سلسلة استعد للبكالوريا رقم (9)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبــــــة :علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي

إعداد الأستاذ حليلات عمار

المحاور : العد (التحليل التوفيقي) + الاحتمالات

العد (التحليل التوفيقي)

التمرين (01) يحتوي كيس على 18كرة منها4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و6كرات بيضاء مرقمة من1الى6 و 8 كرات خضراء مرقمة من1الى8.

1. نسحب من هــذا الكيس 3كرات **في آن واحد**.ما هــو عدد الحالات التي نحصل فيهـــا على:
أ) 3ارقام فردية   ب)كرة حمراء على الأقل   جـ)كرة واحدة فقط تحمل الرقم4
2. نحسب من هــذا الكيس 3كرات على **التوالي بحيث نعيد في كل مرة** الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي.ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:
أ) 3ارقام فردية   ب)كرة حمراء على الأقل   جـ)كرة واحدة فقط تحمل الرقم4

التمرين (02) اشترى احد التلاميذ المجتهدين 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب للأدب العربي ثم أراد أن يضعهم على رف مكتبته فما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك إذا :
أ) أراد وضع الكتب ذات نفس المادة متجاورة
ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة .   ج) دون شرط .

التمرين (03) : 1/ n عدد طبيعي ، اثبت أن : $C_n^0+C_n^1+........+C_n^n=2^n$

2/ n و m عددان طبيعيان حيث : $n\geq m$

أ- أثبت أن : $mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1}$

ب- استنتج قيمة مبسطة للمجموع S حيث : $S=\sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

التمرين (04) 1/ أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $C_n^0+C_n^2+C_n^3=\dfrac{5n}{2}+1$ ،   ب) $C_n^3+C_{2n}^2=8n$

2/حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة التالية : $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

إعداد الأستاذ حليلات عمار

التمرين (05) في مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4 باحثات. **1)** ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف التالية:

أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات؟ ب) من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط؟

جـ) من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة.

د) من بين الأعضاء المختارين يوجد على الأكثر باحثان

3) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلهاإذا كانت هذه اللجنة تضم **رئيسا ونائبا له و كاتبين**

التمرين (06) n عدد طبيعي غير معدوم . نضع :

$$L_n = 9C_{n+1}^{2} + 27C_{n+1}^{3} + 81C_{n+1}^{4} + ... + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

1/ بيّن أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2/ نضع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$ ، **احسب** S_n **بدلالة** n

---

التمرين (07) 1/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1\times1! + 2\times2! + ... + n\times n! = (n+1)! - 1$$

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$2^n\left[1\times3\times5\times7\times.......\times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$$

التمرين (08) يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ جـ) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = n^2 + 9n + 21$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين (09) ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$

1) أكتب الحد الذي درجته 10. 2) أوجد معامل الحد التاسع. 3) أوجد الحد الثابت

التمرين (10) 1) أثبت أن $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$ ثم استنتج أن : $C_m^m + C_{m+1}^m + ... + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$

2) أحسب المجاميع التالية : $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ،

$S_2 = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + ... + (n-1)n$ ،

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

حساب الإحتمال و المتغير العشوائي والأمل الرياضي

التمرين (01) : يحتوي كيس على 10قريصات مرقمة من1إلى 10(لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال

1)أحسب عدد السحاب الممكنة

2)أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية

3)أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أعداد أولية

4)أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحد منها عدد غير أولي

5)أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم إحداها على الأقل رقم أولي

تعطى كل النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى كل واحدة منها مقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان

التمرين (02) يحتوي كيس على10كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،منها 3حمراء، 3 خضراء و 4 بيضاء

1)نسحب من هذا الكيس،ثلاث كرات، في آن واحد، ما احتمال الحصول على:

أ) – نفس اللون؟

ب) – الألوان الثلاثة؟

جـ)– كرة بيضاء واحدة على الأقل؟

2)نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

أ–ما هو قانون الاحتمال المتغير العشوائي X؟

ب–احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين والانحراف المعياري .

التمرين (03) على أوجه حجرين نرد متزنين منقوش الأعداد :

الحجـــــر الأول : 0، 0، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

الحجـــــر الثاني : 0، 0، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$

نلقي الحجرين في آن واحـــد ، لتكن α و β الأعداد المنقوشة على الأوجه العلوية .

ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رمية العدد الحقيقي $\sin(\alpha+\beta)$

1/ أوجد قيم المتغير العشوائي X ثم عين قانون الاحتمال .

2/ احسب الأمل الرياضي

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (04) يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

3)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ ثم أحسب التباين $V(X)$

4) أوجد $P(X \geq 25)$

التمرين (05) ليكن x المتغير العشوائي المعرف كمايلي :

α	-1	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X \prec 1)$

3)أحسب $P(X^2 \leq 2)$ ، 4) احسب $P(X^4 - 6X + 8 \prec 0)$

التمرين (06) يحتوي كيس على12قريصة متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 1 إلى 12 (لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) . نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال .

1/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها تقبل القسمة على 3.

2/ أحسب احتمال سحب قريصة واحدة رقمها يقبل القسمة على 3.

3/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها 3.

4/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

التمرين (07) صندوق به 8 كرات بيضاء و n كرة سوداء ($n \geq 2$).نفرض أن سحب كرة بيضاء يعطي ربح نقطة وسحب كرة سوداء يفقد نقطتين . X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط المحصل عليها.

I/نسحب من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي

1)عين قيم المتغير العشوائي X . 2) عين قانون الاحتمال

3) احسب الأمل الرياضي $E(x)$ ثم عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=0$

II/ **نفرض الآن** $n=6$.

نسحب من هذا الكيس 3 كرات في آن واحد

1)عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2)احسب أمله الرياضي.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (08) تحتوي علبة على6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.نسحب في آن واحد5 كرات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة
- عين قانون احتمال هذا المتغير العشوائي
- أحسب أمله الرياضي

2) α عدد حقيقي .

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل سحب يحتوي على x كرة بيضاء و y كرة سوداء العدد : $\alpha x - y$

- عيّن العدد α حتى يكون الأمل الرياضي معدوما .

التمرين (09) نرمي نردين معا ونسجل الرقمين س وَ سَ المحصل عليهما .

1/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي المعرف كما يلي : $y = |x - x'|$
- احسب أمله الرياضي .

2/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي المعرف كما يلي : $z = \max(x\,;x')$
- احسب أمله الرياضي .

التمرين (10) يحتوي كيس على14 قريصة:4 قريصات تحمل الحرف مـ و3 قريصات تحمل الحرف د و3 قريصات تحمل الحرف يـ وقريصتان تحملان الحرف نـ وقريصتان تحملان الحرف ة نسحب في آن واحد 5 قريصات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

1)ما هو الاحتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "**مدينة**"

2)ما هو الاحتمال لكي لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف مـ؟

3)ما هو الاحتمال لكي تحمل إحدى القريصات المسحوبة على الأقل الحرف مـ؟

4) ما هو الاحتمال لكي تحمل اثنتان من بين القريصات المسحوبة-على الأقل الحرف مـ؟

-تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى قيمها المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالزيادة

التمرين (11) زهرة نرد **غير متوازنة** أوجهها تحمل الأرقام 1،2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إحتمالات ظهورها في رمية واحدة هي P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 على الترتيب.

1.علما أن هذه الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية ، أوجد الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 .

2.نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة .

أ- ما احتمال ظهور رقم زوجي ؟

ب- ما احتمال ظهور رقم مضاعف لـ 3 ؟

3.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضياتي ثم التباين و الإنحراف المعياري .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (12) كيس أ يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 4 ، 4 و كيس ب يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 4 .

نسحب قريصة من الكيس أ ثم قريصة من الكيس ب و نفرض أن x الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس أ و أن y الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس ب .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين $(x = y)$

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية $(x ، y)$ العدد x^y .

– عيّن قانون الاحتمال واحسب أملـــــه الرياضي .

التمرين (13) لتحضير مسابقة طلب من أربعة أساتذة أ ، ب ، جـ ، د تقديم تمرينين من طرف كل أستاذ (تمرين جبر وتمرين تحليل) . المتر شح يختار تمرينين من بين 8 التمارين المقترحة . طالب اختار تمرينين عشوائيا . احسب احتمال أن يكون :

1/ التمرينين المختارين جبر .

2/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف أستاذ واحد .

3/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف الأستاذ أ .

التمرين (14) نريد تقدير كثافة السمك في إحدى البحيرات . من أجل ذلك قمنا باصطياد 1000 سمكة و وضعنا عليها علامات مميزة و أعدناها حية الى البحيرة ثم قمنا باصطياد 1000 سمكة بعد ذلك (بفرض أن شروط و ظروف الإصطياد متشابهة) .

– أحسب $p(n)$ احتمال الحصول في الصيد الثاني على 100 سمكة تحمل العلامة المميزة مبينا أن الحساب يضطرنا لفرض $n \succ 1900$

2– باعتبار الفرضية محققة ، أدرس اتجاه تغير $p(n)$ و قارن العدد 1 بالنسبة $\dfrac{p(n)}{p(n-1)}$ ثم استنتج قيمة n التي من أجلها يكون $p(n)$ أعظميا .

3– إعط تقديرا للعدد n علما أن في الصيد الثاني وّجدت 100 سمكة تحمل العلامة المميزة

الهدية

و أخيرا أيها الطلبة الكرام أسأل الله العلي القدير أن يوفقكم في امتحان شهادة البكالوريا ويسعدكم ويفرحكم بحسن النجاح و الالتحاق بالجامعة إن شاء الله ويفرح والديكم وأهليكم

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

اقتراح : الأستاذ : حليلات عمار **تصحيح : الأستاذ : حميدي بوثلجة**

سلسلة استعد للبكالوريا رقم 9

العد (التحليل التوفيقي)

التمرين (01) : توزيع الكرات :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	المجموع
العدد	4	6	8	14
مرقمة من	1 إلى 4	1 إلى 6	1 الى8	

لسحب : ثلاث كرات في آن واحد (توفيقة)

1) أ) عدد الحالات للحصول على 3 أرقام فردية :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	عدد الأرقام الفردية
عدد كرات	4	6	8	
أرقام فردية	1، 3	3،1 ،5	1،3 ،5 ،7	9

نختار 3 أرقام فردية من بين 9 أرقام فردية عدد الاختيارات: $C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

ب) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء على الأقل:

	على الأقل كرة حمراء من بين الثلاثة تعني					
!!!!	1 حمراء و 2 ليست حمراء	إما	2 حمراء و 1 ليست حمراء	إما	3 حمراء	المجموع
	$C_4^1 \times C_{14}^2$	+	$C_4^2 \times C_{14}^1$	+	C_4^3	452
العدد	4×91	+	6×14	+	4	

طريقة ثانية : الحالة الوحيدة التي لم تحسب من بين كل الحالات الممكنة في الجدول (!!!!) هي سحب ثلاث كرات ليست حمراء و عدد الحالات الممكنة لذلك هي : $C_{14}^3 = 364$ نطرح هذا العدد من عدد كل الحالات الممكنة أي C_{18}^3 نجد كذلك 452 .

جـ) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4 .
توجد 3 كرات تحمل الرقم 4 نختار من بينها كرة واحدة و توجد 14 كرة لا تحمل الرقم 4 نختار من بينها اثنتان. عدد الحالات هو : $C_3^1 \times C_{14}^2 = 3\times91 = 273$.

التمرين (02) : المعطيات : 3 كتب رياضيات + 2 كتب فيزياء +4 كتب أدب عربي
التجربة : وضع هذه الكتب (عددها 9) على رف مكتبته

أ) وضع كتب نفس المادة متجاورة : هذه الحالة تمثل ترتيب 3 مواد وعددها هو عدد التبديلات ذات 3 عناصر.
عدد الحالات الممكنة يساوي $3\,! = 6$.

ب) كتب الأدب العربي فقط تبقى متجاورة : نتعامل هنا مع مجموعة كتب الأدب العربي كعنصر واحد في تبديلها مع بقية العناصر أي الكتب الخمسة (3+2) .
عدد الحالات الممكنة : $6\,! = 720$.

جـ) دون أي شرط : عدد الحالات هو عدد التبديلات ذات 9 عناصر : $9\,! = 362880$.

التمرين (03) :

1) لما n = 0 ، الخاصية صحيحة لأن : $2^0 = C_0^0 = 1$.

لما n ≠ 0 ، نعوض a = b =1 في دستور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = C_n^0 \times a^n + C_n^1 \times a^{n-1} \times b + ... + C_n^p \times a^{n-p} \times b^p + ... C_n^n \times b^n \quad (p \le n)$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 \times 1^n + C_n^1 \times 1^{n-1} \times 1 + ... + C_n^p \times 1^{n-p} \times 1^p + .. + .C_n^n \times 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + .. + .C_n^n$$

2) أ) n و m عددان طبيعيان حيث n ≥ m هنا يجب فرض m ≥ 1 . نبرهن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

$$mC_n^m = m \times \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{(m-1)! \times (n-m)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times ((n-1)-(m-1))!} = n \times C_{n-1}^{m-1}$$

ب) قيمة المجموع : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m = 0 \times 1 + 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + ... + p \times C_n^p + ... + n \times C_n^n$$

$$= 0 + n \times C_{n-1}^0 + n \times C_{n-1}^1 + ... + n \times C_{n-1}^{p-1} + ... + n \times C_{n-1}^{n-1}$$

$$= \mathrm{n} \times \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{p-1} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \times 2^{(n-1)}$$

التمرين (04) :

1) أ) حل المعادلة : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n + 1$ بما أن مهما يكن n : $C_n^0 = 1$

المعادلة تكتب : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n$. حتى تقبل المعادلة حلولا يجب أن يكون عددا زوجيا لأن الطرف الأول عدد طبيعي و يكون الطرف الثاني طبيعيا إذا كان n زوجيا .

*إذا كان n = 0 فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0 .

* إذا كان n = 2 فإن الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 5.

* إذا كان: n ≥ 3 .فإن : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = \frac{5}{2}n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 = 16$ أي $n = 4$. مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

(ضرورة التحقق).

ب) حل المعادلة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

* إذا كان n = 0 فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0

* إذا كان n = 1 فإن الطرف الأول يساوي 1 و الطرف الثاني يساوي 8

* إذا كان n = 2 فإن الطرف الأول يساوي 6 و الطرف الثاني يساوي 16

* إذا كان: n ≥ 3 .فإن: $C_n^3 + C_{2n}^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة: $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2} = 8n$

بعد الاختزال نجد : $n^2+9n-52=0$ ، $\Delta=289=17^2$ و $n=4$
مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

2) حل في IN^2 الجملة : $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

<u>الشروط : y-1 ≥ 0</u>

<u>الحالة الأولى</u> : x < y-1 و x + y ≥ 2 . تكتب الجملة : $\begin{cases} 0=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $(x+y)\times(x+y-1)=20$ بما أن $(x+y)$ و $(x+y-1)$ عددين متتابعين نستنتج أن :
$x+y=5$. الثنائيات الطبيعية التي تحقق هي : (0,5) و(1,4) .

<u>الحالة الثانية</u>: x ≥ y-1 وx + y ≥ 2 تكتب الجملة : $\begin{cases} C_x^{y}+C_x^{y-1}=C_x^{y-1} \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$ أي $\begin{cases} C_x^{y}=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $x+y=5$ و $x\prec y$. الثنائي, التي تحقق هي : (2,3)
حلول الجملة هي الثنائيات (2,3); (1,4); (0,5) .

<u>التمرين (05)</u> : مركز الأبحاث يتكون من : 6 باحثين و 4 باحثات
اللجنة : 4 أعضاء
1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها : عدد التوفيقات ذات 4 عناصر من مجموعة ذات 10 عناصر

$$C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

2) أ) عدد اللجان التي تضم 4 باحثات : $C_4^4=1$

ب) عدد اللجان التي تضم باحثة واحدة فقط : $C_4^1\times C_6^3=4\times20=80$

جـ) عدد اللجان التي تضم باحثة على الأقل: $C_{10}^4-C_6^4=210-15=195$ (انظر التمرين (01))

د) يوجد في اللجنة باحثان على الأكثر:
تعني : (باحثان وباحثتان) إما (باحث وثلاث باحثات) إما (أربع باحثات)
العدد : $C_6^2\times C_4^2$ + $C_6^1\times C_4^3$ + C_4^4
بعد الحساب نجد : 115 .

3) عدد اللجان التي تضم رئيسا ونائبا له وكاتبين : عدد الترتيبات ذات 4 عناصر أي :

$$(4!)\times C_{10}^4=24\times210=5040$$

<u>التمرين (06) :</u> n عدد طبيعي غير معدوم : $L_n=9C_{n+1}^2+27C_{n+1}^3+81C_{n+1}^3+......+3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1) نبين أن : $L_n=4^{n+1}-3n-4$

نعوض في دستور ثنائي الحد : a = 3 و b = 1 (انظر التمرين (03))

$$4^{n+1}=(1+3)^{n+1}=C_{n+1}^0\times1^{(n+1)}+C_{n+1}^1\times1^n\times3^1+C_{n+1}^2\times1^{(n-1)}\times3^2+...+C_{n+1}^{n+1}\times1^0\times3^{(n+1)}$$

$$4^{n+1}=1+(n+1)\times3+3^2\times C_{n+1}^2+3^3\times C_{n+1}^3+.....+3^{n+1}\times C_{n+1}^{n+1}$$

$$4^{n+1}=3n+4+L_n$$

نستنتج أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2) حساب المجموع : $S_n = L_1 + L_2 + \dots + L_n$

$$S_n = \left(4^2 - 7\right) + \left(4^3 - 10\right) + \dots + \left(4^{n+1} - 3n - 4\right)$$
$$= \left(4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n+1}\right) - \left(7 + 10 + \dots + 3n + 4\right)$$

القوس الأول يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 4^2 وأساسها 4 وعدد حدودها (n-1)

و القوس الثاني يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 7 وأساسها 3 وعدد حدودها (n-1)

نستنتج أن : $S_n = \left(4^2 \times \frac{4^{(n-1)} - 1}{4 - 1}\right) - \left((n-1) \times \frac{(7 + 3n + 4)}{2}\right) = \frac{16}{3}\left(4^{(n-1)} - 1\right) - \frac{(n-1)\times(3n+11)}{2}$

<u>التمرين (07) :</u>

1) برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots n\times(n!) = (n+1)! - 1$

المرحلة الأولى :

التحقق من أجل n = 0 . الطرف الأول : $0\times 0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي كيفي n .نفرض : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots n\times(n!) = (n+1)! - 1$

ونبرهن أن : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots (n+1)\times(n+1)! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

$$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots (n+1)\times(n+1)! = 1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n! + (n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)!\times(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots \times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

<u>المرحلة الأولى</u> :

التحقق من أجل n = 1 . الطرف الأول : $2^1 \times 1 = 2$ والطرف الثاني : $\frac{(2\times 1)!}{2!} = \frac{2!}{2!} = \frac{2}{2} = 1$

<u>لمرحلة الثانية</u> : من أجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم نفرض: $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots \times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

ونبرهن أن : $2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots \times(2(n+1)-1)\right] = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$

$$2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots \times(2(n+1)-1)\right] = 2\times 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots (2n-1)\times(2n+1)\right]$$
$$= 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots (2n-1)\right]\times 2\times(2n+1)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!}\times 2\times(2n+1) = \frac{(2n)!}{n!(\mathbf{n}+\mathbf{1})}\times(2n+1)\times 2(\mathbf{n}+\mathbf{1})$$
$$= \frac{(2n)!\times(2n+1)\times(2n+2)}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{\left[2(n+1)\right]!}{(n+1)!}$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين (08) :

المعطيات: صندوق (10 كرات) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{4 سوداء} \\ \text{6 بيضاء} \end{array} \right.$

التجربة : 3 كرات في آن واحد : (توفيقة ذات 3 عناصر)

1) أ) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء : $C_6^1 \times C_4^2 = 36$

ب) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء على الأقل : $C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 = C_{10}^3 - C_4^3 = 116$

جـ) عدد الحالات للحصول على 3 كرات ليست من نفس اللون : $C_{10}^3 - \left(C_4^3 + C_6^3\right) = 120 - (4 + 20) = 96$

الشرح : من عدد كل الحالات الممكنة نحذف الحالات التي تكون فيها كل الكرات حمراء وعددها 4 والحالة التي تكون فيها كل الكرات سوداء وعددها 20 .

2) المعطيات:

المعطيات: صندوق (2n +10 كرات) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{(n+4) سوداء} \\ \text{(n+6) بيضاء} \end{array} \right.$

التجربة : سحب كرتين معا (لأن X_n عدد الحالات لسحب كرتين من نفس اللون)

أ) حساب العدد X_n :

$$X_n = C_{n+4}^2 + C_{n+6}^2 = \frac{(n+4)\times(n+3)}{2} + \frac{(n+6)\times(n+5)}{2}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{n}^2 + 7n + 12\right)\times\left(\mathrm{n}^2 + 11n + 30\right)}{2} = \frac{2\mathrm{n}^2 + 18n + 42}{2} = \mathrm{n}^2 + 9n + 21$$

ب) نحل المعادلة : $X_n = 10713$ أي $\mathrm{n}^2 + 9n - 10692 = 0$ نجد $\Delta = 42849$ و $\mathrm{n} = 99$.

التمرين (09) : يعطى المنشور التالي : $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ نفرض طبعا $x \neq 0$

حسب دستور ثنائي الحد كل حد من حدود النشر يكتب: $C_{15}^p \times \left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p$ مع $0 \le p \le 15$.

بما أن $\left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p = x^{45-3p} \times \frac{(-2)^p}{x^{2p}} = (-2)^p \times x^{45-5p}$ فإن كل حد من الحدود يكتب :

$$C_{15}^p \times (-2)^p \times x^{45-5p}$$

1) يكون الحد درجته 10 إذا كان : $45 - 5p = 10$ أي $p = 7$. الحد هو : $C_{15}^7 \times (-2)^7 \times x^{10}$

2) الحد التاسع تقابله قيمة $p = 8$.الحد هو : $C_{15}^8 \times (-2)^8 \times x^5$ لأن قيمة p تبدأ من 0 .

3) يكون الحد ثابتا إذا كان : $45 - 5p = 0$ أي $p = 9$. الحد هو $C_{15}^9 \times (-2)^9 \times x^0 = C_{15}^9 \times (-2)^9$

<u>التمرين (10) :</u>

1) إثبات أن : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ الشرط : $n \ge m \ge 1$

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times (n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m! \times (n-m-1)!} = \frac{(n-1)![m+n-m]}{m! \times (n-m)!} = \frac{(n-1)! \times n}{m! \times (n-m)!} = C_n^m$$

استنتاج أن: $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$.

بتعويض m بـ m +1 و تعويض n على التوالي بالقيم n +1 ، n ، n-2 ، .... ، m +1 ، m
في : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

نحصل على :

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + \cancel{C_n^{m+1}} \\ \cancel{C_n^{m+1}} = C_{n-1}^m + \cancel{C_{n-1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-1}^{m+1}} = C_{n-2}^m + \cancel{C_{n-2}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-2}^{m+1}} = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m+1} \\ . \\ . \\ \cancel{C_{m+2}^{m+1}} = C_{m+1}^m + \cancel{C_{m+1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{m+1}^{m+1}} = C_m^m + C_m^{m+1} \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف و اختزال الحدود المتساوية
يبقى في الطرف الأول الحد C_{n+1}^{m+1}
و يبقى في الطرف الثاني المجموع المطلوب :
$C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$

ملاحظة في الطرف الثاني : $C_m^{m+1} = 0$

2) * حساب المجموع : $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$

بتعويض m = 1 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$C_n^1 + C_{n-1}^1 + ... + C_1^1 = C_{n+1}^2$ أي $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1) \times n}{2}$

* حساب المجموع: $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n \times (n-1)$

بتعويض m = 2 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد:

$C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_2^2 = C_{n+1}^3$ أي $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1) \times (n-2)}{2} + ... \frac{2 \times 1}{2} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2}$

بضرب الطرفين في 2 نجد: $S_2 = \frac{(n+1)n \times (n-1)}{3}$

* حساب المجموع: $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

لدينا $n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n$ بالتعويض في عبارة S_3

$$S_3 = 1 + (2 + 2 \times 1) + (3 + 3 \times 2) + ... + (n + n(n-1))$$
$$= (1 + 2 + 3 + ... + n) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n-1) \times n)$$
$$= S_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الأستاذ : حميدي بوثلجة من البيض
التاريخ : 2008/05/25