ} مرتبطان خطيا ثم عين G على الشكل

(2) ما هي إحداثيات G في المعلم $(O; \overline{OA}; \overline{OC}; \overline{OO'})$ ؟

(II) (1) M نقطة كيفية من الفضاء ، عبّر عن $\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}$ بدلالة \overline{MG} .

(2) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$(\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}) \cdot \overline{MB} = 0$$

(III) (1) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$(\overline{MO} + \overline{MA} + 3\overline{MC}) \cdot (\overline{MO} + \overline{MA} - 3\overline{MC}) = 0$$

(2) تحقق أن الشعاعين \overline{BG} و \overline{CJ} متعامدان و استنتج أن B نقطة من (F) و B' هي أيضا نقطة

من (F)

(3) - أنشئ تقاطعات (F) مع أوجه المكعب .

- K و K' نقطتا تقاطع (F) مع المستقيمين (OC) و ($O'C'$) على الترتيب ، ما طبيعة

الرباعي $BKK'B'$ ؟

(VI) عين (H) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overline{AM} \cdot \overline{B'G} = 2$

(V) (1) باستعمال الإحداثيات في المعلم المذكور أعلاه ، أحسب GO^2 . GA^2 و GC^2 ثم العدد

$$GC^2 + GA^2 + GO^2$$

(2) M نقطة من الفضاء ، عبّر عن $MO^2 + MA^2 + 3MC^2$ بدلالة MG^2 (باستعمال الشعاع \overline{MG} وعلاقة شال).

(3) نسمي (L) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $MO^2 + MA^2 + 3MC^2 = 4$.

(a) بين أن O تنتمي لـ (L)

(b) تحقق أن M نقطة من (L) إذا وفقط إذا $MG^2 = k^2$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه .

(c) استنتج طبيعة (L) ثم أنشئ تقاطع (L) مع الوجه $OABC$ (أي أثر (L) على الوجه

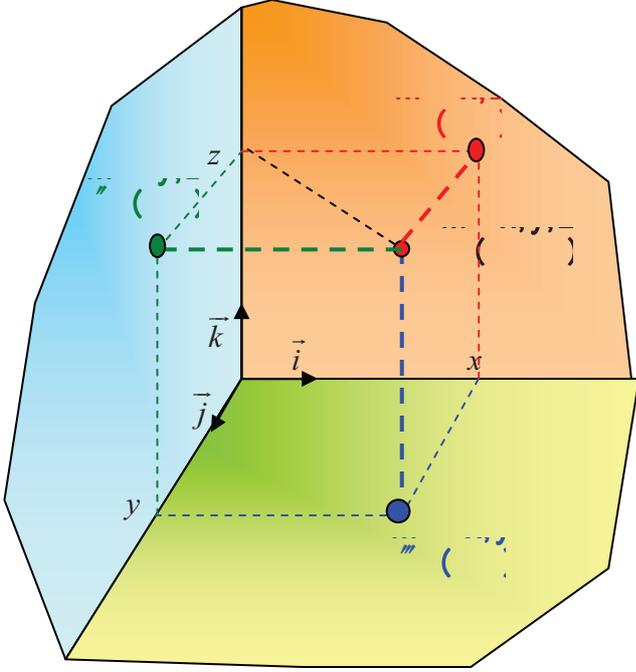
$OABC$ للمكعب).

التمرين (18) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(1; 2; 3)$ ، $B(3; 2; 1)$ و $C(1; 3; 3)$

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .

(2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث : $(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$ و $(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$



(a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان

و ليكن (Δ) تقاطعهما

(b) تحقق أن النقطة C تنتمي

إلى المستقيم (Δ)

(c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2; 0; -1)$

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

(d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

(2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$t \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

(a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان \vec{AM} و \vec{u} متعامدين

(b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

التمرين (19) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$$d_3: \begin{cases} x = -7 + 7t'' \\ y = -3t'' \\ z = 2t'' \end{cases} (t'' \in \mathbb{R}) , d_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 4 + 3t' \\ z = 5 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}) , d_1: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

التمرين (20) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(3; 0; 10)$ ، $B(0; 0; 15)$ و $C(0; 20; 0)$

(1) (a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

(b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة $(9; 0; 0)$

(c) علل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

(2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

(a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

- استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

(b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

(c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(d) بين أن الجملة :
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$
 تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

(e) أحسب البعد OH . استنتج أن $EH = 15$ و مساحة المثلث EBC .

(3) بحساب حجم رباعي الوجوه OEBC بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

- هل يمكن توقع هذه النتيجة من (c ، 2)

التمرين (21) ABC مثلث ، نضع $AB = c$ ، $BC = a$ ، $AC = b$ نعتبر A' مرجح

الجملة $\{(B;b);(C;c)\}$

(1) نعرف النقطة B' بـ : $\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB}$

بين أن B' مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

(2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;a);(C;c)\}$ ، بين أن $AB'A'C'$ معين .

(3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية

للمثلث ABC .

التمرين (22) : منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط التالية $A(4; 0; -3)$ ، $B(2; 2; 2)$ ، $C(3; -3; -1)$ و $D(0; 0; -3)$.

(1) عين معادلة ديكرتية لمستوي محور $[AB]$ (ليكن (P) هذا المستوي) .

(2) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين

$[BC]$ و $[DC]$ معرفان بالمعادلتين $2x-10y-6z-7=0$ و $3x-3y+2z-5=0$ على الترتيب .

(أ) بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

(ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

التمرين (23) نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكرتيتين كما يلي :

$$(R): 2x + y + 2z = 0 \quad , \quad (P): x + y = -1$$

(1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة $A(1; -2; 0)$ و موجه بالشعاع

$$\vec{u}(-2; 2; 1)$$

(2) بين أن المستقيم (D) و المستوي (P') الذي معادلته $4x + 4y + z + 3 = 0$ يتقاطعان

(3) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

التمرين (24) (مراجعة حساب المثلثات والهندسة المستوية)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. تعطى النقط :

$$C\left(\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right); \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) , \quad B\left(\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right); \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) , \quad A(\cos\theta; \sin\theta)$$

1. عين إحداثي النقطة G مرجح النقط $(A; -1)$ ، $(B; 2)$ و $(C; 2)$

2. عين النقطة H من المستوي بحيث : $2\vec{HB} + 2\vec{HC} - \vec{HA} = \frac{3}{2}\vec{AO}$

3. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $2MB^2 + 2MC^2 - MA^2 = 3$

(يمكنك إثبات أن O نقطة من المجموعة)

المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

الهدية

2- العطاء يساوي الأخذ:

النجاح عمل وجد وتضحية وصبر ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجدا حصد نجاحاً وثماراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقيق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد .. وكل من جد في أمر يحاوله واستعمل الصبر إلا فاز بالظفر .. يتبع

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (04)

السنة الدراسية: 2009/2008

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
خليلات عمار

و تقني رياضي

المحور: الجداء السلمي في الفضاء والمستقيمت والمستويات وتطبيقاته

التمارين من 1 إلى 3 مراجعات الهندسة المستوية

التمرين (01) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن النقط :

$$A(1;3), B(3;0), C(-5;-1)$$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم .
2. عيّن معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC. 3. عيّن معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

التمرين (02) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر النقطتين $A(1;2)$ و $B(0;5)$ والدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-3=0$

1. عيّن التمثيل الوسيط ومعادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $(-1;1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1)$.
2. حدد مركز ونصف قطر الدائرة (C) و تأكد أن $A \in (C)$.
3. أوجد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و $\vec{n}(3;4)$ شعاع ناظمي له. ب) بين أن تقاطع (C) و (Δ) مجموعة خالية
4. تأكد أن (D) و (C) يتقاطعان وحدد تقاطعهما.
5. احسب المسافة بين مركز الدائرة (C) والمستقيم (D) بطريقتين.

التمرين (03) ABC مثلث قائم في A حيث $AB=3$ و $AC=4$

ليكن G مرجح $(A;1)$ ، $(B;-2)$ و $(C;3)$

(I) أ) أنشئ النقطة G واحسب : GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ ($k \in R$)

(II) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(A; \vec{i}; \vec{j})$ حيث : $\vec{i} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ و $\vec{j} = \frac{1}{4} \vec{AC}$

أ) عيّن إحداثيات النقطة G واحسب : GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ ($k \in R$)

Descartes dit dans sa géométrie(1637):la géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul.

التمرين (04) ABCDEFGH مكعب ضلعه a . 1/ احسب الجداءات السلمية الآتية :

(أ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، (ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ، (ج) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$ ، (د) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{HF}$

2/ أثبت ان المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

3/ نعتبر المعلم $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$. (أ) عيّن إحداثيات النقط A ، G ، B ، E و D

(ب) اثبت مجددا أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

التمرين (05) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء.

نعتبر النقط: $A(-1; 1; 1)$ ، $B(0; 0; -1)$ و $C(3; -2; 1)$

(1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا

(2) عيّن شعاع ناظمي \vec{n} للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(3) أوجد معادلة لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AC]$

التمرين (06) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء محاوره (OX) ، (OY) ، (OZ)

نعتبر النقطة $A(1; -2; 4)$ و المستوي (P) الذي معادلته: $2x - 3y + z + 2 = 0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستوي (P) .

2. عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (Δ) و (P) .

3. اكتب معادلة لسطح الكرة التي مركزها A والتي تمس المستوي (P) .

4. عيّن إحداثيات $C; D$ نقطتي تقاطع سطح الكرة والمستقيم (OZ)

5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين (07) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء.

تعطى النقط: $A(1; 0; 2)$ ، $B(0; 2; 1)$ ، $C(2; 1; 0)$ ، $D(2; 4; 3)$

1. برهن أن الشعاع $\vec{V}(1; 1; 1)$ عمودي على المستوي (ABC) .

2. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3. تحقق أن الرباعي $ABCD$ هو رباعي وجوه. ثم احسب حجم الجسم الرباعي $ABCD$.

التمرين (08) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط: $A(2; 4; 1)$

$B(0; 4; -3)$ ، $C(3; 1; -3)$ ، $D(1; 0; -2)$ ، $E(3; 2; -1)$ ، $I\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right)$

بيّن - مع التعليل - صحة أو خطأ الجمل التالية: (1) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

(2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x + 2y - z - 11 = 0$

(3) النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

(4) المستقيم (CD) ممثل وسيطيا بالجملة: $(t \in \mathbb{R})$:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(5) النقطة I تنتمي للمستقيم (AB) .

التمرين (09) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستوي (P) و سطح

الكرة (S) المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكارتيين :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0 \quad , \quad (P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$$

1. حدد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S) .
2. بيّن أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) .
3. حدد نقطة تماس المستوي (P) و سطح الكرة (S) .

التمرين (10) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$$C(3; 0; -2) \quad , \quad B(0; 5; 2) \quad , \quad A(-1; 2; 1)$$

1. أ) بيّن أن النقط A, B, C تعيّن مستويا.
ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
2. نعتبر سطح الكرة (S) المعرفة بالمعادلة الديكارتية :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$$

أ) عيّن النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) ونصف قطرها r .
ب) تحقق من أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) .
3. أ) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوي (ABC) .
ب) استنتج إحداثيات ω نقطة تماس (S) و (ABC) .

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستويين المعرفين

بالمعادلتين التاليتين : $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$ و $(P') : -x + y + z = 0$ و النقطة $A(0; 1; 1)$

1. بيّن أن المستويين متعامدان
2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')
3. عيّن بعد النقطة A عن المستوي (P) و عن (P')
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (d)

التمرين (12) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط :

$$A(1; 2; -2) \quad , \quad B(0; 3; -3) \quad , \quad C(1; 1; -2) \quad \text{و المستوي } (P) \text{ الذي معادلته : } x + y - 3 = 0$$

- 1) أ- احسب مسافة النقطة $\Omega(0; 1; -1)$ عن المستوي (P) .
ب- استنتج أن معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(0; 1; -1)$ و المماسمة للمستوي (P) هي : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$
- 2) أ- بيّن أن النقط A, B, C تعيّن مستويا.
ب- عيّن شعاع ناظمي \vec{n} للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
- 3) أ- تحقق من أن سطح الكرة (S) مماسة للمستوي (ABC) .
ب- احسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) و المستوي (ABC) .

التمرين (13) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. نعتبر النقطة $A(2; 0; 2)$

والمستوي (P) ذا المعادلة : $x + y - z - 3 = 0$

1. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على المستوي (P).
2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (P).
3. نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2.

أ- حدد نصف قطر سطح الكرة (S)

ب- اكتب معادلة ديكرتية لسطح الكرة (S).

التمرين (14) الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

النقطة $A(1; -1; 3)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $x - y + 3z = 0$

1. أ) تحقق من أن : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA).

ب) حدد معادلة ديكرتية للمستوي (Q) العمودي على المستقيم في النقطة A
ج) تحقق من أن (P) يوازي المستوي (Q).

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماس للمستوي (Q) في A والتي يقطعها المستوي (P) وفق الدائرة Γ التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

- أ) بين أن $\Omega(a; b; c)$ مركز سطح الكرة (S) ينتمي إلى (OA) ثم استنتج أن : $b = -a$ و $c = 3a$
- ب) بين أن : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ ثم استنتج أن : $a - b + 3c = -11$
- ج) استنتج إحداثيات Ω مركز سطح الكرة (S) وبين أن نصف قطرها يساوي $2\sqrt{11}$.

التمرين (15) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$C(2; 1; -2)$ ، $B(1; -1; 1)$ ، $A(1; 2; -2)$

1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا ثم اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC).

2. لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

أ- بين أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ثم حدد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و (S)

ب- لتكن $M(a, b, c)$ نقطة من المستوي (ABC). بين أن : $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

التمرين (16) A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي

الساقين. (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق : $\|3\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2\|\vec{MB} + \vec{MC}\|$

تحقق أن (P) مستو عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعه معه.

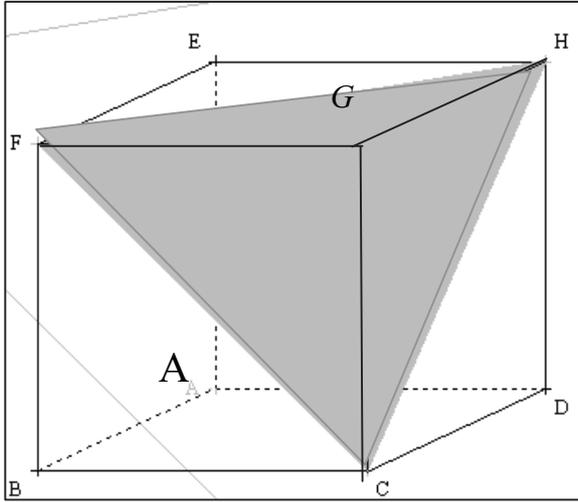
التمرين (17) نعتبر المكعب ABCDEFGH .

1. بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH). (الشكل 1)

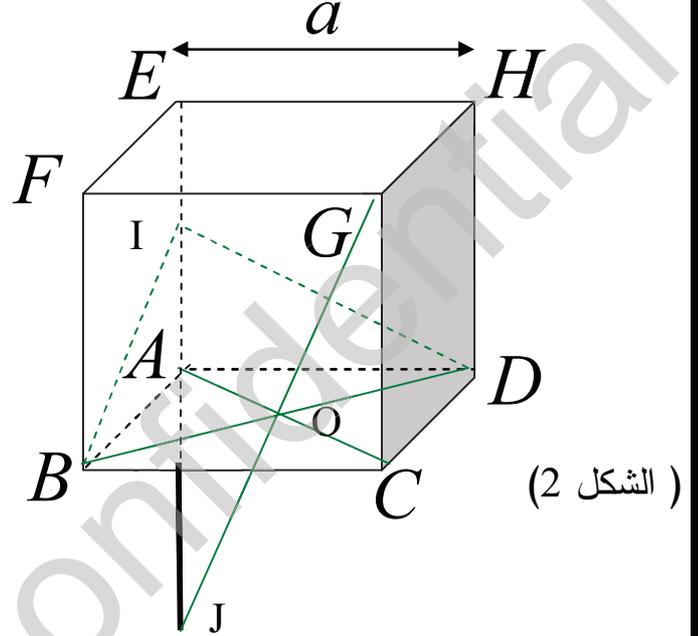
2. أحسب الجداء السلمي $\overline{AE} \cdot \overline{HC}$. (الشكل 2)

3. نعتبر النقطة I منتصف الحرف [AE] والنقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة [EJ]

- أثبت أن المستوي (BDI) هو مستوي محوري للقطعة [GJ]. (الشكل 2)



(الشكل 1)



(الشكل 2)

التمرين (18) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط

$$D(0; 4; -1), C(6; -2; -1), B(6; 1; 5), A(3; -2; 2)$$

بيّن - مع التعليل - صحة أو خطأ الجمل التالية :

(1) المثلث ABC قائم في A

(2) المستوي (P) ذو المعادلة $x + y + z - 3 = 0$ عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A

(3) معادلة المستوي (P') العمودي على (AC) والذي يشمل النقطة A هي $x + z - 5 = 0$

(4) المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

(5) الشعاع $\vec{u}(1; -2; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (P').

(6) حجم رباعي الوجوه ABCD هو 81 وحدة حجم . (7) قياس الزاوية \widehat{BDC} هو $\frac{3\pi}{4}$ راديان

(8) مساحة المثلث BDC هي 21 وحدة مساحة . (9) بعد A عن المستوي (BDC) يساوي 3

التمرين (19) ABCD رباعي وجوه منتظم ، بين أن (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي

تحقق: $(\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}) = 0$ هي مستو مواز للمستقيمين (AB) و

(CD) و يمر من مركز ثقل الرباعي ABCD

- عين تقاطعات (P) مع وجوه الرباعي (أثر (P)).

التمرين (20) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

- نعتبر النقط التالية $A(4; 0; -3)$ ، $B(2; 2; 2)$ ، $C(3; -3; -1)$ و $D(0; 0; -3)$.
- عين معادلة ديكرتية لمستوي محور $[AB]$ (ليكن (P) هذا المستوي) .
 - نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين $[BC]$ و $[DC]$ معرفان بالمعادلتين $2x-10y-6z-7=0$ و $3x-3y+2z-5=0$ على الترتيب .
- (أ) بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .
- (ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها

التمرين (21) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$$d_3: \begin{cases} x = -7 + 7t'' \\ y = -3t'' \\ z = 2t'' \end{cases} (t \in \mathbb{R}) , d_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 4 + 3t' \\ z = 5 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}) , d_1: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

التمرين (22) نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكرتيتين كما يلي :

$$(R): 2x + y + 2z = 0 , (P): x + y = -1$$

- تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة $A(1; -2; 0)$ و موجه بالشعاع $\vec{u}(-2; 2; 1)$
- بين أن المستقيم (D) و المستوي (P') الذي معادلته $4x + 4y + z + 3 = 0$ يتقاطعان
- استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

التمرين (23) نعتبر في الفضاء (E) المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط :

$$A(0; -1; 2) , B(1; 1; 2) , C(2; -1; 0) \text{ و المستوي } (P): -2x + y + 2z + 2 = 0$$

$$\text{و سطح الكرة } (S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

- أوجد المعادلة الديكرتية للمستوي (ABC) .
- حدد النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) و نصف قطرها R
- برهن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) في نقطة E ينبغي تحديد إحداثياتها.
- بين أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (C) محددًا إحداثيات مركزها H و نصف قطرها r

التمرين (24) مثلث ABC ، نضع $AB = c$ ، $BC = a$ ، $AC = b$ ، نعتبر A' مرجح

$$\{(B;b);(C;c)\} \text{ الجملة}$$

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} : \text{ نعرف النقطة } B' \text{ بـ}$$

بين أن مرجح B' من النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

(2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;b);(C;c)\}$ ، بين أن $AB'A'C'$ معين .

(3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC .

التمرين (25) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر النقط التالية : $A(1; 2; 3)$ ، $B(3; 2; 1)$ ، و $C(1; 3; 3)$

(1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا ، أكتب معادلة ديكرتية له .

(2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث : $(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$

$$\text{و } (P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

(a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و ليكن (Δ) تقاطعهما

(b) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

(c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه

للمستقيم (Δ)

(d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

(2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

الممثلة وسيطيا بالجملة

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases} \text{ مع } t \in R$$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

(a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان \vec{AM} و \vec{u} متعامدين

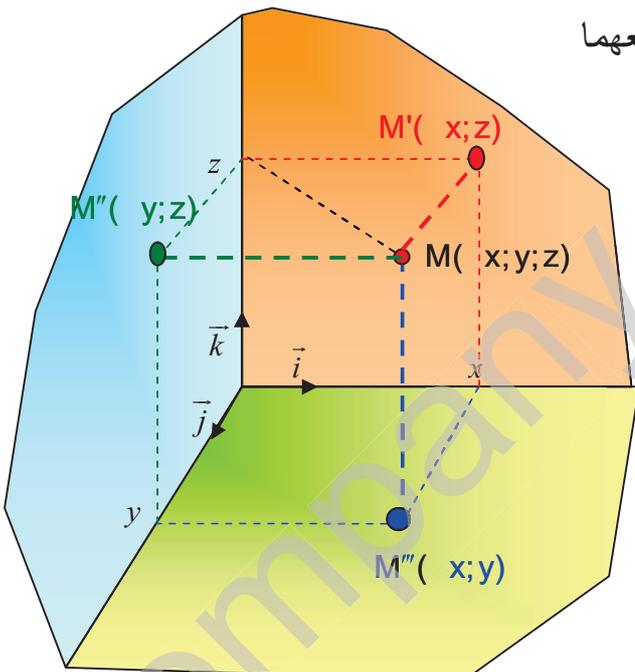
(b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

(3) (أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(2t + 1; 3; -t + 3)$.

- عين بدلالة t الطول AM_t . ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$. ونعرف الدالة φ من R في R .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

(ج) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى .



{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي

معادلته: $x + 2y - z + 7 = 0$ والنقط $A(2; 0; 1)$ ، $B(3; 2; 0)$ ، و $C(-1; -2; 2)$

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي هي: $y + 2z - 2 = 0$

2- أ- تحقق ان المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

3- لتكن G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; \alpha), (C; \beta)\}$ حيث α و β عدنان حقيقيان يحققان $1 + \alpha + \beta \neq 0$ ، عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

التمرين (02) لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا

اختيارك . نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط :

$A(1; 3; -1)$ ، $B(4; 1; 0)$ ، $C(-2; 0; -2)$ ، $D(3; 2; 1)$

و المستوي (P) الذي معادلته: $x - 3z - 4 = 0$.

1) المستوي (P) هو : ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n}_1(1; 2; 1)$ ، ج2) $\vec{n}_2(-2; 0; 6)$ ، ج3) $\vec{n}_3(2; 0; -1)$

المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين (03) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

لتكن النقط $A(0; 2; 1)$ ، $B(-1; 1; -3)$ ، $C(1; 0; -1)$

1. اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A

2. ليكن المستقيم (D) المعروف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$ حيث λ عدد حقيقي .

أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (D)

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (D)

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) و سطح الكرة S

التمرين (04) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ المستقيمين

(Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\text{على الترتيب} \quad \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

1- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ')

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

أ) احسب الطول MN .

3- عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4- احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ؟

التمرين (05) نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$A(1; 2; 2)$ ، $B(3; 2; 1)$ ، $C(1; 3; 3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A ، B و C تعين مستوي يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{و} \quad (P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بين أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

3/ بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

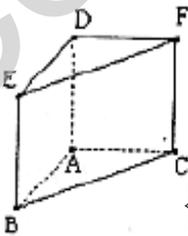
4/ بين أن الشعاع $\vec{u}(2; 0; -1)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم (Δ) .

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases} \quad \text{5/ استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم } (\Delta) \text{ هو الجملة : } (k \in \mathbb{R})$$

التمرين (06) $ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين

وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث

$(r \in \mathbb{R}_+^*)$. (انظر الشكل)



1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$.

بين أن G مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1), (C; 1), (D; 2), (E; 1), (F; 1)\}$

هو منتصف $[IJ]$.

(2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

- عيّن إحداثيات النقط F, E, D, C, B, A

- عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 = 10r^2$$

التمرين (07) نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، النقطتين

$A(0; -1; 1)$ و $B(1; -1; 0)$ و سطح الكرة (S) التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

(1) بيّن أن مركز سطح الكرة (S) هي النقطة $\Omega(1; 0; 2)$ ونصف قطرها هو $\sqrt{3}$

(2) تحقق من أن A تنتمي إلى (S)

(3) تحقق أن النقط A, B, O ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية

$$x + y + z = 0$$
 هي للمستوي (OAB)

(4) بيّن أن المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A .

التمرين (08) (أسئلة متعددة الاختيارات)

في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. عيّن، في كل حالة مما يلي، النتيجة أو النتائج الصحيحة مع التبرير.

1/ المستقيم الذي يشمل $A(1; 2; -4)$ و $B(-3; 4; 1)$ و المستقيم الذي تمثيله الوسيط معرف بـ:

$$\begin{cases} x = -11 - 4t \\ y = 8 + 2t \\ z = 11 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

متقاطعان متوازيان تماما متطابقان ليسا من مستوي واحد

2/ ليكن المستوي (P) المعرف بالمعادلة $2x + 3y - z + 4 = 0$ و المستقيم (d) المعرف بـ:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(P) و (d) متقاطعان (P) و (d) متوازيان تماما

(d) محتواه في (P) لا احد من هذه الإمكانيات صحيحة

3/ المسافة بين النقطة $A(1; 2; -4)$ و المستوي المعرف بالمعادلة $2x + 3y - z + 4 = 0$:

$$\frac{8\sqrt{14}}{7} \quad \square \quad 8\sqrt{14} \quad \square \quad 16 \quad \square \quad \frac{8}{7} \quad \square$$

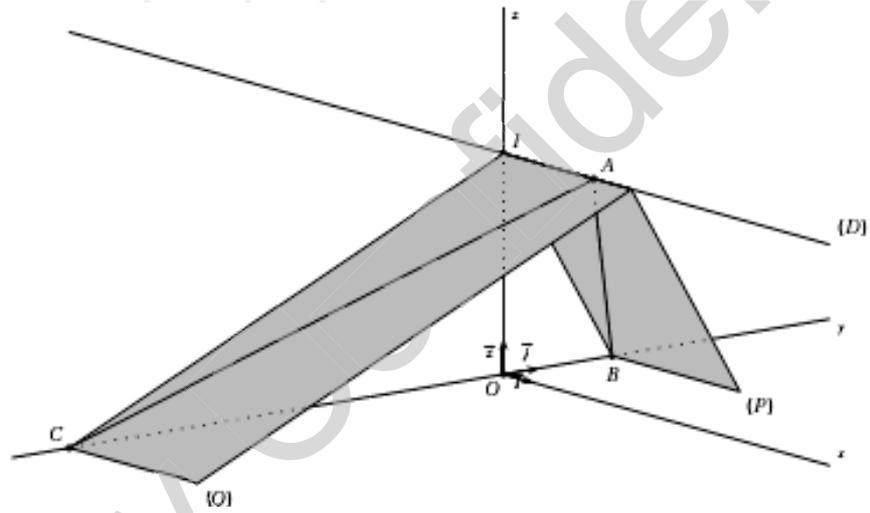
4/ لتكن النقطة $B(-3; 4; 1)$ و سطح الكرة (S) المعرف بالمعادلة $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

B داخل (S) B خارج (S) B نقطة من (S) لا نعرف

التمرين (09) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقطتين $A(3; 0; 6)$ و $I(0; 0; 6)$ وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و I نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): 2y + z - 6 = 0$ و $(Q): y - 2z + 12 = 0$

1. بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان
2. بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)
3. بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ، المحور $(O; \vec{j})$ في النقطتين B و C
4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع \overrightarrow{AC} ناظمي له هي :

$$x + 4y + 2z - 12 = 0$$
5. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (OA) . برهن أن المستقيم (OA) و المستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.
6. ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.



التمرين (10) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة :

$$2x + y - 2z + 4 = 0 \quad \text{و النقط: } A(3; 2; 6), B(1; 2; 4), C(4; -2; 5)$$

1. أ) بيّن أن النقط A, B, C تعين مستويًا . ب- بيّن أن هذا المستوي هو المستوي (P) .
2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم
- ب) Δ مستقيم يشمل O ويعامد المستوي (P) ، أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ
- ج) K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . احسب OK
- د) احسب حجم الرباعي $OABC$
3. نعتبر الجملة المثقلة : $S = \{ (O;3), (A;1), (B;1), (C;1) \}$
- أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحاً
- ب) نرمز بـ I إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .
- ج) عيّن المسافة بين G و المستوي (P)

$$4. \text{ أ) عيّن } (E) \text{ مجموعة } M \text{ من الفضاء التي تحقق : } \|\overrightarrow{3MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (E) و (P) .

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$$C(3; 2; 4) , B(-3; -1; 7) , A(2; 1; 3)$$

1. أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

$$2. \text{ ليكن } (d) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى : } \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in R)$$

أ) بين أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC) .

أ) بين أن النقطة H مرجح الجملة $\{ (A; -2), (B; -1), (C; 2) \}$

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \right) \left(\vec{MB} - \vec{MC} \right) = 0$$

وحدد العناصر المميزة

ج) عين طبيعة المجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

وحدد العناصر المميزة

د) عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

هـ) هل النقطة $S(-8; 1; 3)$ تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

التمرين (12) الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1; -2; 1)$ و $\vec{n}(-2; 1; 5)$ شعاع ناظمي له. والمستوي

(R) المعرف بالمعادلة الديكرتية : $x + 2y - 7 = 0$.

أ- بين أن المستويين (P) و (R) متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1; 4; -1)$

وشعاع توجيه له $\vec{u}(2; -1; 1)$.

ج- لتكن النقطة $A(5; -2; -1)$. احسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A

عن المستوي (R) .

د) عين بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1 + 2t; 3 - t; t)$.

- عين بدلالة t الطول AM_t . ونرمز لهذا الطول بـ $\varphi(t)$. ونعرف الدالة φ من R في R .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

ج) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى .

التمرين (13) : A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي

من المجال $[-1 ; 1]$. G_k مرجح الجملة $\{(A; k^2 + 1), (B; k), (C; -k)\}$.

(1) مثل النقط A ، B ، C و I منتصف [BC] ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

(2) بين أنه من أجل كل k من المجال $[-1 ; 1]$ لدينا : $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$

(b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1 ; 1]$ كما يلي : $f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$

(c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يسمح المجال $[-1 ; 1]$

(3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

(4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

(5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، النقط A ، B ، C تأخذ الإحداثيات $(0; 0; 2)$ ، $(-1; 2; 1)$ و $(-1; 2; 5)$ على الترتيب .

(a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان .

(b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

التمرين (14) (أسئلة متعددة الاختيارات) : كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد

صحيح ، عيّن مبررا إجابتك . الفضاء منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

(1) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ بحيث : هي $\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$

ج1: مجموعة خالية ، ج2: مستقيم ، ج3: مستوي ، ج4: نقطة

(2) المستقيمان الممثلان وسيطيا كما يلي : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ و $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

ج1: متوازيان تماما ، ج2: متطابقان ، ج3: متقاطعان ، ج4: ليسا من مستوي واحد

(3) المسافة بين النقط $A(1; -2; 1)$ والمستوي الذي معادلته : $-x + 3y - z + 5 = 0$ هي :

ج1: $\frac{3}{11}$ ، ج2: $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ، ج3: $\frac{1}{2}$ ، ج4: $\frac{8}{\sqrt{11}}$

(4) إحداثيات H المسقط العمودي للنقط $B(1; 6; 0)$ على المستوي الذي معادلته :

$-x + 3y - z + 5 = 0$ هي :

ج1: $(3; 1; 5)$ ، ج2: $(2; 3; 1)$ ، ج3: $(3; 0; 2)$ ، ج4: $(-2; 3; -6)$

التمرين (15) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط:

$$A(2;1;-1), B(-1;2;4), C(0;-2;3), D(1;1;-2)$$

$$x - 2y + z + 1 = 0$$

- في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبررا ذلك .

(1) النقط A, B, C تعين مستوي ، (2) المستقيم (AC) محتوي في المستوي (P)

$$(3) \text{ معادلة ديكارتية للمستوي } (ABD) \text{ هي } x + 8y - z - 11 = 0$$

$$(4) \text{ المستقيم } (AC) \text{ له تمثيل وسيطي الجملة التالية: } \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

(5) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ، (6) بعد النقطة C عن المستوي (P) يساوي $4\sqrt{6}$

$$(7) \text{ سطح الكرة التي مركزها } D \text{ ونصف قطرها } \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ مماسة للمستوي } (P)$$

$$(8) \text{ النقطة } E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right) \text{ المسقط العمودي للنقطة } C \text{ على المستوي } (P)$$

التمرين (16) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ،

$$B(1;2;1) \text{ و } C(3;-1;2)$$

1- تحقق أن النقط A, B, C ليست على استقامة ثم بين أن المعادلة الديكارتية

$$2x + y - z - 3 = 0$$
 هي للمستوي (ABC)

2- نعتبر المستويين (P) و (R) المعرفين على الترتيب بالمعادلتين :

$$x + 2y - z - 4 = 0 \text{ و } 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

$$- \text{ بين أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم } (\mathcal{D}) \text{ تمثيله الوسيطي هو: } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

3- ادرس تقاطع المستويات (P) ، (R) و (ABC)

4- عيّن بعد النقطة A عن المستقيم (\mathcal{D}) .

التمرين (17) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط:

$$A(1;2;3), B(0;1;4), C(-1;-3;2), D(4;-2;5) \text{ و الشعاع } \vec{n}(2;-1;1)$$

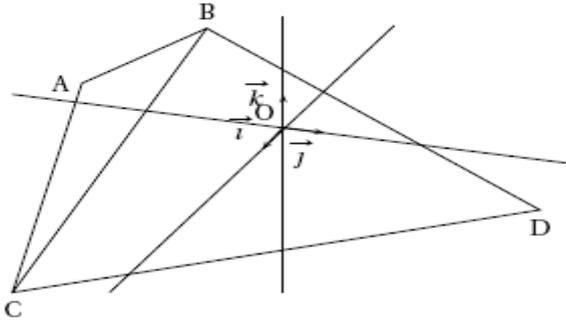
1. (أ) أثبت أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.

(ب) بين أن \vec{n} شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

(ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$2. (\Delta) \text{ مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي: } \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- برهن أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) و أن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC) .
3. لتكن النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
- برهن أن النقطة E مركز ثقل المثلث ABC .



التمرين (18) الفضاء منسوب الى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(3; -2; 2)$ ،

$C(6; -2; -1)$ ، $B(6; 1; 5)$

(I) 1) بين أن المثلث ABC قائم .

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته :

$$x + y + z - 3 = 0$$

عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A .

- أكتب معادلة ديكارتيّة لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

(II) 1) لتكن D النقطة ذات الإحداثيات $(0; 4; -1)$ ، بين أن المستقيم (AD)

عمودي على المستوي (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABDC$

3) بين أن قياس الزاوية \widehat{BDA} هو $\frac{\pi}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

التمرين (19) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط:

$A(0; 0; 2)$ ، $B(0; 4; 0)$ ، $C(2; 0; 0)$ و نسمي I منتصف القطعة $[BC]$ و G مركز المسافات

المتساوية للنقط A ، B و C و النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

- في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة أم خاطئة مبرهنا عن اختيارك .

1°) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0$ هي المستوي (AIO) .

2°) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$ هي سطح الكرة التي

قطرها $[BC]$.

3°) حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي 4 وحدة حجوم .

4°) $2x + y + 2z = 4$ معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC) وإحداثيات النقطة H هي $(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9})$

$$5°) \text{ المستقيم } (AG) \text{ يقبل التمثيل الوسيطى: } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

التمرين (20) $ABCD$ رباعي وجوه بحيث المثلثات ABC ، ABD و ACD قائمة في A

و متساوية الساقين بحيث: $AB = AC = AD = a$. نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD .

(1) برهن أن المستقيم (AA_1) يعامد المستوي (BCD) . (يمكنك حساب $\overline{AA_1} \cdot \overline{BC}$ و $\overline{AA_1} \cdot \overline{CD}$)

(2) عبر بطريقتين مختلفتين عن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ ، احسب طول القطعة $[AA_1]$.

(3) نسمي النقطة G مركز المسافات المتساوية لرباعي الوجوه $ABCD$ و I منتصف $[BC]$.

(أ) برهن أن النقطة G تنتمي للقطعة $[AA_1]$ و احسب طول AG .

(ب) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون:

$$\|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}\| = 2\|\overline{MB} + \overline{MC}\|$$

(4) النقطة H نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة G

(أ) برهن أن: $4\overline{GA} + \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{BA}$.

(ب) برهن المساواة: $HC^2 - HD^2 = \overline{DC} \cdot \overline{BA}$. ثم استنتج أن $HC = HD$

التمرين (21) نعتبر رباعي الوجوه $OABC$ حيث OAB ، OAC و OBC مثلثات قائمة في O و

$OC = OB = OA = 1$ ، $[CI]$ ارتفاع في المثلث ABC ، $[OH]$ ارتفاع في المثلث OIC .

1- ما طبيعة المثلث ABC ؟ احسب طول AB .

2- أثبت أن المستقيمان (OH) و (AB) متعامدان و أن H ملتقى الارتفاعات في المثلث ABC .

3- أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OI و CI (الوحدة هي طول OC)، عيّن H .

4. (أ) عيّن طول OH في المثلث OCI .

(ب) احسب V حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم S مساحة ABC .

(ج) أوجد علاقة بين V ، S و OH ثم تحقق من النتيجة 4-أ).

5. نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overline{OD} = \overline{HO}$ ثم ننسب الفضاء إلى المعلم $(O; \overline{OA}; \overline{OB}; \overline{OC})$

(أ) بين أن إحداثيات النقطة H هي $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. (ب) بين أن رباعي الوجوه $ABCD$ منتظم.

(ج) لتكن Ω مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي $ABCD$

بين أن Ω نقطة من المستقيم (OH) و احسب إحداثياتها.

الهدية

بطاقة تعزية ورتاء لحال الأمة

الى كل الشهداء الذين ضمخوا بدمائهم أرض الإسراء والمعراج أقول لهم ما قاله رب العزة (سلام عليكم بما صبرتم فنعم عقبى الدار) صدق الله العظيم، والخاسرون الحقيقيون هم الذين تقاعسوا وقعدوا عن نصره إخوانهم في فلسطين الجريحة وبغداد الأسيرة، (ولا تحسبن الله غافلاً عما يعمل الظالمون) صدق الله العظيم.

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (05)

السنة الدراسية: 2008/2007

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور: الأعداد المركبة

تمرين مدخل للأعداد المركبة : مثال بومبيلي (Bombelli) .

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : (1) $x^3 = 15x + 4$

(1) أثبت أن $\alpha + \beta$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا: (2) $\alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha\beta - 5)(\alpha + \beta) - 4 = 0$

(2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3 + \beta^3 = 4$ ؟
ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة؟

(3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x - \alpha^3)(x - \beta^3) = x^2 - 4x + 125$.

(4) نعتبر المعادلة $x^2 - 4x + 125 = 0$. . . (3) تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حولا حقيقية .

(5) نتخيل عدد نرمل له "i" حيث $i^2 = -1$

أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .

أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1). ثم عين حلول المعادلة (1).

الجزء الأول : العمليات على الشكل الجبري

التمرين (01) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$z_4 = (3-2i)^3 , z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 , z_2 = (4+2i)(4-2i) , z_1 = (2+i)^2$$

$$z_9 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} , z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} , z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} , z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} , z_5 = \left(\frac{-1-i}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

التمرين (02) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

$$\frac{z+1}{z-1} = 2i / 3 , (3-4i)z^2 = iz / 2 , 3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i / 1$$

التمرين (03) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلات ذات المجهول z التالية :

$$(1+i)z - (2-i)\bar{z} + 3 + 4i = 0 / 2 , z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0 / 1$$

$$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0 / 4 , \frac{\bar{z}-1}{z+1} = i / 3$$

التمرين (04) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

$$\text{نضع } L = \frac{z+1}{z-1} \text{ و } M' \text{ صورة العدد المركب } L .$$

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ - يكون L عددا حقيقيا .

ب - يكون L عددا تخيليا صرفا .

ج - تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

التمرين (05) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

$z = x + iy$ عدد مركب حيث $z \neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

$$\text{نعتبر العدد المركب } L \text{ حيث } L = \frac{z-2+i}{z+2i}$$

(1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا .

(4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (06) 1/ حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 2i\bar{z} = 0$ (1)

2/ نسمي O ، A ، B ، C صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$. أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين (07) 1/ حل في \mathbb{C}^2 الجملة التالية:

$$\begin{cases} iz_1 + (1-i)z_2 = -4-3i \\ (1+i)z_1 + 2iz_2 = 13+9i \end{cases}$$

نسمي A و B صور الحلول z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم

متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$. ونسمي C صورة العدد z حل المعادلة التالية: $(3-i)\bar{z} + 5-i = 6+2i$

2/ عين طبيعة المثلث ABC . 3/ عين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين (08) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، Z و $1+z^2$.

- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون A ، M و M' على استقامة واحدة

التمرين (09) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L = (z-2i)(\bar{z}-1)$

عين مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي

ب) L تخيلي صرف

التمرين (10) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}; \bar{v})$.

$L = (1-z).(1-iz)$ نضع M : عدد مركب صورته z عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : (أ) L حقيقي ، (ب) L تخيلي صرف

التمرين (11) حل في \mathbb{C}^2 الجمل ذات المجهول $(z; z')$ التالية :

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3\bar{z} + i\bar{z}' = 1 \end{cases} /2 \quad , \quad \begin{cases} iz_1 + (2+i)z_2 = 4+i \\ z_1 - (3-2i)z_2 = -3+8i \end{cases} /1$$

الجزء الثاني: العمليات على الشكل المثلثي و الأسي

التمرين (12) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$$z_5 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad , \quad z_4 = 1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_3 = -\sqrt{3} - i \quad , \quad z_2 = 3 - 3i \quad , \quad z_1 = 1 + i$$
$$z_{10} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} \quad , \quad z_9 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \quad , \quad z_8 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} \quad , \quad z_7 = -2+2i \quad , \quad z_6 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$$

التمرين (13) ليكن العدد المركب $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$: حيث

(1) احسب طولية العدد المركب Z و عمدة له .

(2) اكتب Z على الشكل الجبري .

(3) استنتج $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$

(4) بين ان $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

التمرين (14) Z ، v و u أعداد مركبة حيث:

$$z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) \quad , \quad u = 3 + i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad v = \frac{z}{u}$$

(1) اكتب v على الشكل الجبري .

(2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و Z .

(3) استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

(4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

التمرين (15) في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

أ - $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب - $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ج - $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6}\right)$. د - $z = \sin\frac{\pi}{6} - i \cos\frac{\pi}{6}$.

التمرين (16) I z_1 و z_2 عدنان مركبان حيث : $|z_1| = |z_2| = 1$

- برهن ان العدد $\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)$ حقيقي

II z_1 و z_2 عدنان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة .

- أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$ تخيليا صرف

التمرين (17) A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

. $z_3 = -1 - i$ و $z_2 = 2i$ ، $z_1 = 1$

(1) أحسب $|z_3 - z_1|$ و $|z_2 - z_1|$

(2) أحسب $\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$. (3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين (18) 1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2/ أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

. $z_4 = -1$ ؛ $z_3 = \frac{5}{4}i$ ؛ $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ ؛ $z_1 = 2 - 2i$

3/ أعط شكلا أسّيًا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i \sin\frac{\pi}{7}\right)$ ؛ $z_3 = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_1 = (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}}$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a = 1$ ، $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $c = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

(1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

(2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

التمرين (20) احسب :

$$z_3 = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2(1-i)} \right)^{1990}, \quad z_2 = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}, \quad z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$$

التمرين (21) عيّن الطويلة وعمدة لكل عدد مركب مما يلي :

$$(1) \quad z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{و} \quad \alpha \in [0; 2\pi[\quad \text{و} \quad z_2 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{و} \quad \alpha \in [0; 2\pi[$$

$$(3) \quad z_3 = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \quad \text{و} \quad \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{و} \quad z_4 = \frac{1}{1-i \tan \theta} \quad \text{و} \quad \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

التمرين (22) نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1 = -\sqrt{3} + i$ و $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

(1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

$$(2) \quad \text{استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب } L \text{ حيث : } L = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

(3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

$$(4) \quad \text{استنتج قيمتي : } \cos \frac{13\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{13\pi}{12}$$

التمرين (23) لتكن A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$$a = -1 + i, \quad b = -1 - i, \quad c = 2i, \quad d = 2 - 2i$$

$$(1) \quad \text{احسب الطويلة وعمدة كل من العددين المركبين : } \frac{c-a}{d-a} \text{ و } \frac{c-b}{d-b}$$

(2) استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

(3) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

$$(24) \quad (1) \quad \text{برهن أن : } \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin \frac{\pi}{10}}$$

$$(2) \quad \text{أحسب المجموع } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$(3) \quad \text{عين قيمة لكل من المجموعين } S \text{ و } T \text{ حيث } S = \sum_{k=0}^4 \cos \frac{k\pi}{5} \text{ و } T = \sum_{k=0}^4 \sin \frac{k\pi}{5}$$

$$(25) \quad (1) \quad \text{بيّن أن : } e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$$

$$(2) \quad \text{استنتج أن : } \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

الجزء الثالث: المعادلات من الدرجة الثانية

التمرين (26): عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة التالية :

$$1+4\sqrt{5}i , -4 , 2i , -3-4i , -15+8i , 8-6i$$

التمرين (27): حل في المجموعة \mathbb{C} كلا من المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} z^2 - 2(2-i)z + 6 = 0 \quad /2 & , & z^2 + (7-4i)z + 9 - 15i = 0 \quad /1 \\ z^2 + (\sqrt{3}-7i)z - 4(3+i\sqrt{3}) = 0 \quad /4 & , & z^2 + 2z + 10 = 0 \quad /3 \\ iz^2 - 2iz + i + 2 = 0 \quad /6 & , & z^2 + 4 = 0 \quad /5 \\ z^2 + 8i = 0 \quad /8 & , & \alpha z^2 + (1-i\alpha^2)z - \alpha i = 0 \quad /7 \\ 2z^2 + 8z \sin \theta + 5 - 3 \cos(2\theta) = 0 \quad /9 & \end{aligned}$$

التمرين (28) (1): أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8+6i$:

(2) يعطى كثير الحدود للمتغير المركب z :

$$Q(z) = z^3 + (5i - 6)z^2 + (9 - 24i)z + 18 + 13i$$

أ- احسب $Q(-i)$

ب- حل عندئذ في \mathbb{C} المعادلة $Q(z) = 0$

(3) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

لتكن A, B, C و صور حلول المعادلة $Q(z) = 0$. ما نوع المثلث ABC

التمرين (29) (1): اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$\frac{(1-3i)z + 3 + i}{z - i} = z$$

(3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طولية .

أ - أحسب العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ وأكتبه على الشكل الجبري .

ب - ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا ؟

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$.

. عدد مركب حيث $z = x + iy$ و $z \neq 2i$ ، x ، y عدنان حقيقيان .

$$L = \frac{z + 8 + 4i}{z - 2i} . \text{ حيث } L \text{ نعتبر العدد المركب}$$

(1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا .

(4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (02) ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعروف كما يلي :

$$.P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (5+4i)z - 5i$$

(1) تحقق من أن $P(2+i) = 0$ ؛ جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغير المركب z حتى يكون من أجل كل

$$.P(z) = (z - 2 - i).Q(z)$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z .: $P(z) = 0$

(3) لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$ في المستوي المركب حيث A صورة

الحل $(2+i)$.

- جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD .

التمرين (03) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$.z^3 - (6+i)z^2 + (13+i)z - 10 + 2i = 0$$

(1) أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

(2) حل في المجموعة \mathbb{C} ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيلي سالب و z_2 الحل

الثالث .

(3) في المستوي المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

— جد إحداثيات النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

— عين المجموعة E_M للنقط M من المستوي حيث :

$$. -2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9$$

التمرين (04) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي :

$$P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (4+i)z + 2i - 4$$

(1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغير المركب Z بحيث يكون من أجل كل

$$عدد مركب z : $P(z) = (z-2) \cdot Q(z)$$$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z) = 0$.

(3) في المستوي المركب لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z) = 0$.

- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

التمرين (05) (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، كلا من المعادلتين :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad ; \quad z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$$

(2) في المستوي المزود بالمعلم $(O; \bar{u}; \bar{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة

$$1+2i \quad , \quad 1+\sqrt{3}+i \quad , \quad 1-2i \quad \text{و} \quad 1+\sqrt{3}-i \quad \text{على الترتيب .}$$

أ - ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب - أكتب معادلة للدائرة C المحيطة بالمثلث ABC .

ج - أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة C .

د - أنشئ C والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

التمرين (06) من أجل كل عدد مركب $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ بحيث :

$$L(z) = \frac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2}$$

(1) جد الأعداد المركبة z بحيث : $L(z) = z$. ثم أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي .

(2) في المستوي المركب لتكن النقطة M التي إحداثياتها $(x; y)$ ولاحقتها z .

- أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

- عين مجموعة النقط M التي للاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا

التمرين (07) (1) عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب طويلته r وعمده θ .

- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - \alpha z + \alpha^2 = 0 \quad (\text{نرمز لحلي هذه المعادلة بـ } z_1 \text{ و } z_2)$$

ب- عبر بدلالة r و θ على طويلتي z_1 و z_2 وعمدتيهما

$$L = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})i \quad \text{حيث : } L$$

أ- احسب L^2 و اكتبه على شكله المثلثي . ب- استنتج الطويلة وعمدة للعدد L

ج- استنتج قيمتي : $\cos \frac{19\pi}{12}$ و $\sin \frac{19\pi}{12}$

التمرين (08) 1- أ- احسب $(\sqrt{3} + 3i)^2$ ، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة:

$$2z^2 + (3\sqrt{3} + i)z + 4 = 0$$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة المعطاة حيث: $|z_1| < |z_2|$

ب- اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسّي .

2- في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر العدد المركب $L = -2(\sin \theta + i \cos \theta)$

حيث θ عدد حقيقي ، ولتكن النقط A ، B و M صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، L على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L بدلالة θ

ب- نضع: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ - اثبت أن المثلث ABM قائم .

التمرين (09) 1 حل في \mathbb{C}^2 الجملة التالية :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 - 4i \\ z_1 \times z_2 = 13 - 18i \\ |z_1| < |z_2| \end{cases}$$

2) في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A ، B و C صور الأعداد المركبة: $-i$ ، z_1 ، z_2 على الترتيب . ما نوع المثلث ABC

3) عيّن معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC .

4) عيّن معادلة المماس (Δ) للدائرة (Γ) في النقطة C .

التمرين (10) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة: $z^3 - (1+i\sqrt{2})z^2 + (1+i\sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$

1- أ) بيّن ان هذه المعادلة تقبل حلا تخيليا z_0 يطلب تعيينه

ب) احسب الحلين الآخرين z_1 و z_2 حيث: z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

2- في المستوي المزود بالمعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن A ، B و C صور الأعداد المركبة:

z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب .

أ) عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $(1+\sqrt{6})$

و $(1-\sqrt{6})$ على الترتيب .

ب) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين (11) 1/ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب: $-8 + 8\sqrt{3}i$

2/ عين كل الأعداد المركبة L بحيث: $L^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

3/ حل عندئذ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:

$$(z + i)^4 - 8(-1 + i\sqrt{3}) = 0$$

التمرين (12) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^2 - [\sqrt{3} + 1 + 2i]z + (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

(1) أ) احسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ ثم حل في \mathbb{C} المعادلة (1)

نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة بحيث : $|z_1| > |z_2|$

ب) اكتب كلا من العددين z_1 و z_2 على الشكل المثلي ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد

المركب $z_1 \times z_2$.

(2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_1 \times z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

(3) نضع : $a = \frac{z_1}{2}$ و $b = \frac{z_2}{\sqrt{2}}$ و $L = \frac{a+b}{1+ab}$

أ) تحقق ان $|a| = |b| = 1$.

ب) احسب مرافق L بدلالة a و b واستنتج أن L حقيقي .

التمرين (13) نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

1. أ - احسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$

ب - برهن أنه توجد أعداد حقيقية a ، b ، و c بحيث من أجل كل عدد مركب z

$$P(z) = (z^2 + 3)(az^2 + bz + c)$$

2. حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z ، $P(z) = 0$.

. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

أ - مثلّ النقط A ، B ، C ، و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A = i\sqrt{3}$ ، $z_B = -i\sqrt{3}$

$$z_D = \overline{z_C} \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$$

ب - أثبت أن النقط A ، B ، C ، و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث BEC .

التمرين (14) α عدد مركب غير معدوم . 1. أنشر العبارة $[1 - i(1 + \alpha)]^2$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2 + [-1 + i(1 - \alpha)]z + i\alpha + \alpha = 0$$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن α

3. نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .

أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_2 و z على الترتيب ، ولتكن E_p مجموعة النقط M من

$$\text{المستوي التي يكون من أجلها : } (z - z_2)(\overline{z - z_2}) = 2.$$

تحقق أن مبدأ المعلم O ينتمي إلى E_p ثم عيّن E_p

التمرين (15) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i = 0 \dots\dots (1)$$

1. بيّن أن المعادلة (1) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2. حل عندئذ المعادلة (1). نسمي z_1 و z_2 الحلين الآخرين حيث الجزء التخيلي للعدد z_1 سالب

1. نضع : $\omega = \frac{z_1}{z_2}$ (أ). عيّن الشكل المثلثي للعدد ω .

(ب) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. بكل عدد مركب

z غير معدوم نرفق النقط M ، M_1 ، M_2 التي لواحقها على الترتيب : z ، ωz ، $\omega^2 z$.
- برهن أن الرباعي OMM_1M_2 معيّن .

التمرين (16) /1 حل في \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$z^2 - (1+i)z - 4i = 0$$

$$/2$$
 نعتبر المعادلة : $z^4 - (1+i)z^3 + (9-4i)z^2 - 9(1+i)z - 36i = 0$

(أ) بيّن ان لهذه المعادلة حلين تخيليين صرفيين متعاكسين z_3 ، z_4 ، يطلب تعيينهما .

(ب) استنتج مجموعة حلول هذه المعادلة .

/3 المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. M نقطة من المستوي لاحقتها z

- اوجد مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $\arg\left(\frac{z - z_3 - z_4}{z - z_1 - z_2}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$

التمرين (17) $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ عدد مركب حيث :

(1) احسب α^2 و α^4 ثم اكتب α^4 على شكله المثلثي .

(2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد α . ثم احسب كلا من العددين : $\cos \frac{13\pi}{8}$ و $\sin \frac{13\pi}{8}$

(3) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. M نقطة لاحقتها z عين مجموعة

النقط M بحيث : $|\alpha z| = 8$

التمرين (18) 1/ حل في \mathbb{C} المعادلة : (1)..... $(iz - 1)[z^2 - (1 + 4i)z - (5 + i)] = 0$

نرمز بـ z_0, z_1, z_2 إلى حلول المعادلة (1) حيث : $|z_0| < |z_1| < |z_2|$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C التي لواحقها z_0, z_1, z_2 على الترتيب .

أ) أوجد احداثيي النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1), (B;2), (C;1)\}$

ب) عيّن مجموعة النقط M ذات اللواحق z بحيث :

$$|z - z_0|^2 + 2|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 34$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$f(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين يطلب تعيينهما.

2) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $f(z) = 0$.

نسمي A, B, C صور الأعداد : $-7 + 5i, -7 - 5i, i\sqrt{2}$ و على الترتيب .

3) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1 + i$. عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

4) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1 + 11i$. نضع $\omega = \frac{(z_A - z_D)}{(z_F - z_B)}$.

أ) أكتب ω على الشكل الجبري .

ب) أكتب ω على الشكل الأسّي .

5) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

التمرين (20) 1/ احسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-2 - 2\sqrt{3}i$

2/ حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية :

$$z^2 - 2z + 3 + 2\sqrt{3}i = 0$$

(نسمي حلي هذه المعادلة z_0 و z_1 حيث : $|z_0| < |z_1|$)

3/ φ عدد حقيقي ، z عدد مركب حيث : $z = 1 + 2\cos\varphi + 2i\sin\varphi$

M_0, M_1, M نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لواحقها

على الترتيب z_0, z_1, z .

أ) ما هي قيم φ حتى تكون M عنصرا من $\{M_0, M_1\}$

ب) إذا كانت M تختلف عن M_0 و M_1 برهن أن المثلث M_0MM_1 قائم في M

ج) عين قيم φ حتى يكون $M_0M = \frac{1}{2}M_0M_1$. أنشئ M عندئذ .

التمرين (21) : نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $z^2 + 2z + 1 + i = 0$

نرمز بـ z_1 و z_2 للحلين بحيث: $\text{Im}(z_1) > 0$

/1 حدد z_1 و z_2

/2 المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي

لواحقها على التوالي: -1 و $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و z_1 و z_2 .

(أ) اكتب العدد المركب $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ على الشكل المثلثي.

(ب) تحقق من أن: $\overline{AM_1} = \overline{OB}$ وان A منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثم انشئ النقط: A و B و M_1 و M_2 .

(ج) استنتج أن $AOBM_1$ معين ثم أن $\arg(z_1) \equiv \frac{7\pi}{8} [2\pi]$.

التمرين (22) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

. $z = x + iy$ عدد مركب و x, y عدنان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $f(z) = \frac{2z - i}{z + 1 - i}$.

(1) أكتب العدد المركب $f(z)$ على الشكل الجبري .

(2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقيا .

(3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ تخيليا صرفا.

(4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $|f(z)| = \sqrt{3}$

(5) حل في \mathbb{C} المعادلة: $f(z) = z$

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

لبست المنى وخلعت الحذر

إذا ما طمحت إلى غاية

ولا كبة اللهب المستعر

ولم أتخوف و عور الشعاب

يعش ابد الدهر بين الحفر

ومن لا يجب صعود الجبال

الهدية

الصبر هو زاد العظماء والجد والكفاح شعارهم وأترككم لبيت يوجهه الشافعي لمن يعيش يحلم دون أن يعمل لما يحلم به شيئا:

و أبيت سهران الدجى وتبته نوما وتبغي بعد ذاك لحاقي

وقد قالوا: إن العلم عزيز؛ إذا أعطيته كلك أعطاك بعضه. أقول فكيف إذا أعطيته بعضك، بل

توافه وقتك، فما عساک أن تنال منه .

POINT DE VUE HISTORIQUE

***Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif.** Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de calcul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux "**NOMBRES**

IMPOSSIBLES". En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine $x=4$ de l'équation $x^3-15x+4=0$ peut s'écrire

$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".

***Extrait de l'encyclopédie Universalis.**

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (07)

السنة الدراسية 2009/2008

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

اعداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

- المحور : الاستدلال بالتراجع والمتتاليات العددية

الاستدلال بالتراجع

التمرين (01) برهن بالتراجع أن :

- (1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.
- (2) لكل عدد طبيعي n ، العدد $3n^3 + 6n$ مضاعف للعدد 9 - استنتج أن مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة يقبل القسمة على 9.
- (3) لكل عدد طبيعي n ، العدد $2^{6n+5} + 4 \times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 13.
- (4) لكل عدد طبيعي n ، العدد $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ يقبل القسمة على 111

التمرين (02) : برهن بالتراجع أن :

- (1) لكل عدد طبيعي n ، $0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (2) لكل عدد طبيعي n غير معدوم $(1 \times 2^0) + (2 \times 2^1) + (3 \times 2^2) + \dots + (n \times 2^{n-1}) = 1 + (n-1) \cdot 2^n$
- (3) لكل عدد طبيعي n ، $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^n \cdot (2n+1) = (-1)^n \cdot (n+1)$
- (4) لكل عدد طبيعي n ، $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$
- (5) لكل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

التمرين (03) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $f_1 = f$ و $f_{n+1} = f_n \circ f$

1/ احسب كلا من : $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$

2/ أعط تخميناً لعبارة $f_n(x)$

3/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقاً ، ثم استنتج عبارة $f_n(x)$

التمرين (04) برهن بالتراجع أن :

(1) من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$

(2) لكل عدد طبيعي n ، $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$ ، حيث α عدد حقيقي موجب تماما (متباينة برنولي)

- استنتج أنه إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

التمرين (05) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

1/ عين f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2/ أعط تخميناً ، حسب قيم العدد n لعبارة $f^{(n)}(x)$

3/ برهن بالتراجع صحة تخمينك

تعريف : عاملي العدد الطبيعي n هو العدد الطبيعي الذي نرمز له بـ

التمرين (06) الدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x \cos x$

(1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (07) n عدد طبيعي ، نسمي $P(n)$ الخاصية : $10^n + 1$ يقسم 9

(أ) أثبت أن $P(n)$ خاصية وراثية

(ب) هل من أجل كل عدد طبيعي n ، $10^n + 1$ مضاعف 9 ؟

(ج) ماهي النتيجة المستخلصة من هذا التمرين ؟

Le raisonnement par récurrence est la version mathématique du raisonnement « de proche en proche ». Il s'énonce comme suit :

Principe de récurrence - Soient $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un n quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition par récurrence : si on définit un objet x_0 puis si, pour tout entier n , on donne une manière de définir l'objet x_{n+1} à partir de l'objet x_n , alors les objets x_n sont bien définis pour tout n .

Une démonstration par récurrence **contient donc toujours deux étapes** :

- L'initialisation : c'est la vérification de P_0 . **Il ne faut jamais l'oublier, sinon on raisonne sur du vide !**
- La récurrence proprement dite : on suppose que la propriété P_n est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer P_{n+1} à partir d'elle

عموميات على المتاليات العددية: اتجاه التغير، التقارب، المتاليات المحدودة، التمثيل البياني

التمرين (01) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 4)$$

1/ احسب u_2 و u_3 . 2/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3/ بين أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ثم برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

4/ استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين (02) (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ لكل n من \mathbb{N}

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ، أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

التمرين (03) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني

(d) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$ وماذا تستنتج ؟

ب- تحقق أن (u_n) متناقصة .

ج - استنتج أن (u_n) متقاربة ؟ و احسب نهايتها

التمرين (04) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases} \quad n \geq 1$$

1) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4 . أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدة تماماً

3) أثبت بالتراجع أن : $u_n = \sqrt{n}$ ثم استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متباعدة .

التمرين (05) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

(1) أ - ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و

المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-6; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x + 6}$:

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_1 ، u_0 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ وتقاربها.

(2) أثبت بالتراجع أنه لكل n من \mathbb{N} يكون : $u_n < 3$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. ماذا تستنتج ؟ اوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

التمرين (06) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بحددها الأول $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + u_n$

1- مثل بيانياً المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2- ضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك

التمرين (07) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 \in [0,1]$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$

2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة - أسـ نتج أنها تقبل نهاية يطلب حسابها

3) نضع : $u_0 = \cos(\theta)$ / $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

أ) برهن بالتراجع أن : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. ب) أحسب نهاية (u_n)

التمرين (08) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$ لكل n من N

1/ أ- بين أن $u_n > 0$ لكل n من N . ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟

2/ أ- بين أن $u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$ لكل n من N

ب- استنتج أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب $\lim u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}u_n$

(1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 . ثم برهن بالتراجع أنه : $u_n = \frac{8}{(n+2)(n+3)}$

(2) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$

(3) استنتج المجموع : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

التمرين (10) ادرس تقارب المتتاليات التالية المعرفة بحددها العام

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2}{2n + 3}} \quad (3) \quad \cdot u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n + 3}\right) \quad (3) \quad \cdot u_n = e^{1-n} \quad (2) \quad \cdot u_n = \frac{3n + 2}{2n - 1} \quad (1)$$

$$u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) \quad (7) \quad \cdot u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} \quad (6) \quad u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1} \quad (5) \quad \cdot (5) \quad u_n = \ln(3 + e^{2-n}) \quad (4)$$

$$u_n = \frac{n \cos(2\pi n)}{n + 1} \quad (11) \quad \cdot u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} \quad (10) \quad \cdot u_n = (n + 2)e^{-n} \quad (9) \quad \cdot u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) \quad (8)$$

التمرين (11) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$

(2) ادرس تقارب كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بـ :

$$w_n = \frac{n}{n + 1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$$

(3) أستنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة وعين نهايتها .

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $\ln(x + 1) \leq x$ ،
(يمكنك دراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \rightarrow \ln(x + 1) - x$)

(2) استنتج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ، $\ln(k + 1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ ،

ثم من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n + 1) \leq u_n$ ،

(3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

التمرين (13) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

1 . f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالدستور : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

- ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول : $2cm$

- باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، و A_3 فواصلها على الترتيب u_0 ، u_1 ، u_2 ، و u_3 .

2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n \geq \sqrt{2}$
3. بيّن أنه من أجل كل $x \geq \sqrt{2}$ لدينا $f(x) \leq x$
4. أستنتج أن المتتالية متناقصة ابتداء من الرتبة الثانية .
5. بيّن أن المتتالية متقاربة .
6. لتكن l نهاية المتتالية (u_n) . بين أن l هو حل للمعادلة $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ واحسب قيمته .

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

- 1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $0 \leq u_n \leq 2$.
- 2/ بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة و ماذا تستنتج ؟

3/ أ- بيّن أن : $2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$

ب- بيّن أن : $0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim u_n$

المتاليات الحسابية والمتاليات الهندسية (تذكرو تدعيم)

التمرين (15) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2}$ و $v_1 + 4v_2 - v_3 = 7$

1) عين الحدود v_2 ثم v_1 و v_3 وأساس المتتالية .

2) احسب الحد العام v_n بدلالة n .

3) عبر بدلالة n عن المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

4) عين العدد n بحيث يكون : $S_n = -10$

التمرين (16) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r .

أ- احسب u_1 و r علما أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 74 \end{cases}$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 5978$

2/ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها q .

نضع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

عين v_1 و q حتى يكون $2S_n = n(3n + 7)$ من أجل كل n من N^*

التمرين (17) (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r علما أن :

$$u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 83 \quad \text{و} \quad u_2 + u_3 + u_4 = -15$$

1/ احسب الحد u_3 ثم استنتج r و الحد الأول u_0 .

2/ عين الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين (18) (u_n) متتالية حسابية حدودها الثلاثة الأولى u_1, u_2, u_3

$$\begin{cases} u_1 - 3u_2 + u_3 = -1 \\ u_1^2 - u_3^2 = -4\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{تحقق الجملة :}$$

1- أوجد كلا من u_1, u_2, u_3

2- اكتب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

ثم أوجد العدد الطبيعي k حتى يكون $S_k - S_{(k-2)} = 2 + 21\sqrt{2}$

3- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد: $k^{4n+2} + 2 \times 3^{8n+1}$ يقبل القسمة على 5

التمرين (19) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث: $u_1 = 1$ و $u_3 + u_5 = 20$

1 - أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها وتقاربها

2- احسب بدلالة n المجموع $G_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

3- احسب بدلالة n المجموع $S_{n1} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$

التمرين (20) (1) بين انه إذا كانت a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية حدود متعاقبة بهذا الترتيب

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

(2) أوجد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276

التمرين (21) (v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل

$$v_{n+1} - v_n = 0.02v_n, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

1/ أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها. ما هو اتجاه تغير هذه المتتالية؟

ب- عبر عن v_n بدلالة n و v_0 .

2/ احسب S_n بدلالة n و v_0 حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

3/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \geq 50v_0$

4/ بلغ عدد سكان بلد 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000، نفرض أن عدد السكان يرتفع كل سنة بنسبة 2%. - كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020

التمرين (22) (1) ما هي نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$$u_0 = 0.57, \quad u_n = \underbrace{0.57 \dots 57}_{2n \text{ رقم}} \quad ?$$

2/ أستنتج الكتابة الكسرية للعدد الناطق التالي : $0.5757 \dots$

التمرين (23) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1 \quad \text{و} \quad \ln u_3 + 2 \ln \sqrt{u_6} = 11$$

- 1- عيّن أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .
- 2- اكتب u_n بدلالة n ثم ادرس اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .
- 3- احسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n
- 4- (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = 3 \ln u_{n+1} - \ln u_n$:
- أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$

التمرين (24) $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \quad \text{و} \quad u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$$

- 1/ احسب الحدود : u_2 ثم u_1, u_3 والأساس r للمتتالية .
- 2/ عبّر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$
- 3/ احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$
- 4/ احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين (25) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية رتيبة تحقق : $u_2 + u_3 + u_4 = 56$ و $u_2 \times u_4 = 256$

- 1) عين الحدين u_0 و u_3 والأساس q
- 2) أعط عبارة الحد العام u_n بدلالة n
- 3) افرض $u_0 = 2$ و $q = 2$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) حيث : $v_n = 2u_n + n$
أ) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)
ب) احسب كلا من المجموعين : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $L_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$
ج) استنتج المجموع : $K_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

التمرين (26) 1/ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases} \quad \text{أ- عيّن } u_2 \text{ و } r \text{ علما أن :}$$

- ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- 2/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = e^{14-3n}$
أ- بيّن أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها
ب- احسب المجموع $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و الجداء $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n$
د - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين (27) دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ ترمز للمشتقات المتتابعة للدالة f حيث $n \geq 1$
1/ احسب f' ، f'' ، $f^{(3)}$.

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot (1-n-2x)e^{2x}$

3/ $n \geq 1$ ، التمثيل البياني لـ $f^{(n)}$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة M_n

أ) عيّن x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n و تحقق أن M_n تنتمي إلى المنحني (γ) الذي معادلته : $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.

ب) بيّن أن المتتالية (x_n) حسابية ، ماهي نهايتها

ج) بيّن ان المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها.

التمرين (28) لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = 80 + \alpha e^{\beta x}$

حيث α و β عدنان حقيقيان . (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

عين α و β بحيث تكون النقطتان $A(0;53)$ و $B(3;60)$ نقطتان من (C) .

تعطي القيم الحقيقية للعددين α و β ثم تعطي القيمتين المدورتين إلى 10^{-1} لهما .

2 - يعطي إنتاج شركة في اليوم n (عدد طبيعي غير معدوم)

بالعلاقة : $u_n = 80 - 27e^{-0,1n}$ و حدة خلال بداية انطلاقها .

أ - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب - بعد كم يوم تزيد كمية الإنتاج على 72 وحدة .

3 - نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بالعلاقة : $V_n = e^{-0,1n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

أ - برهن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

ب - احسب : $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{10}$.

ج - ما هو إنتاج الشركة في مدة 10 أيام حيث تعطي قيمة مدورة إلى الوحدة لهذا الإنتاج

التمرين (29) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$$

1/ ما هو اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟

2/ برهن أنه لكل عدد طبيعي n يكون : $u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$

3/ ما هي نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟

4/ نضع : $M = 1.333\ 333\ 333$ هل العدد الحقيقي M حاد من الأعلى للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

المتاليات التراجعية من الشكل : $u_{n+1} = f(u_n)$

التمرين (30) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$
 1/ بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$

2/ ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة واحسب $\lim u_n$

3/ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين (31) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

1) ارسم المستقيمين (D) ذي المعادلة $y = \frac{3}{4}x + 2$ و (Δ) ذي المعادلة $y = x$ في معلم

متعامد ومتجانس . عين A نقطة تقاطعهما ولتكن α فاصلة النقطة A .

2) مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، و u_5

3) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وتقاربها .

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 8$

5) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ؟

6) أ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \alpha$ ، برهن ان (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين (32) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

1- أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$

ب) برهن أن (u_n) متزايدة . ماذا تستنتج ؟ احسب $\lim u_n$

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي : $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

أ) عين العدد الحقيقي α بحيث : $f(\alpha) = \alpha$

ب) نضع $v_n = u_n - \alpha$ من اجل كل عدد طبيعي n ، بين أن (v_n) متتالية هندسية

ج) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

د) استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

3- احسب المجموعين : $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{array} \right. \quad \text{التمرين (33) } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ}$$

1/ احسب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 وضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) .

2/ أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 1$.

3/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بيّن أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

4/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{1}{1-u_n}$

(أ) احسب الحدود: v_0 ، v_1 و v_2 .

(ب) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها.

(ج) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

5/ احسب المجموع $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و n الجداء: $\prod_n = u_1 u_2 \dots u_n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4} \end{array} \right. \quad \text{التمرين (34) نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة كما يلي: } (n \in \mathbb{N})$$

1/ أ- احسب u_1 و u_2

ب- بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

ج- ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة

2/ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج- استنتج أن: $u_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم احسب $\lim u_n$

3/ احسب بدلالة n كلا من: $s_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$ و $p_n = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$

$$u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \quad \text{التمرين (35) } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي: } u_0 = 1 \text{ و}$$

(1) احسب: u_1, u_2 (2) أثبت أن: $u_n \neq -2$ لكل عدد طبيعي n

(3) لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة كما يلي: $t_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

(أ) أثبت أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس.

(ب) احسب t_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين (36) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بحددها الأول $u_0 = 24$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 16 \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t) المعرفة بـ : $t_n = u_n - 20$

أ- أثبت أن المتتالية (t) هندسية ، يطلب حساب حددها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n ادرس تقارب $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4/ احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين (37) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $4u_{n+1} = u_n - 4$

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4 \geq 0$

2/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وماذا تستنتج ؟

3/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n = 3u_n + \alpha$

أ- عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية - عين أساسها وحددها الأول

ب - أحسب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج أنها متقاربة

$$(4) \text{ احسب المجموع : } S = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^3 \quad \text{و الجداء : } \prod_{k=0}^{n-1} v_k$$

التمرين (38) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$

أ) ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

(O, \vec{i}, \vec{j}) ثم استعمل المنحني (C_f) لرسم النقاط A_1, A_2, A_3 التي فواصلها u_1, u_2, u_3

على الترتيب . ب) برهن أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما وأنها محدودة من الأسفل بالعدد 6

ج) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2/ أ) اثبت المتراحة التالية : $|u_{n+1} - 6| < \frac{2}{7}|u_n - 6|$

ب) استنتج من جديد أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

3/ لتكن المتتالية (v_n) الية $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$ حيث :

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية . ب) احسب u_n بدلالة n ، ج) استنتج أن (u_n) متقاربة

التمرين (39) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{2x-16}{x-6}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول : $2cm$

ب- باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0, A_1, A_2 و A_3 فواصلها على الترتيب u_0, u_1, u_2 و u_3 .

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وتقاربها.

2/ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n - 16}{u_n - 6}$

أ- اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً

ب- اثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4 وماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية .

ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . ج) أوجد نهاية (u_n)

التمرين (40) α عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_1 = 1 + \frac{1}{2\sin^2(\alpha)}$ و $u_{n+1} = u_n \cdot \cos(2\alpha) + 1$ لكل عدد طبيعي n غير معدوم.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 1$

2/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n = u_n - \frac{1}{2\sin^2(\alpha)}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية واكتب u_n بدلالة n و α

ب) هل المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ؟ علل جوابك

3/ نضع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين (41) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

1) أ- أثبت بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

ب- ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

2) أ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{v_n} + 1$ بين ان (v_n) متتالية هندسية ،

ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k v_k$

متاليات تراجعية من أشكال أخرى

التمرين (42) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2)$

1/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right)$

(أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
(ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم ادرس تقارب (u_n)

2/ برهن بالتراجع أن لكل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

التمرين (43) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$$

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n = u_n + \alpha n$ حيث α عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = u_n - \frac{2}{3}n$

أ- أثبت أن المتتالية (t_n) هندسية ، يطلب حساب حدّها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n

4/ احسب المجموع S_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

التمرين (44) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث : $u_0 = 20$ ، $u_1 = 6$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1}$$

1/ بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية وان المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ هندسية يطلب تعيين الأساس والحد الأول

لكل منهما بحيث : $v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ و $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ لكل n من N

2/ أ- اكتب كلا من v_n و w_n بدلالة n . ب- استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$.

3/ احسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n واستنتج $\lim S_n$

$$u_0 = 0 , \quad u_1 = 1$$

$$u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n$$

التمرين (45) متتالية عددية معرفة كما يلي :

1/ لنعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N حيث : $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

- أثبت أن (w_n) متتالية ثابتة يطلب تعيين قيمتها واستنتج أن : $u_{n+1} = 9u_n + 1$

2/ لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in N}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ) برهن أن $(v_n)_{n \in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) استنتج u_n بدلالة n وبرهن بالتراجع أن u_n عدد طبيعي

3/ احسب العددين S_n و S'_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ و $S'_n = \sum_{r=0}^{n-1} v_r^2$

المتتاليات المتجاورة

التمرين (46) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $u_n = \frac{-2}{n}$ ، $v_n = \frac{1}{\ln n}$ ، $n > 1$

1 - ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2 - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$. 3 - هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

التمرين (47) المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان كما يلي :

$$u_0 = -1 , \quad v_0 = 2 \quad \text{ومن أجل كل عدد طبيعي } n : \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n < v_n$

2) برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

3) لتكن المتتالية (ω_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n : \omega_n = u_n + \frac{5}{2}v_n$

أ- بين أن المتتالية (ω_n) ثابتة . ماهي نهايتها

ب- استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $x_n = u_n + av_n$ و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين .

أ- جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتين ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n

ب- جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

التمرين (48) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ : $U_n = Ln(n)$ ، $V_n = Ln(n+1)$ و $n > 0$.

1 - ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$. هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

التمرين (49) (U_n) و (V_n) متاليتان معرفتان بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{V_n + U_n}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{V_n + U_{n+1}}{2} \end{cases}$$

1/ احسب : U_1 و V_1 و U_2 و V_2

2/ لتكن المتتالية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = V_n - U_n$
 أ) برهن أن (W_n) متتالية هندسية . ب) عبر عن W_n بدلالة n
 3/ ادرس اتجاه كل من (U_n) و (V_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4/ لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $T_n = \frac{U_n + 2V_n}{3}$
 أ) برهن أن المتتالية (T_n) ثابتة . ب) استنتج U_n و V_n بدلالة n
 ج) احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين (50) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{6-x}$ و حدد $f([0,6])$

2/ بين أن $0 \leq u_n \leq 6$ لكل عدد طبيعي n .

3/ نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

- بين أن $v_n \leq w_n$ (لكل عدد طبيعي n) و أن (v_n) متزايدة و (w_n) متناقصة

4/ بين أن $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ (لكل عدد طبيعي n) و استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim u_n$

5/ بين أن (v_n) و (w_n) متجاورتان و حدد نهايتهما المشتركة

التمرين (51) الجزء الأول . (U_n) و (V_n) متاليتان معرفتان بـ:

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

1) برهن ان المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

الجزء الثاني .

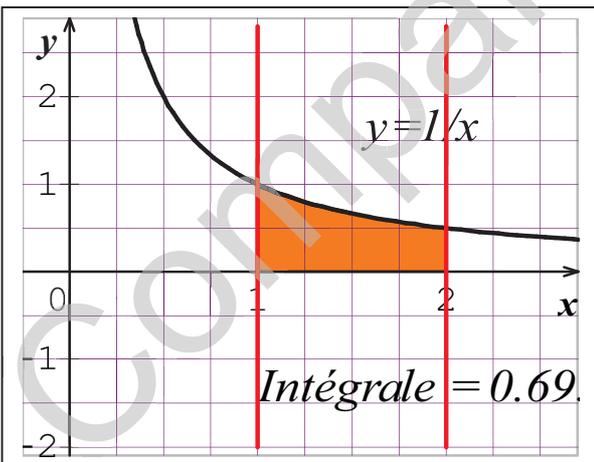
f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على

المجال $]0; +\infty[$ حيث أن : $f(x) = \ln(x)$

1- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال

$$]0; +\infty[\text{ لدينا : } 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$$

2- أثبت $U_n \leq \ln(2) \leq U_n + \frac{1}{2n}$. 3- أثبت أن (U_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.



{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$ و $u_0 = \frac{5}{2}$

(1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني

(d) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

ج - هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين (02) (1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1, 2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماماً على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

(2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I .

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين (03) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j})$

(الوحدة على المحورين $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ وفسر النتيجة هندسياً.

- ادرس تغيرات الدالة f .

- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (C)

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.

(2) نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة \mathbb{N} كالآتي :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (C) مثل الحدود U_0 ، U_2 ، U_3 على محور الفواصل

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \leq U_n \leq 5$ و $U_{n+1} > U_n$

ب- استنتج أن (U_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين (04)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدده الأول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1- احسب U_1 ، U_2 و U_3 .

2- (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

- استنتج عبارة U_n بدلالة n

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3- (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$

(05) (1) الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

C_f منحنى f في المستوي المنسوب لمعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الأطوال 2cm)

أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب- ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحنى C_f ثم ارسم C_f و (D).

د- بيّن أن صورة المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بعدها الأول $U_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ لدينا}$$

أ- باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (ox) .

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n) متزايدة.

د- استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

التمرين (06) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يأتي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

ب- أنشئ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

2/ نعرف المتتالية العددية (U_n) على \mathbb{N} كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

أ- برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2 .

ب- مثل الحدود U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحني (C) و

المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج- ضع تخميناً حول اتجاه تغير (U_n) و تقاربها انطلاقاً من التمثيل السابق.

3/ أ- برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

ب- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $U_{n+1} > U_n$.

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج- تحقق أن : $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}(U_n - \sqrt{3})$ من أجل عدد طبيعي n غير معدوم.

عيّن عدداً حقيقياً k من $]0;1[$ بحيث : $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

بيّن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$

استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

التمرين (07) (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$$

1- أحسب u_1

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب u_n و v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4- أحسب بدلالة n كلا من : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين (08) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 \cdot e = u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$

1/ أثبت أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . 3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)

4/ احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

5/ ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$u_0 = 12 , v_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟

3) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n) ؟

4) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان . ثم استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

التمرين (10) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$u_1 = -1$$

$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتبة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3 - u_n)$

(أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

(ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم جد نهاية المتتالية (u_n) من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$

التمرين (11) -1 متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4 \text{ و } \ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

- عيّن أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 . احسب u_n بدلالة n

- نسمي S_n المجموع : $u_0 + u_1 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

-2 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

- بيّن أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

- نسمي T_n المجموع : $v_0 + v_1 + \dots + v_n$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = e^3 - 1$ و من اجل كل عدد

طبيعي n لدينا : $e^3 u_{n+1} = 1 - e^3 + u_n$.

1- احسب الحدود : u_1 و u_2 و u_3

2- أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $1 + u_n > 0$

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما . ماذا تستنتج بخصوص تقارب (u_n) ؟

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2(1 + u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- عين مجموعة العداد الطبيعية n حتى يكون : $v_n \geq 2 \times 10^{-9}$

التمرين (13) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بحدها الأول u_0 وبعبارة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) نفرض في ما يلي : $u_0 = 0$

(أ) احسب u_1, u_2 ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها.

(ب) عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

(ج) احسب كلا من S_n و P_n إذا علمت أن :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad u_1 = 2, \quad u_0 = 1$$

1- احسب الحدين u_3 ، u_4

2- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = 2^n v_{n-1}$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = 3$

ب- استنتج طبيعة المتتالية (v_n) ثم اكتب v_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n .

3- نريد دراسة تقارب المتتالية (u_n)

أ- برهن أنه لكل عدد طبيعي n ($n \geq 3$) : $4 \times 2^n \geq n^2$ و $\frac{n}{2^n} \leq \frac{4}{n}$

ب- احسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

التمرين (15) (I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن : $e^{-x} + x \geq 1$ لكل $x \in \mathbb{R}$

(II) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f

(1) بيّن أن : $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$.

(2) بيّن ان : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.

(3) ادرس تغيرات الدالة f

(4) أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ) . جـ) أنشئ (Δ) و (C_f) .

(III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$U_0 = 1 \quad \text{و} \quad U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{لكل} \quad n \in \mathbb{N}$$

(1) بيّن بالتراجع أن : $0 \leq U_n \leq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(2) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة

(3) استنتج ان (U_n) متقاربة ثم حدّد نهايتها.

التمرين (16) I لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

(1) أ- تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ لكل x من \mathbb{R}

ب- استنتج أن f فردية

(2) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) أ- بين أن : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ لكل x من \mathbb{R}

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^+

ج- استنتج ان : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$ لكل x من \mathbb{R} .

(4) بيّن ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right] = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

(5) أنشئ في المعلم المستقيم الذي معادلته : $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

II لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$ لكل n من \mathbb{N}

(1) بين بالتراجع أن : $u_n > 0$ لكل n من \mathbb{N}

(2) أ- تحقق باستعمال نتيجة السؤال الثالث ج من الجزء الأول ، أن : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ لكل n من \mathbb{N}

ب- استنتج ان المتتالية (u_n) متناقصة .

(3) بيّن أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ لكل n من \mathbb{N} ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين (17)

نعرف متتالية (u_n) على المجموعة N بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ ،

2. (v_n) متتالية معرفة N على بـ : $v_n = u_n + tn - 1$.

أ- بيّن أنه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب- أثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها

ج- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث :

$$\vec{0} = 2\vec{GA} + 3\vec{GB} + \lambda\vec{GC}$$

مع عدد حقيقي.

عيّن λ حتى تكون النقطة G مرجّحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 ، S_2 على الترتيب

التمرين (18) 1 تعيين حصر للعدد e^x .

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = e^x - (1+x)$.
أدرس تغيرات الدالة f .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x \leq e^x \dots (1)$.

(3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 ($x < 1$) :

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \dots (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e . n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية .

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$.

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

هذه مجموعة توجيهات أضعها بين أيديكم يا طلبتنا الكرام

الهدية

1/ ضروري المزيد من شحذ الهمة و التوق للالتحاق بمدرجات الجامعة

2/ ضروري ضبط جدول وعمل منظم بقصد الاستغلال الجيد للفترة المتبقية للمراجعة ولها أهميتها إن أحسن استغلالها

3/ الجدول يكون متوازن وعدم إهمال مواد أو تركها بحجة من الحجج

4/ الاستعانة بحل النماذج السابقة في كل مادة

5/ ضبط كراس التلخيص أو المعارف في كل مادة

6/ الابتعاد عن الزملاء ذوي العزائم الضعيفة

7/ كن صاحب أمل وثقة في الله و أسأله العون وأعلم دراستك بنية حسنة هي

عبادة وهي من بر الوالدين لأن إدخال السرور عليهما امر مشهود له فكيف بنجاحك في شهادة البكالوريا

8/ أعلم أن النجاح في البكالوريا امتحان والامتحان تكون 80 بالمئة من أسئلته مناسبة لعموم

الطلبة و الالتحاق بالتخصص المرغوب فيه مسابقة

9/ عدم إهمال اللغات الأجنبية لأن لها تأثير كبير على النجاح ونوعه وعلى الأقل التخفيف من

حدة الضعف

10/ ابتعد عن السهر المفرط واجتهد في البكور فإن فيه البركات ومشهود له في المأثور

... يتبع <http://www.qahtaan.com/works/up/get.php?hash=23470iktwx1238443920>

سلسلة استند للبكالوريا رقم (01)

السنة الدراسية: 2008/2007

المستوى : الثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

عداد الأستاذ
حليلات عمارة

و تقني رياضي

المحور: المتتاليات العددية والاستدلال بالتراجع

التمرين (01) : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 4)$$

1/ احسب u_2 و u_3 . /2 بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3/ بين أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ثم برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

4/ استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب نهايتها

التمرين (02) : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2/ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة و ماذا تستنتج ؟

$$3/ \text{أ- بين أن : } 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$$

$$\text{ب- بين أن : } 0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ ثم استنتج } \lim u_n$$

التمرين (03) : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 2$

2/ ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة واحسب $\lim u_n$

3/ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين (04) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{3} \\ u_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{u_n}{2} \end{cases} \quad \text{1/ نضع : } v_n = u_n - \frac{\pi}{6}$$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
 (ب) عبر عن (v_n) ثم عن (u_n) بدلالة n
 2/ احسب نهاية (u_n)

3/ احسب المجموعين S_1 و S_2 حيث :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \quad , \quad S_2 = \sum_{r=1}^{r=n} u_r$$

التمرين (05) لتكن المتتالية (U_n) و (V_n) المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{V_n + U_n}{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{V_n + U_{n+1}}{2} \end{cases}$$

1/ احسب : U_1 و V_1 و U_2 و V_2

2/ لتكن المتتالية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $W_n = V_n - U_n$

(أ) برهن أن (W_n) متتالية هندسية . (ب) عبر عن W_n بدلالة n

3/ ادرس اتجاه كل من (U_n) و (V_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4/ لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $T_n = \frac{U_n + 2V_n}{3}$

(أ) برهن أن المتتالية (T_n) ثابتة . (ب) استنتج U_n و V_n بدلالة n

(ب) احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين (06) : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتبة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3 - u_n)$

(أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

(ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

(ج) جد نهاية المتتالية u_n من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$

التمرين (07)

- نعرف متتالية (u_n) على المجموعة N بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$.
1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.
 2. (v_n) متتالية معرفة على N على بـ : $v_n = u_n + tn - 1$.
 أ - بين أنه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .
 ب - أثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .
 - ج - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
 3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط A ، B ، C و G حيث :
 $2\overline{GA} + 3\overline{GB} + \lambda\overline{GC} = \vec{0}$ مع λ عدد حقيقي .
 عين λ حتى تكون النقطة G مرجحاً للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب

- ## التمرين (08)
- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in N}$ المعرفة كما يلي :
- $$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \frac{8x - 6}{x + 1}$

أ) ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ثم استعمل المنحني (C_f) لرسم النقاط A_1 ، A_2 ، A_3 التي فواصلها u_1 ، u_2 ، u_3

على الترتيب . ب) برهن أن $(u_n)_{n \in N}$ متناقصة تماماً وأنها محدودة من الأسفل بالعدد 6
 ج) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية $(u_n)_{n \in N}$.

2/ أ) اثبت المتراجحة التالية : $|u_{n+1} - 6| < \frac{2}{7}|u_n - 6|$

ب) استنتج من جديد أن المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ متقاربة .

3/ لتكن المتتالية (v_n) حيث : $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية . ب) احسب بدلالة n
 ج) استنتج أن (u_n) متقاربة

- ## التمرين (09)
- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$ لكل n من N

1/ أ- بين أن $u_n > 0$ لكل n من N . ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟

2/ أ- بين أن $u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$ لكل n من N

ب- استنتج أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب $\lim u_n$

التمرين (10): لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 \in [0,1]$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

- (1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 1$
 (2) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة - أسـتنتج أنها تقبل نهاية يطلب حسابها
 (3) نضع : $u_0 = \cos(\theta)$ / $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

أ) برهن بالتراجع أن : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. ب) أحسب نهاية (u_n)

التمرين (11): المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $4u_{n+1} = u_n - 4$

- 1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4 \geq 0$
 2/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وماذا تستنتج ؟
 3/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n = 3u_n + \alpha$
 أ- عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية - عين أساسها وحدها الأول
 ب - أحسب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج أنها متقاربة

(4) احسب المجموع : $S = \sum_{k=0}^{n-1} v_k^3$ و الجداء : $\prod_{k=0}^{n-1} v_k$

التمرين (12): متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$

- (1) أحسب: u_1, u_2 (2) أثبت أن: $u_n \neq -2$ لكل عدد طبيعي n
 (3) لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة كما يلي: $t_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) أحسب الحدود: t_0, t_1, t_2
 ب) أثبت أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس.

جـ) أحسب t_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 (4) عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون u_n عدد صحيح.

التمرين (13): $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \quad \text{و} \quad u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$$

- 1/ احسب الحدود : u_2 ثم u_1, u_3 والأساس r للمتتالية .
 2/ عبّر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u)_{n \in \mathbb{N}^*}$
 3/ احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$
 4/ احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين (14): متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث: $u_1 = 1$ و $u_3 + u_5 = 20$

1 - أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها

2- احسب بدلالة n المجموع: $u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = 3.u_n^2 + 2.3^n$

3- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين (15) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \text{ لكل عدد طبيعي } n$$

1/ احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2/ بيّن أنه لكل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3/ اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

4/ نعتبر المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين كما يلي: $x_n = u_{2n}$ و $y_n = u_{2n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أ- بيّن انه لكل عدد طبيعي n ، $y_n = 1 + \frac{1}{1+x_n}$

ب- بيّن انه $x_n \leq y_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$

ج- ادرس اتجاه كل من (x_n) و (y_n) ثم برهن أنهما متجاورتان يطلب تحديد نهايتهما

5/ بين انه : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$ لكل $n \in \mathbb{N}$ واستنتج نهاية (u_n)

التمرين (16) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بحددها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) نفرض: $u_0 = 0$

(أ) احسب u_1, u_2 ثم أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(ج) ادرس تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها

(3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$

(أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب حساب حددها الأول و أساسها.

(ب) عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

(ج) احسب كلا من S_n و P_n إذا علمت أن :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

التمرين (17) المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n = u_n + \alpha.n$ حيث α عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t) المعرفة بـ : $t_n = u_n - \frac{2}{3}n$

أ- أثبت أن المتتالية (t) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n

4/ احسب المجموع S_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

التمرين (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2x-16}{x-6}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

2 / $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n - 16}{u_n - 6}$

- اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية . ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . ج) أوجد نهاية (u_n)

التمرين (19) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث :

$$\begin{cases} u_0 = 20 , & u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{-1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} \end{cases}$$

1/ بين أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية وان المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ هندسية يطلب تعيين الأساس والحد الأول

لكل منهما بحيث : $v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ و $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ لكل n من \mathbb{N}

2/ أ- اكتب كلا من v_n و w_n بدلالة n . ب- استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$.

3/ احسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n واستنتج $\lim S_n$

التمرين (20) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2)$ لكل n من \mathbb{N}

1/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2} \right)$

أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم ادرس تقارب (u_n)

2/ برهن بالتراجع أن لكل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ استنتج المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

التمرين (21) /1 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها 4.

- أكتب الحد العام u_n بدلالة n - احسب المجموع: $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من هذه المتتالية هو 1995. فما هو الحد الأول من هذه الحدود .

/2 $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية حيث: $v_0 = 32$ و $v_n = (2n+1) \cdot 2^{u_n}$

- برهن بالتراجع أن: $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

- استنتج الجداء: $u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين (22) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 , & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

/1 لنعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N حيث: $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

- أثبت أن (w_n) متتالية ثابتة يطلب تعيين قيمتها واستنتج أن: $u_{n+1} = 9u_n + 1$

/2 لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

(أ) برهن أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
(ب) استنتج u_n بدلالة n وبرهن بالتراجع أن: u_n عدد طبيعي

/3 احسب العددين: S_n و S'_n حيث: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ و $S'_n = \sum_{r=0}^n v_r^2$

التمرين (23) α عدد حقيقي حيث: $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_1 = 1 + \frac{1}{2\sin^2(\alpha)}$ و $u_{n+1} = u_n \cdot \cos(2\alpha) + 1$ لكل عدد طبيعي n غير معدوم.

/1 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 1$

/2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n = u_n - \frac{1}{2\sin^2(\alpha)}$

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية واكتب u_n بدلالة n و α

(ب) هل المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة؟ علل جوابك

/3 نضع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين (24) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

/1 ادرس تغيرات الدالة f حيث: $f(x) = \sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$

/2 بين أن $0 \leq u_n \leq 6$ لكل عدد طبيعي n .

/3 نضع: $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

- بين أن $v_n \leq w_n$ (لكل عدد طبيعي n) و أن (v_n) متزايدة و (w_n) متناقصة

/4 بين أن $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$ (لكل عدد طبيعي n) واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

/5 بين أن (v_n) و (w_n) متجاورتان وحدد نهايتهما المشتركة.

التمرين (25) برهن بالتراجع أن :

- (1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم $(1 \times 2^0) + (2 \times 2^1) + (3 \times 2^2) + \dots + (n \times 2^{n-1}) = 1 + (n-1) \cdot 2^n$
- (2) لكل عدد طبيعي n ، $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^n \cdot (2n+1) = (-1)^n \cdot (n+1)$ ،
- (3) لكل عدد طبيعي n ، $1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$ ،

التمرين (26) برهن بالتراجع أن :

- (1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.
- (2) لكل عدد طبيعي n ، العدد $3n^3 + 6n$ مضاعف للعدد 9 - استنتج أن مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة يقبل القسمة على 9.
- (3) لكل عدد طبيعي n ، العدد $2^{6n+5} + 4 \times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 13.

التمرين (27) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $f_1 = f$ و $f_{n+1} = f_n \circ f$
- 1/ احسب كلا من : $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$
- 2/ أعط تخميناً لعبارة $f_n(x)$
- 3/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقاً ، ثم استنتج عبارة $f_n(x)$

التمرين (28) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

- 1/ احسب : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ثم أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n
- 2/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقاً ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
- 3/ دالة تآلفية معرفة كما يلي : $f(x) = 2x - 3$
- (أ) أوجد العدد الحقيقي α الصامد بالدالة f
- (ب) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n = u_n - \alpha$. عيّن طبيعة المتتالية (v_n)
- (ج) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

النجاح مطلب الجميع وتحقيق النجاح الدراسي يعتبر من أولويات الأهداف لدى الطالب .. ولكل نجاح مفتاح وفلسفة وخطوات ينبغي الاهتمام بها ... ولذلك أصبح النجاح **علماً وهندسة..**
النجاح فكراً يبدأ وشعوراً يدفع ويحفز وعملاً وصبراً يترجم .. وهو في الأخير رحلة..

الهدية

المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

1/ الطموح كنز لا يفنى: لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحاً ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى .. فكن طموحاً وانظر إلى المعالي .. يتبع

سلسلة استعداد للباكوريا رقم (09)

السنة الدراسية: 2009/2008

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبة : علوم تجريبية + رياضيات

عداد الأستاذ
خليلات عمارة

و تقني رياضي

• المحاور : العد (التحليل التوافقي) + الاحتمالات •

التحليل التوافقي

التمرين (01) يحتوي كيس على 18 كرة منها 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و 6 كرات بيضاء

مرقمة من 1 إلى 6 و 8 كرات خضراء مرقمة من 1 إلى 8.

1. نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:

(أ) 3 ارقام فردية (ب) كرة حمراء على الأقل (ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

2. نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي. ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:

(أ) 3 ارقام فردية (ب) كرة حمراء على الأقل (ج) كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4

التمرين (02) اشترى احد التلاميذ المجتهدين 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب

للأدب العربي ثم أراد أن يضعهم على رف مكتبته فما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك إذا :

(أ) أراد وضع الكتب ذات نفس المادة متجاورة

(ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة . (ج) دون شرط .

التمرين (03) : $n/1$ عدد طبيعي ، اثبت أن : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

$n/2$ و m عدنان طبيعيان حيث : $n \geq m$

أ- أثبت أن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

ب- استنتج قيمة مبسطة للمجموع S حيث : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

التمرين (04) /1 أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

$$C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \quad (\text{ب}) \quad , \quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5n}{2} + 1 \quad (\text{أ})$$

$$\begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases} \quad \forall^2 \text{ الجملة التالية : } \quad \text{حل في } \frac{2}{2}$$

التمرين (05) في مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4

باحثات. (1) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

(2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف التالية:

(أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات؟ (ب) من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط؟

(ج) من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة.

(د) من بين الأعضاء المختارين يوجد على الأكثر باحثان

(3) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها إذا كانت هذه اللجنة تضم رئيسا ونائبا له و كاتبين

التمرين (06) n عدد طبيعي غير معدوم . نضع :

$$L_n = 9C_{n+1}^2 + 27C_{n+1}^3 + 81C_{n+1}^4 + \dots + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

$$1/ \text{بين أن : } L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$$

$$2/ \text{نضع : } S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n \text{ ، احسب } S_n \text{ بدلالة } n$$

التمرين (07) 1/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] = \frac{(2n)!}{n!}$$

التمرين (08) يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من

الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

(أ) كرة بيضاء ؟ (ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ (ج) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

(2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب

كرتين من نفس اللون .

$$(أ) \text{ أثبت أن } X_n = n^2 + 9n + 21 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين (09) ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

(1) أكتب الحد الذي درجته 10. (2) أوجد معامل الحد التاسع. (3) أوجد الحد الثابت

التمرين (10) (1) أثبت أن $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ ثم استنتج أن $C_n^m + C_{n+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$

(2) أحسب المجاميع التالية : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ،

$$S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1)n$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

التمرين (01) : يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 (لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال

- 1) أحسب عدد السحاب الممكنة
- 2) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية
- 3) أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أعداد أولية
- 4) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحد منها عدد غير أولي
- 5) أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم إحداها على الأقل رقم أولي

تعطى كل النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى كل واحدة منها مقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان

التمرين (02) يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس، منها 3 حمراء، 3 خضراء و 4 بيضاء

- 1) نسحب من هذا الكيس، ثلاث كرات، في آن واحد، ما احتمال الحصول على:
 - (أ) - نفس اللون؟
 - (ب) - الألوان الثلاثة؟
 - (ج) - كرة بيضاء واحدة على الأقل؟
- 2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة. أما هو قانون الاحتمال المتغير العشوائي X ؟
- ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين والانحراف المعياري .

التمرين (03) يحتوي وعاء على 4 قريصات مرقمة من 1 إلى 4. نسحب عشوائيا قريصة من هذا الوعاء ونسجل لونها رقمها a ثم نعيدها إلى الوعاء ونسحب من جديد قريصة أخرى ونسجل لونها b ليكن $(O; \overset{1}{i}; \overset{2}{j}; \overset{3}{k})$ معلما متعامدا ومتجانسا في الفضاء .

نعتبر الشعاعين $\overset{1}{u}$ و $\overset{2}{v}$ حيث : $\overset{1}{u} (a, -5, 1-a)$ و $\overset{2}{v} (1+b, 1, b)$

- برهن أن احتمال أن يكون هذان الشعاعان متعامدين هو $\frac{1}{4}$

التمرين (04) يحتوي وعاء على n كرة سوداء $(n \in \mathbb{N}^*)$ و كرتين بيضاوين ، نسحب من هذا الوعاء كرتين على التوالي دون إعادة قبل السحب الموالي .

1. ما هو احتمال سحب كرتين بيضاوين؟
2. نرمز بالرمز u_n إلى احتمال سحب كرتين من نفس اللون
- أ- عبر عن u_n بدلالة n . ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. فسر النتيجة

التمرين (05) يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما (1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

(2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

(3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم أحسب التباين $V(X)$

(4) أوجد $P(X \geq 25)$

التمرين (06) ليكن X المتغير العشوائي المعروف كمايلي :

(1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

(2) أحسب $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X \leq 1)$

α	1-	2	3	4
$P(X = \alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

(3) أحسب $P(X^2 \leq 2)$ ،

(4) احسب $P(X^2 - 6X + 8 \leq 0)$

التمرين (07) يحتوي كيس على 12 قريصة متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 1 إلى 12

(لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) . نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال .

1/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها تقبل القسمة على 3.

2/ أحسب احتمال سحب قريصة واحدة رقمها يقبل القسمة على 3.

3/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية

حسابية أساسها 3.

4/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

التمرين (08) قطعة نقود مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف A

ضعف احتمال ظهور الوجه الآخر والذي يحمل الحرف B .

1- احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\bar{A})$ ، $P(A|B)$

2- نفرض ان ظهور الوجه A يعطي ربح 100 نقطة و ظهور الوجه B يعطي خسارة 50 نقطة

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح او الخسارة

- أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

- احسب الأمل الرياضي

- احسب التباين و الإنحراف المعياري .

التمرين (09) تحتوي علبة على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. نسحب في آن واحد 5 كرات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

(1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة - عين قانون احتمال هذا المتغير العشوائي - احسب أمله الرياضي

(2) α عدد حقيقي .
نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل سحب يحتوي على x كرة بيضاء و y كرة سوداء العدد : $\alpha x - y$
- عين العدد α حتى يكون الأمل الرياضي معدوما .

التمرين (10) نرمي نردين معا ونسجل الرقمين x و x' المحصل عليهما .

1/ عين قانون احتمال المتغير العشوائي المعروف كما يلي : $y = |x - x'|$
- احسب أمله الرياضي .

2/ عين قانون احتمال المتغير العشوائي المعروف كما يلي : $z = \max(x; x')$
- احسب أمله الرياضي .

التمرين (11) يحتوي كيس على 14 قرينة: 4 قرينات تحمل الحرف م و 3 قرينات تحمل

الحرف د و 3 قرينات تحمل الحرف ي و قرينتان تحملان الحرف ن و قرينتان تحملان الحرف ة نسحب في آن واحد 5 قرينات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

(1) ما هو الاحتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القرينات المسحوبة هي حروف كلمة "مدينة"

(2) ما هو الاحتمال لكي لا يحمل كل من القرينات المسحوبة الحرف م؟

(3) ما هو الاحتمال لكي تحمل إحدى القرينات المسحوبة على الأقل الحرف م؟

(4) ما هو الاحتمال لكي تحمل اثنتان من بين القرينات المسحوبة - على الأقل الحرف م؟

- تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى قيمها المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالزيادة

التمرين (12) زهرة نرد غير متوازنة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 احتمالات

ظهورها في رمية واحدة هي $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ على الترتيب.

1. علما أن هذه الأعداد $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، أوجد الأعداد $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

2. نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة .

أ- ما احتمال ظهور رقم زوجي ؟

ب- ما احتمال ظهور رقم مضاعف لـ 3 ؟

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضياتي ثم التباين و الإنحراف المعياري .

التمرين (13) كيس أ يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية

: 1، 2، 2، 2، 4، 4 و كيس ب يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 0، 1، 2، 4 .

نسحب قريصة من الكيس أ ثم قريصة من الكيس ب و نفرض أن x الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس أ و أن y الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس ب .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين ($x = y$)

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (y, x) العدد x^y .
- عيّن قانون الاحتمال واحسب أمله الرياضي .

التمرين (14) لتحضير مسابقة طلب من أربعة أساتذة أ ، ب ، ج ، د تقديم تمرينين من طرف

كل أساتذ (تمرين جبر وتمرين تحليل) . المترشح يختار تمرينين من بين 8 التمارين المقترحة . طالب اختار تمرينين عشوائيا . احسب احتمال أن يكون :

1/ التمرينين المختارين جبر .

2/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف أساتذ واحد .

3/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف الأستاذ أ .

التمرين (15) زهرة نرد مكعبة ك₁ لها وجه يحمل الرقم 1، ووجهان يحملان الرقم 2 و ثلاثة

أوجه تحمل الرقم 3. زهرة نرد مكعبة ك₂ لها وجه يحمل الرقم 1 ووجهان يحملان الرقم 2 ووجه يحمل الرقم 3 ووجهان يحملان الرقم 4.

نفرض أن كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس حظوظ الظهور. نرمي النردين ونسجل الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين. ما احتمال الحصول على: أ) زوجيين
ب) فرديين

التمرين (15) لعبة يانصيب مؤلفة من مئة ورقة مرقمة من 1 إلى 100. كل ورقة رقمها ينتهي بأحد

الرقمين 0 أو 5 تعطي ربحا قدره 10 دنانير أما الأوراق الأخرى فإنها لا تعطي أي ربح
نسحب ورقتين من بين الأوراق السابقة وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح المحصل عليه

1) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ؟

التمرين (16) يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما . 1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

3) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم احسب التباين $V(X)$

4) أوجد $P(X \geq 25)$

الاحتمال الشرطي - الحوادث المستقلة - دستور الاحتمالات الكلية - استعمال الشجرة العكوبئية

التمرين (01) يحتوي كيس على 3 زهرات نرد مكعبة منها اثنتان عاديتان أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6. وواحد خاص له ثلاثة أوجه تحمل الرقم 6 و ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1. نسحب من هذا الكيس زهرتي نرد في آن واحد ثم نرمي النردين ونسجل الرقمين اللذين يظهران على الوجهين العلويين.

نسمي الحادثة A " الزهرتان المسحوبتان عاديتان "

الحادثة B " الوجهان العلويان يحملان الرقم 6 "

(1) α - عيّن الحادثة العكسية للحادثة A والتي نرمز لها بـ \bar{A} .

β - احسب احتمال الحادثة A ثم $p(\bar{A})$ احتمال الحادثة العكسية للحادثة A .

(2) α - احسب $p_A(B)$ ، $p(B \cap A)$.

β - احسب $p(B)$

(3) - بيّن أن $p_B(A) = \frac{1}{7}$

التمرين (02) يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء. إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5. أما القريصات الحمراء ، فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والأخريان تحملان الرقم 3. نسحب عشوائياً من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد. ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما

(1) ما هو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماماً من 6؟

(2) ما هو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماماً من 6 علماً أن القريصتين المسحوبتين بيضاوان؟

(3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

- ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟

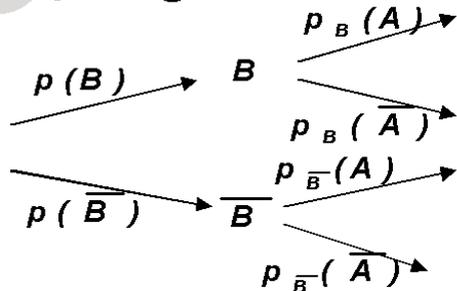
- أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي.

التمرين (03) نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي 5 كرات خضراء و 3 كرات حمراء و الآخر U_2 يحوي 3 كرات خضراء و 6 كرات حمراء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .

ترمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من 1 إلى 6 . إذا تحصلنا على أحد الرقمين 5 أو 6

نسحب كرة عشوائياً من الصندوق U_1 و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق U_2

نسمي الحادثة A " الكرة المسحوبة خضراء " و نسمي الحادثة B " نحصل على أحد الرقمين 5 أو 6 "



(1) أحسب $p(B)$ و $p(\bar{B})$

(2) أحسب $p_B(A)$ و استنتج $p_B(\bar{A})$

(3) أحسب $p_{\bar{B}}(A)$ و استنتج $p_{\bar{B}}(\bar{A})$

(4) أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها

(5) استنتج $p(A)$

التمرين (04) يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء . نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي و دون إرجاع .

- 1- احسب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B حيث :
 A : الحصول على اللونين معا ، B : الحصول على لون واحد
- 2- باستعمال شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين لحساب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B

التمرين (04) يتكون مصنع لإنتاج الثلجات من 3 أقسام حيث تساهم بـ 30% ، 60% ، 10% على الترتيب في الإنتاج الكلي للمصنع و احتمالات أن تكون الثلجة صالحة للاستعمال علما أنها صنعت في الأقسام الثلاثة هي 0.75 ، 0.85 ، 0.90 على الترتيب ما هو الاحتمال أن تكون الثلجة المصنوعة في هذا المصنع صالحة للاستعمال .

- التمرين (05)** يحتوي كيس على 5 كرات خضراء و 3 كرات صفراء . نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بحيث بعد كل سحبة نعيد الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي .
- 1- احسب احتمال تحقق كل من الحدثين C و D حيث :
 C : الحصول على اللونين معا ، D : الحصول على لون واحد
 - 2- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين ولحساب تحقق كل من احتمال الحدثين C و D

- التمرين (06)** يحتوي كيس U_1 على كرتين تحملان الرقم 1 ، وعلى 4 كرات تحمل الرقم 2 (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) . و يحتوي كيس U_2 على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1
- 1) احسب احتمال الحدثان التاليان : A : " الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1"
 B : " الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2"
 - 2) نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية : نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 و نسجل رقمها :
 - إذا كان هذا الرقم هو 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2 .
 - و إذا كان هذا الرقم هو 2 نقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2 .ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس U_2 و E_n الحدث " الحصول بالضبط على n كرة حمراء
- أ - بين أن : $P(E_1) = \frac{11}{21}$ و $P(E_2) = \frac{2}{21}$
- ب- احسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق .

التمرين (07) يحتوي كيس على 12 كرة منها : 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ،

4 حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

نعتبر الحادثتين : A " سحب كرتين من نفس اللون " ، B " سحب كرة خضراء على الأقل "

أ- أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث : A ، B ، $A \cap B$

ب- هل الحادثتان A ، B مستقلتان ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

أ- أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين (08) زهرة نرد مزورة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 بحيث احتمال ظهور

هذه الأوجه هي $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ وهي متناسبة على الترتيب مع الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 على الترتيب.

1. عيّن قانون الاحتمال المرفق بهذه التجربة.

2. نرمي زهرة النرد هذه ونعتبر الحوادث:

A : "الوجه الظاهر يحمل رقما زوجيا" ؛ B : "الوجه الظاهر يحمل رقما أكبر من أو يساوي 3" ؛

C : "الوجه الظاهر يحمل الرقم 3 أو 4".

احسب احتمالات الحوادث A ، B ، C . ثم احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$.

3. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ وهل A و C مستقلتان ؟

4. ما هو احتمال أن نحصل على الرقم 6 مرة على الأقل ؟

التمرين (09) طالب في قسم نهائي علوم تجريبية أو رياضيات أو تقني رياضي يعير نفس الاهتمام

للمواد العلمية أو الأدبية. فإذا كان احتمال نجاحه في اختبار المواد العلمية في امتحان البكالوريا $\frac{1}{3}$

وا احتمال نجاحه في باقي المواد هو $\frac{1}{4}$.

1- احسب احتمال نجاحه في امتحان البكالوريا.

2- ما هو احتمال نجاحه في المواد العلمية علما أنه حصل على البكالوريا ؟

التمرين (10) يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور و 6 إناث أن يكونوا لجنة من 3 أفراد لتمثيلهم

في مسابقة دراسية (نفترض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار).

1- ما هو عدد اللجان الممكنة ؟ لتكن الحادثة E : " أعضاء اللجنة من نفس الجنس " .

2- أحسب احتمال الحادثة E .

3- استنتج احتمال الحادثة F : " أعضاء اللجنة من الجنسين معا " .

نفترض أنه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ A وأخته التلميذة B .

ما هو الاحتمال لكي تتضمن اللجنة أعضاء من الجنسين معا، وأن لا يتواجد بها التلميذ A والتلميذة B

في آن واحد .

ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الإناث المتواجدة باللجنة.

حدد قانون احتمال X و أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين (11) يأخذ علي عند خروجه للعمل صباحا مظلته 3مرات من 10 وعند اصطحابه لمظلته يكون الجو ماطرا مرتين من 7 وغائما 4مرات من 9 وفي باقي الحالات يكون الجو صحوا وبالمقابل عندما لا تكون مظلته معه يكون الجو صحوا 3مرات من 5 وغائما مرتين من 5.

1- مثل المعطيات السابقة بواسطة شجرة الاحتمالات.

2- أحسب احتمال

أ- أن يكون الجو غائما.

ب- أن يأخذ علي المظلة علم ان الجو ماطر. ج- الا يصطحب مظلته علما أن الجو صحو

التمرين (12) تم تلقيح ربع سكان مدينة ضد مرض فيروسي.

وفي احصائية وجد أنه من بين المصابين بهذا المرض شخص واحد ملقح مقابل 4 غير ملقحين و أنه يوجد مصاب واحد فقط من كل 12 ملقحا.

1- اختر الرموز المناسبة للحوادث الواردة في النص و أنشئ الشجرة المثقلة بصورتين .

2- أحسب احتمال الإصابة بالمرض.

3- ماهو احتمال اصابة شخص غير ملقح بالمرض ؟. هل التلقيح فعال؟.

التمرين (13) عدد أقسام المستوى النهائي لشعبة في ثانوية هو 3 نرملها بالرموز C_1 و C_2 و C_3

. 30% من تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم C_1 و 50% من تلاميذ المستوى النهائي

يدرسون في القسم C_2 وبقية تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم C_3 .

25% من تلاميذ القسم C_1 هم بنات ويشكل البنات نسبة 40% من تلاميذ القسم C_2 ، بينما يشكلن في

القسم C_3 ما نسبته 80% .

1- نعين بصفة عشوائية تلميذ من المستوى النهائي. ما هو احتمال أن نعين بنتا ؟

2- عينا بصفة عشوائية تلميذ من المستوى النهائي فتبين أنه بنت ، ما هو احتمال أن تكون هذه

البنت من القسم C_1 ؟

التمرين (14) (1) A و B حادثتان مستقلتان . بين أن

(أ) A و \bar{B} مستقلتان (ب) \bar{A} و B مستقلتان (ج) A و \bar{B} مستقلتان

(2) يرمي قاذفان T و S في نفس الوقت هدفا معينا . الحادثتان A " S يصيب الهدف " ، B " T

يصيب الهدف " مستقلتان و احتمالهما $p_s = \frac{4}{5}$ و $p_T = \frac{7}{8}$ على الترتيب

- أحسب احتمال الحوادث التالية :

(أ) S و T يصيبان الهدف (ب) S فقط بصيب الهدف

(ج) الهدف لم يصب (د) الهدف يصاب

(هـ) قاذف واحد يصيب الهدف

التمرين (15) نرمل ثلاث مرات قطعة نقود متوازنة

نرمز بـ X_1 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرمية الأولى (X_1 يأخذ القيمتين 0 أو 1)

و نرمز بالرمز X_2 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرميتين الثانية و الثالثة .

- تحقق أن X_1 و X_2 هما متغيران عشوائيان مستقلان

قوانين الاحتمالات المتقطعة (برنولي وثنائي الحد) و قوانين الاحتمالات المستمرة (المنتظم و الآسي)

التمرين (01) يقوم لاعب بإلقاء حجر نرد ، ويعتبر اللاعب رابحا إذا كان الوجه الظاهر للنرد هو 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمية هي 6 و يأخذ القيمة 0 إذا كانت نتيجة الرمية غير ذلك .

1- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

2- يقوم الآن اللاعب بإلقاء النرد 3 مرات متتابة في نفس الشروط . ليكن Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يربح فيها هذا اللاعب .

أ- ما هي القيم الممكنة لـ Y

ب- مثل المخارج الممكنة لهذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

ج - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y

التمرين (02) اختبار مكون من 10 أسئلة و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة من بينها إجابة واحدة صحيحة فقط ، مترشح أجاب عشوائيا على الأسئلة العشرة ، وهذه الأجوبة مستقلة عن بعضها البعض ما هو احتمال أن يكون المترشح أجاب إجابة صحيحة على :

1- ثلاثة أسئلة فقط ؟

2- كل الأسئلة ؟ 3- على الأكثر ثمانية أسئلة ؟

التمرين (03) نرمي 8 مرّات حجر نرد مكعب غير مزوّر مرقم من 1 الى 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

1) هل X يتبع قانونا ؟ في حالة الإيجاب ، أذكر القانون محدّدا وسائطه .

2) عين الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري للمتغير X

3) ما هو احتمال الحادثة " الحصول على 4 مرّات على مضاعف 3 " ؟

4) ما هو احتمال الحادثة " الحصول على 7 مرّات على الأكثر على مضاعف 3 " ؟

5) نرمي الآن الحجر n مرّة . ما هو احتمال الحادثة " الحصول على مرّة واحدة على الأقل على مضاعف 3 " ؟ - ما هي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999 ؟

التمرين (04) يحتوي مجمع اقتصادي على عدة محلات ذات طابع تجاري من بينهم مكتبة . في دراسة إحصائية لوحظ أنه من بين 10 زوار للمجمع هناك شخص واحد يزور المكتبة .

نفرض في إحدى الأيام إقبال 100 شخص على المجمع .

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي النسبة المئوية للزوار الذين يزورون المكتبة

التمرين (05) f دالة معرفة على المجال $[0;1]$ بالعبارة : $f(x) = -6x^2 + 6x$

1- بين أن f دالة كثافة احتمال على المجال $[0;1]$

2- X متغير عشوائي كثافته f .

- احسب $P(X \leq 0.5)$ ، $P(X \leq 0.1)$ ، $P(0.2 \leq X \leq 0.8)$

$$f(x) = \frac{mx^2}{1+x^3}$$

التمرين (06) ليكن m عدد حقيقي و f دالة معرفة على $[0; 1]$ كما يلي

(1) عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على $[0; 1]$

(2) ليكن X المتغير العشوائي المعروف على $[0; 1]$ و الذي قانون احتماله p و يقبل f دالة كثافة

احتماله. عين $p(X \leq \frac{1}{2})$ ، $p(X \geq \frac{1}{2})$ ، $p(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2})$ (تعطى القيم مدورة إلى 10^{-2})

التمرين (07) ليكن X متغير عشوائي مستمر و دالة الكثافة f لقانون الاحتمال X معرف على

المجال $[1; 2]$ بالعبارة : $f(x) = \alpha \cdot \frac{x + \ln x}{x^2}$ ، α عدد حقيق ثابت

1- عين α

2- احسب $E(X)$ و $V(X)$

التمرين (08) باستعمال قانون منتظم مختار بعناية حل المسألة الآتية :

في محطة نقل المسافرين تقف حافلة لنقل المسافرين لولاية معينة كل 140 دقيقة . يصل أحد المسافرين صدفه إلى هذه المحطة .

1- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي تقف أول حافلة إلى الولاية التي يقصدها .

2- عين متوسط الفترة الزمنية التي ينتظرها فيها هذا المسافر إقلاع الحافلة .

3- احسب احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 50 دقيقة.

التمرين (09) يمثل زمن الانتظار أمام الشباك في إحدى الإدارات متغيرا عشوائيا X يناسب

(بالدقائق) فترة الانتظار و يتبع قانونا أسيا بوسيط λ حيث $\lambda = 0,08$

(1) ما احتمال أن ينتظر شخص : (أ) أقل من 10 دقائق ؟ (ب) أكثر من 30 دقيقة ؟

(2) ما هو معدل زمن الانتظار ؟

التمرين (10) صندوق يحتوي على 8 قرصات صفراء و 15 حمراء غير مميزة باللمس. نسحب

عشوائيا على التوالي ودون إرجاع قرصتين من الصندوق .

1- احسب احتمال الحادثة : E "القرصة المسحوبة الأولى صفراء"

2- نكرر سبعة مرات هذه التجربة، و بعد كل تجربة نرجع القرصتين إلى الصندوق . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة المتمثلة في عدد وقوع الحادثة E خلال التجارب السبعة.

* احسب احتمال الحادثة A " الحادثة E تقع بالضبط 3 مرات"

ب* احسب احتمال الحادثة B " الحادثة E تقع 6 مرات على الأقل"

التمرين (11) تمت نمذجة مدة صلاحية حاسوب بالأشهر بواسطة متغير عشوائي X يتبع قانون

أسي ذو الوسيط 0.01

1- ما هو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أصغر من 50 شهرا

2- ما هو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أكبر من 50 شهرا .

التمرين (12) في دراسة أعدتها مؤسسة الكهرباء عن الأخطار التي يتعرض لها عمالها ، تبين أن كل عامل معرض باستمرار الى خطرين رئيسيين : الخطر (A) " سقوط العامل من العمود الكهربائي " احتمالته 0,03 و الخطر (B) " تعرض العامل لصعق كهربائي " احتمالته 0,17 ، مع العلم أن الخطرين مستقلان عن بعضهما البعض . نسمي العامل الذي يصاب بأحد الخطرين " عامل مصاب " .

(1) نأخذ عاملا عشوائيا من هذه المؤسسة . بين أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949

(2) هذه المؤسسة تضم 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق عمال المؤسسة بعدد العمال المصابين . - عرّف قانون X و احسب أمله الرياضي

(3) في فصل الشتاء شكلت المؤسسة فوجا مكونا من 10 عمال للتدخل السريع من أجل إصلاح مختلف الأعطاب التي قد تحدث جراء التقلبات الجوية . أحسب احتمال أن يكون في هذا الفرع أكثر من عاملين مصابين .

(b) حتى لا يؤثر المصابون على أداء زملائهم ، فكرت إدارة المؤسسة في إعادة تشكيل فرع التدخل السريع بحيث يصبح احتمال وجود عاملا مصابا على الأقل ، أقل من 50% . ماهو أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفرع ؟

التمرين (13) كيس يحتوي على ثلاث قريصات حمراء ، وقريصتين بيضاوين و أربع قريصات خضراء ، لا نفرق بينها عند اللمس .

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث قريصات من الكيس . احسب احتمال كل من الحوادث التالية

A : " القريصات الثلاث المسحوبة من نفس اللون "

B : " القريصات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان "

C : " من بين القريصات الثلاث المسحوبة ، اثنتين فقط من نفس اللون "

2. نكرر السحب السابق n مرة متتالية ($n \geq 2$) ، حيث في كل مرة نعيد القريصات المسحوبة إلى الكيس . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ عدد المرات التي تكون فيها القريصات المسحوبة مختلفة الألوان . أ- احسب احتمال الحادثة ($X = 2$)

ب- بين أنه يجب على الأقل اربع سحب متتالية حتى يكون الأمل الرياضي اكبر أو يساوي 1

التمرين (14) (1) نرمي حجري نرد عاديين مرة واحدة .

- احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10 ؟

(2) نرمي الآن حجر النرد 5 مرات متتالية و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل 5 رميات بعدد المرات التي نحصل فيها على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10

- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

التمرين (15) * (1) متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, p)$ برهن أن :

$$E(X) = n.p \text{ و } V(X) = np(1-p)$$

(2) متغير عشوائي يتبع القانون الأسى ذي الوسيط λ برهن: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ و $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) صندوق به 8 كرات بيضاء و n كرة سوداء ($n \geq 2$). نفرض أن سحب كرة بيضاء يعطي ربح نقطة وسحب كرة سوداء يفقد نقطتين. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط المحصل عليها.

- I/ سحب من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي
- 1) عين قيم المتغير العشوائي X . (2 عين قانون الاحتمال
 - 3) احسب الأمل الرياضي $E(x)$ ثم عين العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X) = 0$
- II / نفرض الآن $n = 6$. نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد
- 1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
 - 2) احسب أمله الرياضي.

التمرين (02) يحتوي كيس U_1 على 5 كرات: ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرتان تحملان الرقم 3، و يحتوي كيس U_2 على 5 كرات: ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس).

- نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرة من الكيس U_2 حيث n هو الرقم الذي تحمله الكرة المسحوبة من الكيس U_1 .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.
- 1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . (2) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين (03) ظهر مرض في مزرعة سلالة أبقار بدولة ، وجد انه مس 0.5% من أبقار المزرعة

1. نختار عشوائيا حيوان من المزرعة. ما احتمال أن يكون مصاب بالمرض؟
2. أ) نختار عشوائيا على التوالي 10 حيوانات من المزرعة. نسمي X المتغير العشوائي المساوي لعدد الحيوانات المصابة من هذه الحيوانات. برهن أن X يتبع توزيع ثنائي الحد يطلب تعيين الوسيطين . احسب الأمل الرياضي
- ب) نسمي A الحادثة: " لأحد من الحيوانات 10 مصاب بالمرض "
ونسمي B الحادثة: "واحد ، على الأقل ، من الحيوانات 10 مصاب بالمرض "
- احسب احتمال A و احتمال B
3. بينت الدراسة أن لدى حيوان احتمال أن يكون الإختبار ايجابي لوجود المرض بحيث الحيوان مريض يساوي 0.8 . وعندما يكون الحيوان غير مريض ، احتمال أن يكون الإختبار سلبي يساوي 0.9 . نرمز T للحادثة " الإختبار ايجابي لوجود المرض " و M للحادثة " الحيوان مصاب بالمرض "
أ- أنشئ الشجرة المتقلة التي تعبر عن المعطيات السابقة .
ب- احسب احتمال الحادثة T
- ج- احسب احتمال أن يكون حيوان مريض علما أن الإختبار ايجابي لوجود المرض

النمرين (04) يتشكل قطاع الإنتاج بمؤسسة من 3 أصناف من العمال :

مهندسين بنسبة 8% وعمال إنتاج بنسبة 82% والباقي اعوان صيانة .

النساء يمثلن 50% من المهندسين و 25% من أعوان الصيانة و 60% من عمال الإنتاج.

I- تم استجواب أحد أعضاء هذه المؤسسة عشوائيا

1- أنشئ الشجرة المثقلة التي تعبر عن المعطيات السابقة .

2- أحسب احتمالات الحوادث التالية العضو المستجوب هو :

$$A = (\text{عون صيانة}) . B = (\text{عاملة صيانة}) . C = (\text{امرأة}).$$

II- مصلحة الصيانة تقوم بمراقبة الماكينات كما تستدعى للتدخل عند وقوع عطل. من أجل ذلك

وضعت صفارة للإنذار وبينت الدراسات أنه خلال اليوم :- احتمال عدم حدوث عطل ولا انطلاق

لصفارة الإنذار يساوي 0.002 ، احتمال وقوع عطل وانطلاق لصفارة الإنذار يساوي 0.003.

احتمال وقوع عطل هو 0.04.

1- بين أن احتمال حدوث عطل وعدم انطلاق لصفارة الإنذار هو 0.037.

2- ما هو احتمال عدم انطلاق صفارة الإنذار.

3- ما هو احتمال حدوث عطل علما أن صفارة الإنذار لا تنطلق.

النمرين (05) يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء تحمل الأعداد 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 وكرتين

سوداوين تحملان العددين 0 ، 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

1) احسب احتمال كل من الحدثين :

A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون "

B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بمجموع العددين المسجلين على الكرتين

المسحوبتين . أ) عين قيم المتغير العشوائي

ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . ج) احسب الأمل الرياضي

النمرين (06) لصيانة أجهزة التدفئة تراقب شركة عن بعد خلال فصل الصيف الأجهزة .

نعلم أن 20% من الأجهزة هي تحت الضمان . من بين الأجهزة التي تحت الضمان يكون احتمال عدم

صلاحية أحداها $\frac{1}{100}$ ، و من بين الأجهزة التي ليست تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحداها

$\frac{1}{10}$. نسمي G الحادثة " المدفئة تحت الضمان "

1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " المدفئة تحت الضمان و هي غير صالحة " ، B " المدفئة غير صالحة "

2) في سكن ما المدفئة غير صالحة . بين أن احتمال أنها تحت الضمان هو $\frac{1}{41}$

3) المراقبة مجانية إذا كانت المدفئة تحت الضمان ، و يقدر ثمن المراقبة بـ 800 DA إذا كانت المدفئة

ليست تحت الضمان و هي صالحة بينما يقدر بـ 2800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي

صالحة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن تكلفة مراقبة مدفئة . عين قانون احتمال X و

أمله الرياضي.

التمرين (07) I نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_1 = \frac{1}{2}$ و العلاقة التراجعية

$$U_{n+1} = \frac{1}{6}U_n + \frac{1}{3}$$

لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي $V_n = U_n - \frac{2}{5}$

- تحقق أن المتتالية (V_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها . أكتب U_n بدلالة n

II نعتبر حجر نرد A و B حيث A يحوي 3 أوجه حمراء و 3 أوجه بيضاء بينما يحوي B ، 4 أوجه حمراء و

وجهين أبيضين . نأخذ عشوائياً أحد الحجرين و نرميه ، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر و إذا حصلنا

على وجه أبيض نغير الحجر و نرمي مرة ثانية و هكذا ...

نسمي A_n الحادثة " نستعمل الحجر A في الرمية n " و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها كما نسمي R_n الحادثة " نستعمل

الحجر R في الرمية n " و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها و نرمز بالرمزين a_n ، r_n لاحتمالي الحادتين R_n و A_n على

الترتيب . 1) عين a_1

2) عين r_1 (يمكن استعمال شجرة الاحتمالات)

3) بملاحظة أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $R_n = (A_n \cap R_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ و بين أن $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$

4) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$

5) استنتج أجل كل $n \geq 1$ يكون $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم أكتب a_n بدلالة n

6) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$

التمرين (08) I حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب c_1 و c_2 الأعداد :

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 0, 0 \quad \text{و} \quad \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0, 0$$

نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ c_1 و c_2 . نرمز لهذين العددين بـ α و β .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha + \beta)$.

1) ماهي القيم الممكنة للمتغير X ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول) .

2) عيّن قانون احتمال X .

3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(x)$ للمتغير العشوائي X .

II نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص ما $100 DA$ عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على

$\sin(\alpha + \beta) = 1$ أو $\sin(\alpha + \beta) = -1$ ، ويخسر $50 DA$ في باقي الحالات .

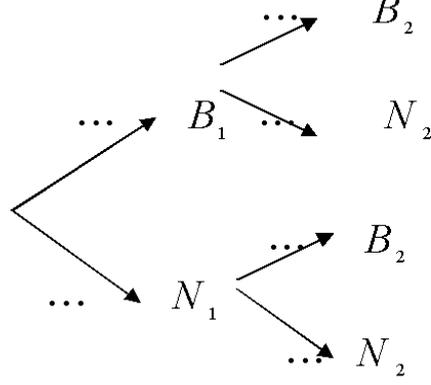
1) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .

1) عيّن قانون احتمال Y .

2) نرمي حجري النرد 5 مرات . ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب $300 DA$ ؟

التمرين (09) يحتوي كيس U_1 على k كرات بيضاء (k عدد طبيعي اكبر او يساوي 1) وثلاث كرات سوداء و يحتوي كيس U_2 على كرتين بيضاويتين و كرة سوداء (لايمكن التمييز بين الكرات باللمس) . نسحب كرة عشوائيا من الكيس U_1 و نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب كرة عشوائيا من الكيس U_2 . مجموعة هذه العمليات تشكل تجربة .

نسمي B_1 (على التوالي N_1) الحادثة " نسحب كرة بيضاء (على التوالي سوداء) من الكيس U_1 و نسمي B_2 (على التوالي N_2) الحادثة " نسحب كرة بيضاء (على التوالي سوداء) من الكيس U_2 .
1. ا- أكمل الشجرة المثقلة التالية :



ب- برهن أن احتمال الحادثة B_2 يساوي : $\frac{3k+6}{4k+12}$

في كل ما يلي نفرض $k=12$

2. لاعب مسجل لديه 8 نقاط كرصيد أولي ويقوم بتجربة . إذا كان في نهاية التجربة يحصل على كرة بيضاء من الكيس الثاني يربح اللاعب 12 نقطة و إلا لا يربح اية نقطة و يفقد رصيده .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل تجربة بـ الفرق بين النقاط المحصل عليها و الرصيد الأولي . أ- بين أن قيم المتغير العشوائي هي : 4 و -8

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج - احسب الأمل الرياضي

3. لاعب يقوم بهذه التجربة n مرة متتالية و مستقلة في بداية كل تجربة يكون الكيس U_1 به 12 كرة بيضاء و 3 سوداء و الكيس U_2 به 2 بيضاء و واحدة سوداء .

- عين اصغر عدد طبيعي n بحيث احتمال تحقق الحادثة B_2 على الأقل مرة يفوق 0.99

التمرين (10) باع محل للأجهزة الكهرومنزلية 4 ثلاجات في يوم واحد مضمونة لمدة 5 سنوات . احتمال أن لا تتعطل كل ثلاجة خلال فترة الضمان هو 0.9

1- احسب احتمال أن لا تتعطل الثلاجات الأربعة خلال فترة الضمان

2- احسب احتمال أن تتعطل ثلاجتان فقط خلال فترة الضمان .

التمرين (11) يقوم ممون ببيع نوعين أسلاك C_1 و C_2 ، بحيث تتضمن كل شحنة يبيعهها 20% من النوع C_1 و 80% من النوع C_2

الجزء (أ) : في هذا الجزء لا يطلب أي حساب تقريبي .

نأخذ عشوائيا 4 أسلاك من شحنة تتكون من 50 سلكا .

1/ أعط احتمال تحقق الحادثة E " نتحصل على 4 أسلاك من النوع C_1 "

2/ أعط احتمال تحقق الحادثة F : "نتحصل على سلك واحد من النوع C_1 و 3 أسلاك من النوع C_2 "
 3/ أعط احتمال تحقق الحادثة G : "نتحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1 "
 الجزء (ب) في هذا الجزء نأخذ عشوائياً سلكاً واحداً من شحنة ونسجل نوعه ثم نعيده إلى هذه الشحنة
 نرسم لهذه التجربة بالرمز \otimes ونكررها n مرة. ليكن X عدد الأسلاك من النوع C_1 التي نتحصل
 عليها بهذه الطريقة .

(1) نفرض أن $n = 4$. تعطى النتائج بتقريب قدره 10^{-4} بالنقصان .

أ- احسب احتمال الحصول على سلكين من النوع C_1 .

ب- احسب احتمال الحصول على سلك واحد ، على الأقل ، من النوع C_1 .

ج- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

(2) في هذا السؤال n مجهول .

أ- عبر عن $P(X \geq 1)$ بدلالة n .

ب- كم من مرة يجب تكرار التجربة \otimes حتى نستطيع القول أننا متأكدين بنسبة 90% من أننا

سنحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1 ؟

الهدية

توجيهات و إرشادات

التحضير لامتحان

- قبل موعد الامتحان بأسابيع ننتبث في القواعد والدراسات الأساسية لكل موضوع (مراجعة كراس التلخيص) و نعالج نماذج من تداريب و بكالوريات تجريبية (مثلاً)
- لا تكثر السهر المفرط وخاصة قبل موعد الامتحانات بأيام .
- المراجعة المكثفة وغير المنظمة والمتأخرة لا تجدي نفعا بل تحدث تشويش وتعب
- تجنب كل التكهنات والتوقعات الخاصة بالمواضيع المختارة في البكالوريا ولا تكن ضحية إشاعات وألزم التحضير الجاد .
- لا تتخوف عند اقتراب الامتحان ، بل ثق أن سنة الله في الكون كل مجتهد محضر جيد يوفق إلى الخير بحول الله
- تحضير الوسائل والأدوات الضرورية والوثائق الثبوتية (بطاقة التعريف و الاستدعاء)
- الإطلاع الجيد لجدول سير الاختبارات
- إبتعد عن الزملاء المرتبكين وذوي العزائم الضعيفة .
- كن صاحب أمل وثقة في الله .

يتبع .. كيفية معالجة موضوع الامتحان

سلسلة استعداد للبيكالوريا رقم 9
العد (التحليل التوفيقى)

التمرين (01) : توزيع الكرات :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	المجموع
العدد	4	6	8	18
مرقمة من	1 إلى 4	1 إلى 6	1 إلى 8	

لنسحب : ثلاث كرات في آن واحد (توفيقية)

(1 أ) عدد الحالات للحصول على 3 أرقام فردية :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	عدد الأرقام الفردية
عدد كرات	4	6	8	
أرقام فردية	3 ، 1	5 ، 1 ، 3	7 ، 5 ، 3 ، 1	9

$$C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

نختار 3 أرقام فردية من بين 9 أرقام فردية عدد الاختيارات: $C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

(ب) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء على الأقل:

على الأقل كرة حمراء من بين الثلاثة تعني					!!!!	
المجموع	3 حمراء	إما	2 حمراء و 1 ليست حمراء	إما		1 حمراء و 2 ليست حمراء
452	C_4^3	+	$C_4^2 \times C_{14}^1$	+		$C_4^1 \times C_{14}^2$
	4	+	6×14	+	4×91	العدد

طريقة ثانية : الحالة الوحيدة التي لم تحسب من بين كل الحالات الممكنة في الجدول (!!!!) هي سحب ثلاث كرات ليست حمراء وعدد الحالات الممكنة لذلك هي : $C_{14}^3 = 364$ نطرح هذا العدد من عدد

كل الحالات الممكنة أي C_{18}^3 نجد كذلك 452 .

(ج) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4 .

توجد 3 كرات تحمل الرقم 4 نختار من بينها كرة واحدة و توجد 14 كرة لا تحمل الرقم 4 نختار من بينها

$$. C_3^1 \times C_{14}^2 = 3 \times 91 = 273$$

اثنتان. عدد الحالات هو : $C_3^1 \times C_{14}^2 = 3 \times 91 = 273$.

التمرين (02) : المعطيات : 3 كتب رياضيات + 2 كتب فيزياء + 4 كتب أدب عربي

التجربة : وضع هذه الكتب (عددها 9) على رف مكتبته

(أ) وضع كتب نفس المادة متجاورة : هذه الحالة تمثل ترتيب 3 مواد وعددها هو عدد التباديلات ذات 3 عناصر.

$$. 3 ! = 6$$

عدد الحالات الممكنة يساوي $3 ! = 6$.

(ب) كتب الأدب العربي فقط تبقى متجاورة : نتعامل هنا مع مجموعة كتب الأدب العربي كعنصر واحد في تبديلها مع

$$. (3+2)$$

بقية العناصر أي الكتب الخمسة (2+3) .

$$. 6 ! = 720$$

عدد الحالات الممكنة : $6 ! = 720$.

(ج) دون أي شرط : عدد الحالات هو عدد التباديلات ذات 9 عناصر : $9 ! = 362880$.

التمرين (03):

(1) لما $n = 0$ ، الخاصية صحيحة لأن : $2^0 = C_0^0 = 1$.

لما $n \neq 0$ ، نعوض $a = b = 1$ في دستور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = C_n^0 \times a^n + C_n^1 \times a^{n-1} \times b + \dots + C_n^p \times a^{n-p} \times b^p + \dots + C_n^n \times b^n \quad (p \leq n)$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 \times 1^n + C_n^1 \times 1^{n-1} \times 1 + \dots + C_n^p \times 1^{n-p} \times 1^p + \dots + C_n^n \times 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$$

(2) (أ) $n \geq m$ و m و n عدنان طبيعيان حيث $n \geq m$ هنا يجب فرض $m \geq 1$. نبرهن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

$$mC_n^m = m \times \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{(m-1)! \times (n-m)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times ((n-1)-(m-1))!} = n \times C_{n-1}^{m-1}$$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m : \text{ قيمة المجموع (ب)}$$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m = 0 \times 1 + 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + \dots + p \times C_n^p + \dots + n \times C_n^n$$

$$= 0 + n \times C_{n-1}^0 + n \times C_{n-1}^1 + \dots + n \times C_{n-1}^{p-1} + \dots + n \times C_{n-1}^{n-1}$$

$$= n \times (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{p-1} + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n \times 2^{(n-1)}$$

التمرين (04):

(1) (أ) حل المعادلة : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n + 1$ بما أن مهما يكن $n : C_n^0 = 1$

المعادلة تكتب : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n$. حتى تقبل المعادلة حلولا يجب أن يكون عددا زوجيا لأن

الطرف الأول عدد طبيعي و يكون الطرف الثاني طبيعيا إذا كان n زوجيا .

* إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0 .

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 5 .

* إذا كان $n \geq 3$ فإن : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = \frac{5}{2}n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 = 16$ أي $n = 4$. مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$ (ضرورة التحقق) .

(ب) حل المعادلة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

* إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0

* إذا كان $n = 1$ فإن الطرف الأول يساوي 1 و الطرف الثاني يساوي 8

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 6 و الطرف الثاني يساوي 16

* إذا كان $n \geq 3$ فإن : $C_n^3 + C_{2n}^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2} = 8n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 + 9n - 52 = 0$ ، $\Delta = 289 = 17^2$ ، و $n = 4$ مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة : } \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$$

الشروط : $y-1 \geq 0$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{(x+y) \times (x+y-1)}{2} = 10 \end{cases} \text{ الحالة الأولى : } x < y-1 \text{ و } x+y \geq 2 \text{ . تكتب الجملة :}$$

أي $(x+y) \times (x+y-1) = 20$ بما أن $(x+y)$ و $(x+y-1)$ عددين متتابعين نستنتج أن : $x+y=5$. الثنائيات الطبيعية التي تحقق هي : $(0,5)$ و $(1,4)$.

$$\text{الحالة الثانية : } x \geq y-1 \text{ و } x+y \geq 2 \text{ تكتب الجملة : } \begin{cases} C_x^y + C_x^{y-1} = C_x^{y-1} \\ \frac{(x+y) \times (x+y-1)}{2} = 10 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} C_x^y = 0 \\ \frac{(x+y) \times (x+y-1)}{2} = 10 \end{cases}$$

أي $x+y=5$ و $x < y$. الثنائي، التي تحقق هي : $(2,3)$. حلول الجملة هي الثنائيات $(0,5)$; $(1,4)$; $(2,3)$.

التمرين (05) : مركز الأبحاث يتكون من 6 باحثين و 4 باحثات

اللجنة : 4 أعضاء

(1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها : عدد التوفيقات ذات 4 عناصر من مجموعة ذات 10 عناصر

$$C_{10}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

(2) أ) عدد اللجان التي تضم 4 باحثات : $C_4^4 = 1$

ب) عدد اللجان التي تضم باحثة واحدة فقط : $C_4^1 \times C_6^3 = 4 \times 20 = 80$

ج) عدد اللجان التي تضم باحثة على الأقل : $C_{10}^4 - C_6^4 = 210 - 15 = 195$ (انظر التمرين (01))

د) يوجد في اللجنة باحثان على الأكثر :

تعني : (باحثان و باحثتان) إما (باحث و ثلاث باحثات) إما (أربع باحثات)

$$\text{العدد : } C_6^2 \times C_4^2 + C_6^1 \times C_4^3 + C_4^4$$

بعد الحساب نجد : 115 .

(3) عدد اللجان التي تضم رئيسا ونائبا له وكاتبين : عدد الترتيبات ذات 4 عناصر أي :

$$(4!) \times C_{10}^4 = 24 \times 210 = 5040$$

التمرين (06) : n عدد طبيعي غير معدوم : $L_n = 9C_{n+1}^2 + 27C_{n+1}^3 + 81C_{n+1}^3 + \dots + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

(1) نبين أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

نعوض في دستور ثنائي الحد : $a = 3$ و $b = 1$ (انظر التمرين (03))

$$4^{n+1} = (1+3)^{n+1} = C_{n+1}^0 \times 1^{(n+1)} + C_{n+1}^1 \times 1^n \times 3^1 + C_{n+1}^2 \times 1^{(n-1)} \times 3^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1} \times 1^0 \times 3^{(n+1)}$$

$$4^{n+1} = 1 + (n+1) \times 3 + 3^2 \times C_{n+1}^2 + 3^3 \times C_{n+1}^3 + \dots + 3^{n+1} \times C_{n+1}^{n+1}$$

$$4^{n+1} = 3n + 4 + L_n$$

$$L_n = 4^{n+1} - 3n - 4 \quad \text{نستنتج أن :}$$

$$(2) \text{ حساب المجموع : } S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

$$S_n = (4^2 - 7) + (4^3 - 10) + \dots + (4^{n+1} - 3n - 4)$$

$$= (4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n+1}) - (7 + 10 + \dots + 3n + 4)$$

القوس الأول يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 4^2 وأساسها 4 وعدد حدودها $(n-1)$ و القوس الثاني يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 7 وأساسها 3 وعدد حدودها $(n-1)$

$$S_n = \left(4^2 \times \frac{4^{(n-1)} - 1}{4 - 1} \right) - \left((n-1) \times \frac{(7 + 3n + 4)}{2} \right) = \frac{16}{3} (4^{(n-1)} - 1) - \frac{(n-1) \times (3n + 11)}{2}$$

التمرين (07) :

(1) برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times (n!) = (n+1)! - 1$: المرحلة الأولى :

التحقق من أجل $n = 0$. الطرف الأول : $0 \times 0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي n . نفرض : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times (n!) = (n+1)! - 1$ ونبرهن أن : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + (n+1) \times (n+1)! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + (n+1) \times (n+1)! = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1) \times (1 + n + 1) - 1 = (n+1)! (n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] = \frac{(2n)!}{n!}$: المرحلة الأولى :

التحقق من أجل $n = 1$. الطرف الأول : $2^1 \times 1 = 2$ والطرف الثاني : $\frac{(2 \times 1)!}{2!} = \frac{2!}{2!} = \frac{2}{2} = 1$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي n غير معدوم نفرض : $2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] = \frac{(2n)!}{n!}$

$$\text{ونبرهن أن : } 2^{(n+1)} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2(n+1)-1)] = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$$

$$2^{(n+1)} [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2(n+1)-1)] = 2 \times 2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)]$$

$$= 2^n [1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1)] \times 2 \times (2n+1)$$

$$= \frac{(2n)!}{n!} \times 2 \times (2n+1) = \frac{(2n)!}{n! (n+1)} \times (2n+1) \times 2(n+1)$$

$$= \frac{(2n)! \times (2n+1) \times (2+2)}{(n+1)! n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين (08): المعطيات: صندوق (10 كرات) :
 4 سوداء }
 6 بيضاء }

التجربة : 3 كرات في آن واحد : (توفيق ذات 3 عناصر)

- (1) أ) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء : $C_6^1 \times C_4^2 = 36$
 ب) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء على الأقل : $C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 = C_{10}^3 - C_4^3 = 116$
 ج) عدد الحالات للحصول على 3 كرات ليست من نفس اللون : $C_{10}^3 - (C_4^3 + C_6^3) = 120 - (4 + 20) = 96$
 الشرح : من عدد كل الحالات الممكنة نحذف الحالات التي تكون فيها كل الكرات حمراء وعددها 4 والحالة التي تكون فيها كل الكرات سوداء وعددها 20 .

(2) المعطيات: صندوق (2n + 10) كرات :
 (n+4) سوداء }
 (n+6) بيضاء }

التجربة : سحب كرتين معا (لأن X_n عدد الحالات لسحب كرتين من نفس اللون)

$$X_n = C_{n+4}^2 + C_{n+6}^2 = \frac{(n+4) \times (n+3)}{2} + \frac{(n+6) \times (n+5)}{2}$$

أ) حساب العدد X_n :

$$= \frac{(n^2 + 7n + 12) \times (n^2 + 11n + 30)}{2} = \frac{2n^2 + 18n + 42}{2} = n^2 + 9n + 21$$

ب) نحل المعادلة : $X_n = 10713$ أي $n^2 + 9n - 10692 = 0$ نجد $\Delta = 42849$ و $n = 99$.

التمرين (09): يعطى المنشور التالي : $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ نفرض طبعا $x \neq 0$

حسب دستور ثنائي الحد كل حد من حدود النشر يكتب : $C_{15}^p \times (x^3)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p$ مع $0 \leq p \leq 15$.

بما أن $x^{45-3p} \times \frac{(-2)^p}{x^{2p}} = (-2)^p \times x^{45-5p}$ فإن كل حد من الحدود يكتب :

$$C_{15}^p \times (-2)^p \times x^{45-5p}$$

(1) يكون الحد درجته 10 إذا كان : $45 - 5p = 10$ أي $p = 7$. الحد هو : $C_{15}^7 \times (-2)^7 \times x^{10}$

(2) الحد التاسع تقابله قيمة $p = 8$. الحد هو : $C_{15}^8 \times (-2)^8 \times x^5$ لأن قيمة p تبدأ من 0 .

(3) يكون الحد ثابتا إذا كان : $45 - 5p = 0$ أي $p = 9$. الحد هو $C_{15}^9 \times (-2)^9 \times x^0 = C_{15}^9 \times (-2)^9$

التمرين (10) :

(1) إثبات أن : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ الشرط : $n \geq m \geq 1$

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times (n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m! \times (n-m-1)!} = \frac{(n-1)! [m+n-m]}{m! \times (n-m)!} = \frac{(n-1)! \times n}{m! \times (n-m)!} = C_n^m$$

استنتاج أن : $C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$

بتعويض m بـ $m+1$ و تعويض n على التوالي بالقيم $n-2, n, n+1, \dots, m+1, m$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \quad \text{في}$$

بالجمع طرف طرف و اختزال الحدود المتساوية

يبقى في الطرف الأول الحد C_{n+1}^{m+1}

و يبقى في الطرف الثاني المجموع المطلوب :

$$C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$$

ملاحظة في الطرف الثاني : $C_m^{m+1} = 0$

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1} \quad \text{نحصل على :}$$

$$C_n^{m+1} = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m+1}$$

$$C_{n-1}^{m+1} = C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m+1}$$

$$C_{n-2}^{m+1} = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m+1}$$

.

.

$$C_{m+2}^{m+1} = C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1}$$

$$C_{m+1}^{m+1} = C_m^m + C_m^{m+1}$$

(2) * حساب المجموع : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

بتعويض $m = 1$ في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1) \times n}{2} \quad \text{أي} \quad C_n^1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_1^1 = C_{n+1}^2$$

* حساب المجموع : $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n-1)$

بتعويض $m = 2$ في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1) \times (n-2)}{2} + \dots + \frac{2 \times 1}{2} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2} \quad \text{أي} \quad C_n^2 + C_{n-1}^2 + \dots + C_2^2 = C_{n+1}^3$$

بضرب الطرفين في 2 نجد : $S_2 = \frac{(n+1)n \times (n-1)}{3}$

* حساب المجموع : $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

لدينا $n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n$ بالتعويض في عبارة S_3

$$S_3 = 1 + (2 + 2 \times 1) + (3 + 3 \times 2) + \dots + (n + n(n-1))$$

$$= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n)$$

$$= S_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الأستاذ : حميدي بوتلجة من البيض

التاريخ : 2008/05/25