المتميز

رقم 22

بطاقات منهجية في

الرياضيات

المتتاليات

- العددية
- الحسابية
- الهندسية

Hard_equation

وفق البرنامج الرسمي

3 AS

Mathématique

BAC

دار الكتب العلمية للطباعة والنشر والتوزيع

المتتاليات العددية

1 - توليد متتالية :

1/ 1/ يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحدها العام.

مثال : (v_n) متتالية معرفة بحدها العام $v_n = 2n - 3$

للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب.

لدينا : $v_{10} = 2\times10 - 3 = 17$ ، $v_{16} = 2\times16 - 3 = 29$.

1/ 2/ يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) .

مثال : المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n .

$u_{n+1} = u_n + 5$ هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لدينا : $u_1 = 6$; $u_2 = 11$; $u_3 = 16$; $u_4 = 21$.

ملاحظة 1 : في المتتالية (v_n) ، v_{16} هو أحد حدودها ، 16 هو دليله ، أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد v_k بالنسبة إلى الحد v_b حيث $b < k$ هي $k-b+1$.

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_0 هي $16 - 0 + 1$ أي 17.

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_1 هي $16 - 1 + 1$ أي 16.

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_5 هي $16 - 5 + 1$ أي 12.

ملاحظة 2 : المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = 2n - 3$ هي من الشكل $v_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) و المعرفة كما يلي $f(x) = 2x - 3$.

المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 5$ هي من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 5$.

المتتالية الحسابية

تعريف : نقول أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + r$.

عبارة الحد العام :

إذا كانت المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $U_n = U_p + (n - p)r$.

حالات خاصة :

$$U_n = U_0 + n \times r$$

$$U_n = U_1 + (n-1) \times r$$

المجموع :

إذا كانت المتتالية (U_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) فإن :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

أو :

$$S = U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

خاصية الوسط الحسابي :

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

المتتالية الهندسية

تعريف :

نقول أن المتتالية (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n \times r$.

عبارة الحد العام :

- إذا كانت المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها r (r عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $U_n = U_p \times r^{n-p}$.

حالات خاصة :

$$U_n = U_0 \times r^n$$

$$U_n = U_1 \times r^{n-1}$$

المجموع :

إذا كانت المتتالية (U_n) متتالية هندسية أساسها r (r عدد حقيقي) فإن :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n$$

$$S = U_0 \times \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

أو :

$$S = U_1 + U_2 + \dots\dots\dots + U_n = U_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

خاصية الوسط الهندسي :

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

خـواص المتتاليات

2/ 1/ اتجاه تغير متتاليـة عدديـة :

(u_n) متتالية عددية معرفة على N.

(u_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.

(u_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.

(u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي n ، $u_{n+1} = u_n$.

إذا كانت (u_n) متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

ملاحظة 1 : ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا كانت معرفة على جزء من N.

ملاحظة 2 : نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية (u_n) حسب إشارة أساسها r.

r > 0	r < 0	r = 0
(u_n) متزايدة تماما	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية (u_n) حسب إشارة حدها الأول u_0 و قيمة أساسها q.

	0 < q < 1	q = 1	q > 1
$u_0 > 0$	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) متزايدة تماما
$u_0 < 0$	(u_n) متزايدة تماما		(u_n) متناقصة تماما

إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ليست رتيبة.

إذا كان $q = 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ثابتة بدءا من u_1 .

2/ 2/ المتتاليات المحدودة :

تعاريـف :

(u_n) متتالية عدديـة.

المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq M$.

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq m$.

المتتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2/ 3/ نهايـة متتاليـة عدديـة :

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي.

تعريـف :

العدد الحقيقي ℓ هو نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل مجال $]\alpha;\beta[$ يوجد عدد طبيعي p بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n يحقق $n \geq p$: u_n ينتمي إلى المجال $]\alpha;\beta[$ ، نكتب $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

ملاحظات :

إذا كانت نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ عددا حقيقيا ℓ نقول إن (u_n) **متقاربة.**

إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة فإن (u_n) غير متقاربة و نقول عنها إنها **متباعدة.**

مبرهنة :

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

2/ 4/ مبرهنات حول نهايات متتاليات :

مبرهنة :

(u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

α عدد حقيقي، ℓ هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة :

f دالة معرفة على مجال ℓ و $\ell \in \mathbb{N}$: (u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in \mathbb{R}$.

إذا كانت (u_n) متقاربة نحو ℓ و f مستمرة عند ℓ فإن $f(\ell) = \ell$.

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان، ℓ و ℓ' عددان حقيقيان.

نهاية مجموع متتاليتين :

إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ هي	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ هي	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ هي	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

نهاية جداء متتاليتين :

ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم التعيين

نهايـة حاصل قسمة متتاليتين :

ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم التعيين

$\ell' > 0$ أو $+\infty$	$\ell' > 0$ أو $+\infty$	$\ell' < 0$ أو $-\infty$	$\ell' < 0$ أو $-\infty$	0
0 بقيم موجبة	0 بقيم موجبة	0 بقيم سالبة	0 بقيم سالبة	0
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	حالة عدم التعيين

ملاحظة : توجد حالات ، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متتاليتين ، أو جداء متتاليتين أو حاصل قسمة متتاليتين ، تسمى حالات عدم التعيين و هي من الشكل

$$+\infty-\infty \quad ; \quad 0\times\infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

2/ 5/ النتائج المتعلقة بالحصر و المقارنة :

مبرهنـة 1 :

إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

مبرهنـة 2 :

إذا كانت متتالية متقاربة فإنها محدودة.

ملاحظة : العكس غير صحيح.

مبرهنـة 3 :

(u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات عددية ، ℓ عدد حقيقي.

إذا كان (بدءا من مرتبة معينة)	و كان	فإن ....
$u_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$
$v_n \leq u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lvert v_n - l\rvert \leq u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
$v_n \leq u_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

2/ 6/ نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q \leq -1$ فإن نهاية (u_n) غير موجودة.

ملاحظات :

إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

III- المتتاليتان المتجاورتان :

تعريف :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة 1 :

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

مبرهنة 2 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان و نهايتهما l.

إذا كانت (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq l \leq v_n$.

إذا كانت (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \leq l \leq u_n$.

مثال : بكالوريا دورة جوان 2009

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على N كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ/أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ/ بين أن (u_n) متقاربة .

الحل النموذجي :

1) حساب الحدود : $v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2-1=1$

$$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$$

حيث : $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3}\times 2 - \frac{1}{3}\times 1 = \frac{7}{3}$

ومنه : $v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$

2) (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1} = v_n \times q$
(q عدد حقيقي ثابت) ، لدينا : من أجل كل عدد طبيعي

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

$$= \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

3) أ/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 . \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب/

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$
$$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$$

أي : $S_n = u_n - u_0$ ومنه : $u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$

جـ/ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$ ومنه (u_n) متقاربة نحو العدد $\frac{5}{2}$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard_equation