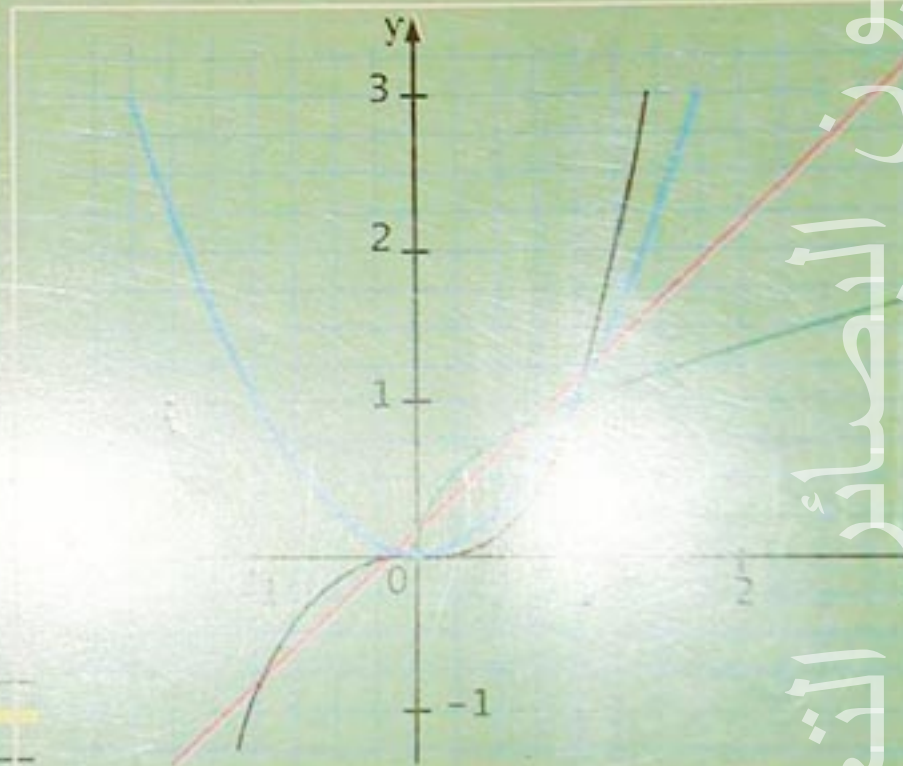


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التربية الوطنية

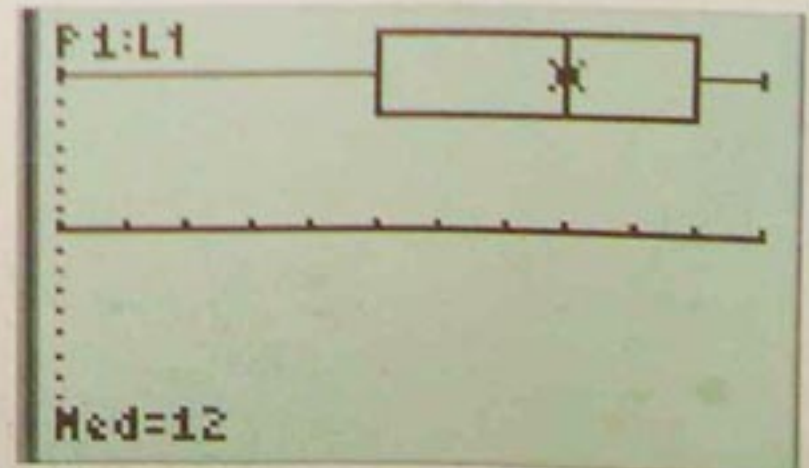
# الرياضيات



السنة الثانية من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

للشعب : -التسيير و الاقتصاد  
-آداب و فلسفة  
-لغات أجنبية

elbassair.net



موقع عينون البصائر التعليمي

elbassair.net



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

# الرياضيات

السنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي

الشعب

التسيير والإقتصاد

آداب وفلسفة ولغات أجنبية

الإشراف التربوي

وحسن أوديع

مفتش التربية والتكوين

المؤلفون

رابح بناني : مفتش التربية والتكوين

عبد الله جلواح : مفتش التربية والتعليم الأساسي

سليمان حمودي : أستاذ التعليم الثانوي

تصميم وتركيب : السيد / رباش حكيم

السيدة / كوال وهيبة المولودة ميباني

تصميم الغلاف : السيد / حموم كريم

تصميم المخططات : السيدة / يونس زهية المولودة شمول



# الفهرس

|     |   |     |  |
|-----|---|-----|--|
| 141 | الباب الخامس : الإشتقاق                 | 03  | مدخل                                       |
| 147 | 1 - العدد المشتق                        | 04  | عرض البرنامجين                             |
| 150 | 2 - معادلة المماس لمنحن عند نقطة        | 07  | تقديم الكتاب                               |
| 151 | 3 - الدوال المشتقة                      | 09  | الباب الأول : النسب المئوية والمؤشرات      |
| 158 | 4 - عمليات على الدوال المشتقة           | 13  | 1 - نسبة الجزء إلى الكل                    |
| 167 | 5 - الدالة المشتقة وإتجاه التغير        | 13  | 2 - النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى        |
| 168 | 6 - القيم الحدية لدالة                  | 14  | 3 - التطورات والنسب المئوية                |
| 169 | 7 - التقريب التآلفي المماسي لدالة       | 17  | 4 - المؤشرات                               |
| 199 | الباب السادس : السلوك التقاربي          | 31  | الباب الثاني : الإحصاء                     |
| 204 | 1 - نهايات دوال مألوفة                  | 35  | 1 - السلاسل الزمنية                        |
| 208 | 2 - العمليات على النهايات               | 36  | 2 - التمليس بالأوساط المتحركة              |
| 214 | 3 - المستقيمات المقاربة                 | 37  | 3 - المدرجات التكرارية                     |
| 235 | الباب السابع : المتتاليات العددية       | 38  | 4 - التباين - الإنحراف المعياري            |
| 239 | 1 - عموميات                             | 40  | 5 - الربعيات والعشريات - المخطط بالعلبة    |
| 241 | 2 - المتتاليات الحسابية                 | 43  | 6 - التجربة العشوائية - المحاكاة           |
| 245 | 3 - المتتاليات الهندسية                 | 65  | الباب الثالث : عموميات على الدوال          |
| 263 | الباب الثامن : الجمل الخطية             | 70  | 1 - الدالة « مكعب »                        |
| 267 | 1 - المعادلات الخطية لمجهولين           | 71  | 2 - العمليات على الدوال                    |
| 267 | 2 - جمل معادلتين خطيتين لمجهولين        | 77  | 3 - المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة   |
| 269 | 3 - جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل | 82  | 4 - عناصر تناظر منحنيات                    |
| 270 | 4 - المتراجحات الخطية لمجهولين          | 113 | الباب الرابع : المعادلات والمتراجحات       |
| 281 | الباب التاسع : الإحتمالات               | 117 | 1 - ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية         |
| 285 | 1 - مفردات الإحتمالات                   | 120 | 2 - المعادلات من الدرجة الثانية            |
| 286 | 2 - الإحتمالات                          | 122 | 3 - المتراجحات من الدرجة الثانية           |
|     |   |     | 4 - حل معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية |
|     |   | 124 | بيانياً                                    |



## مدخل

هذا الكتاب موجه لتلاميذ السنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي ، شعبة التسيير والإقتصاد وشعبتي الآداب و أعدّ وفق البرنامج الرسمي لوزارة التربية الوطنية المقرر تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2006 - 2007 .

إن هيكله الكتاب ومضامينه تستجيب للمقاربة بالكفاءات المعتمدة من طرف وزارة التربية الوطنية والتي تندرج أساسا في إطار إصلاح المنظومة التربوية .

يعتبر هذا الاختيار البيداغوجي والتعليمي قرارا له أهمية بالغة ، كونه يضع المتعلم في مركز إهتمامات الفعل التربوي وبذلك يمنح له الفرصة للمشاركة بصفة فعلية في بناء معارفه وفي إمتلاك الطرائق موضوع الدراسة ، وهي العناصر الضرورية التي تضمن له إكتساب الكفاءات المستهدفة في البرنامج .

وزعت المضامين المقررة على تسعة أبواب بالنسبة إلى شعبة التسيير والإقتصاد وستة أبواب بالنسبة إلى شعبتي الآداب حيث يتضمن كل باب الأجزاء التالية :

- نبذة تاريخية
- إستبيان متعدد الإجابات
- أنشطة تمهيدية
- معارف
- طرائق
- تمرين محلول
- تمارين ومسائل

يستعمل التلميذ هذا الكتاب في مختلف مراحل التعلم سواء تعلق الأمر بمواجهة الوضعيات المقترحة عليه أثناء الدرس أو خارج القسم للمراجعة وإعداد الواجبات . أما بالنسبة إلى الأستاذ ، فيكون إستعماله بصفة خاصة أثناء إعداد حصص التعليم - التعلم .

نأمل أن نكون قد وفرنا للمتعلم وسيلة تعليمية تتناسب مع توجيهه وتحفزه على العمل بنشاط .



## عرض البرنامج

| الكفاءات المستهدفة   |  | المحاور                 |
|--|--|-------------------------|
| شعبتا الآداب   | شعبة التسيير والإقتصاد   |                         |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- التمييز بين التغير المطلق والتغير النسبي .</li> <li>- معرفة حساب نسبة مئوية .</li> <li>- معرفة تحويل زيادة أو نقصان نسبة مئوية إلى ضرب .</li> <li>- معرفة حساب وتفسير مؤشر نمو ظاهرة ( سعر ، إنتاج ، عدد السكان ... ) .</li> <li>- التعبير عن زيادة أو نقصان بنسبة مئوية .</li> <li>- تحديد نسبة النمو الإجمالي بمعرفة نسبي نمو متتابعين .</li> </ul>                                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>- التمييز بين التغير المطلق والتغير النسبي .</li> <li>- حساب نسبة مئوية .</li> <li>- إرجاع زيادة أو تخفيض إلى شكل ضرب .</li> <li>- حساب وترجمة مؤشر تطور ظاهرة ( سعر ، سكان ، إنتاج ، ... ) .</li> <li>- التعبير بنسبة مئوية على زيادة أو تخفيض .</li> <li>- تعيين نسبة التطور الإجمالية بمعرفة نسبتين متتاليتين للتطور .</li> </ul>  | النسب الثورية والمؤشرات |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- التعرف على متتالية حسابية أو متتالية هندسية .</li> <li>- معرفة واستعمال خاصية ثلاثة حدود متتابعة في متتالية .</li> <li>- معرفة واستعمال الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي .</li> <li>- حساب مجموع <math>n</math> حدا الأولى لمتتالية .</li> <li>- تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية .</li> <li>- دراسة وضعيات يؤول حلها إلى دراسة متتاليات حسابية أو إلى متتاليات هندسية .</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- تعريف متتالية عددية واستعمال الكتابات والتعابير المناسبة .</li> <li>- معرفة طرق توليد متتالية .</li> <li>- حساب الحد من المرتبة <math>n</math> لمتتالية .</li> <li>- تعريف متتالية حسابية أو هندسية والتعرف عليها تبعاً لطريقة توليدها ووصفها باستعمال التعبير المناسب .</li> <li>- حساب الحد من المرتبة <math>n</math> لمتتالية حسابية أو هندسية بمعرفة حدّها الأول وأساسها .</li> <li>- معرفة اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية .</li> <li>- حساب مجموع <math>n</math> حدا متتابعاً لمتتالية حسابية أو هندسية .</li> </ul>  | المتتاليات العددية      |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- تعيين العدد المشتق لدالة مرجعية ( من البرنامج ) .</li> <li>- تعيين معادلة المماس لمنحني الدالة « مربع » عند نقطة فاصلتها <math>x_0</math> .</li> <li>- معرفة تعيين معادلة لمماس لمنحني دالة مرجعية .</li> <li>- تعيين العدد المشتق لدالة <math>f</math> عند <math>x_0</math> .</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>- معرفة تغيرات الدالة « مكعب » .</li> <li>- تمثيل الدالة « مكعب » بيانياً .</li> <li>- تعريف مجموع ، جداء ، حاصل قسمة ومركب دالتين عدديتين .</li> <li>- استنتاج منحنيات دوال مرفقة انطلاقاً من منحنيات دوال معطاة .</li> <li>- البرهان على أن نقطة هي مركز تناظر المنحني الممثل لدالة .</li> <li>- البرهان على أن مستقيماً هو محور تناظر المنحني الممثل لدالة .</li> <li>- مقارنة مفهوم العدد المشتق على مثال .</li> <li>- معرفة العدد المشتق للدوال المرجعية المقررة من أجل قيمة معينة <math>x_0</math> .</li> <li>- ترجمة عدد مشتق بيانياً .</li> <li>- تعيين المعادلة المبسطة لمماس .</li> </ul> | عموميات على الدوال      |



## الإشتقاق

- إنشاء المماس عند نقطة  $A$  للمنحني الممثل لدالة مرجعية مقررّة .
- تعريف الدالة المشتقة لدالة قابلة للإشتقاق على مجال .
- حساب مشتق مجموع وجداء وحاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق .
- حساب مشتق دالة كثير حدود ودالة ناطقة من الشكل :  $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + b}$  .
- الربط بين اتجاه تغيّر دالة وإشارة مشتقتها .
- تعيين القيم الحدية لدالة قابلة للإشتقاق على مجال .
- تعيين التقريب التآلفي لدالة عند قيمة انطلاقا من أمثلة بسيطة .

$$x \mapsto ax + b ; x \mapsto k$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} ; x \mapsto x^2$$

- التعرف على قابلية اشتقاق دالة عند  $x_0$  .
- تعيين الدوال المشتقة للدوال المرجعية :
- معرفة مشتقة مجموع دالتين، مشتقة جداء دالتين، مشتقة مقلوب دالة، مشتقة الدالة «قوة» .
- استعمال إشارة المشتقة لتحديد اتجاه تغيّر دالة على مجال .

## السلوك التقاربي

- تفسير وجود مستقيم مقارب يوازي أحد حاملتي المحورين واستعماله في التمثيل البياني .
- تفسير وجود مستقيم مقارب مائل واستعماله في التمثيل البياني .

## المعادلات من الدرجة الثانية

- إنشاء التمثيل البياني للدالة .
- تحديد جذور ثلاثي الحدود وإشارته اعتمادا على :
- التمثيل البياني للدالة
- الشكل المختصر .
- الشكل النموذجي .
- المميز .
- العبارة المحللة .
- حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال التمثيل البياني للدالة
- حل معادلة من الدرجة الثانية جبريا .

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

- تمثيل دالة من الشكل :  $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$  مع  $a \neq 0$  وإنشاء جدول تغيّراتها .
- استعمال التمثيل البياني لثلاثي الحدود لإستنتاج وجود حلول المعادلة أو معادلات أو متراجحة من الدرجة الثانية .
- حل مشكلات تتدخل فيها ثلاثيات الحدود أو معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية .

## الجمل الخطية

- حل جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل .
- ترجمة متراجحة خطية ذات مجهولين بتجزئة المستوي .
- حل جملة متراجحتين خطيتين ذات مجهولين بيانيا .

## الإحصاء

- إنجاز محاكاة تجارب عشوائية بسيطة .
- معرفة مفهوم تذبذب العينات .
- حساب الإنحراف المعياري لسلسلة إحصائية وتفسيره .

- تمثيل سلسلة إحصائية منظمة في فئات مختلفة الأطوال بمدرج تكراري .
- حساب انحراف معياري وترجمته .



| الإحصاء    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- حساب الربيعيات والعشريين الأول والثاسع لسلسلة إحصائية.</li> <li>- تمثيل سلسلة إحصائية بمخطط بالعلبة وترجمته .</li> <li>- مقارنة مخططات بالعلبة لسلاسل مختلفة .</li> </ul>   |
|------------|--|
| الاحتمالات | <ul style="list-style-type: none"> <li>- تعريف قانون الإحتمال .</li> <li>- تعريف نموذج ملائم لتجربة عشوائية في حالات بسيطة .</li> <li>- تعيين احتمال حادثة انطلاقا من قانون احتمال .</li> <li>- حساب كل من احتمال الحادثة المضادة لحادثة واتحاد وتقاطع حادثتين .</li> </ul>  |
|            | <ul style="list-style-type: none"> <li>- معرفة تحديد وتفسير الربيعيين الأدنى والأعلى <math>Q_1</math> و <math>Q_3</math> .</li> <li>- إنشاء وتفسير مخطط بالعلبة .</li> <li>- تعيين الإنحراف الربيعي لسلسلة إحصائية .</li> </ul>  |
|            | <ul style="list-style-type: none"> <li>- تعيين مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية .</li> <li>- حادثة بسيطة ، حادثة مركبة .</li> <li>- العمليات على الأحداث (الاتحاد ، التقاطع ، المتممة) .</li> <li>- معرفة قانون الإحتمال على مجموعة منتهية .</li> <li>- معرفة حساب احتمال حادثة (حالة تساوي الإحتمالات) .</li> <li>- حساب احتمال الحادثة العكسية واتحاد حادثتين وتقاطع حادثتين .</li> </ul> |



# تقديم الكتاب

أُنجز هذا الكتاب وفق البرنامج الرسمي للسنة الثانية من التعليم الثانوي العام والتكنولوجي (شعبة التسيير والإقتصاد وشعبتا الآداب) المقرر تطبيقه ابتداء من السنة الدراسية 2006 - 2007 .

إن هيكلة الكتاب تسهّل العمل به ، وتسمح بتعلم أحسن في مختلف ميادين المادة . حتى يكون إستعماله وجيهاً ، من الضروري فهم هيكلته .

**ملاحظة :** العلامة \* المرفقة ببعض الأبواب أو ببعض فقرات منها تشير إلى أن هذه الأبواب أو الفقرات خاصة بشعبة التسيير والإقتصاد فقط .

## إستبيان متعدد الإجابات

### إستبيان متعدد الإجابات

أبواب الإجابة الصحيحة

| السؤال   | الإجابة 1 | الإجابة 2 | الإجابة 3 |
|--|-----------|-----------|-----------|
| 1. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x + y = y + x$ هي خاصية التجميع.                             | ص         | خ         | ص         |
| 2. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x \cdot y = y \cdot x$ هي خاصية التجميع.                     | ص         | خ         | ص         |
| 3. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x + (y + z) = (x + y) + z$ هي خاصية التجميع.                 | ص         | خ         | ص         |
| 4. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z$ هي خاصية التجميع. | ص         | خ         | ص         |
| 5. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x + y = x + y$ هي خاصية التجميع.                             | ص         | خ         | ص         |
| 6. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x \cdot y = x \cdot y$ هي خاصية التجميع.                     | ص         | خ         | ص         |
| 7. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x + (y + z) = (x + y) + z$ هي خاصية التجميع.                 | ص         | خ         | ص         |
| 8. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z$ هي خاصية التجميع. | ص         | خ         | ص         |
| 9. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x + y = x + y$ هي خاصية التجميع.                             | ص         | خ         | ص         |
| 10. إذا كانت $x$ و $y$ عددين حقيقيين، فإن $x \cdot y = x \cdot y$ هي خاصية التجميع.                    | ص         | خ         | ص         |

## تقديم الباب

### الباب 3 عموميات على الدوال \*

1. الدالة 'مكتب'
2. التغيرات على الدوال
3. منحنيات والتحويلات الخطية
4. عناصر نظائر منحنيات

يُعتبر الدوال من الفروع الأساسية لموضوع 'مكتبة' وذلك منذ سنة 1990، وهو من أساسيات علم النفس على أساسه يمكن أن يكون لعمليّة الأثر من ذلك بعد الفهم للسرور، مثل الفهم على مفهوم تركيب الدوال.

في سنة 1998 تمّ إنشاء أول فرع علم النفس (تركيب الدوال) وهو في حيزه الحالي.

وهذا كان نتيجة تعاون عدد من الباحثين الذين هم في مرحلة عرض مواد جديدة على من الفهم للسرور الدوال بمرحبا بسيفك.



ليبر "Gabriel Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

يقدم في هذه الصفحة عنوان الباب والعناصر المعالجة فيه ، كما تعرض نبذة تاريخية حول تطور بعض المفاهيم الرياضية المتعلقة بالموضوع .

## معارف

### معارف

1. الدالة 'مكتب'
2. التغيرات على الدوال
3. منحنيات والتحويلات الخطية
4. عناصر نظائر منحنيات

## أنشطة تمهيدية

### أنشطة تمهيدية

1. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x + y = y + x$  هي خاصية التجميع.
2. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x \cdot y = y \cdot x$  هي خاصية التجميع.
3. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x + (y + z) = (x + y) + z$  هي خاصية التجميع.
4. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z$  هي خاصية التجميع.
5. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x + y = x + y$  هي خاصية التجميع.
6. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x \cdot y = x \cdot y$  هي خاصية التجميع.
7. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x + (y + z) = (x + y) + z$  هي خاصية التجميع.
8. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z$  هي خاصية التجميع.
9. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x + y = x + y$  هي خاصية التجميع.
10. إذا كانت  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين، فإن  $x \cdot y = x \cdot y$  هي خاصية التجميع.

تقدم في هذا الجزء المعارف المستهدفة

تسمح الأنشطة التمهيديّة المقترحة معالجة بعض الوضعيات التي

تهدف إلى مقارنة المفاهيم الرياضية موضوع الدراسة .



### طرائق

**طرائق**

1. طرائق تدريس المفاهيم في الرياضيات

2. طرائق تدريس المفاهيم في العلوم

3. طرائق تدريس المفاهيم في اللغة العربية

4. طرائق تدريس المفاهيم في التاريخ

5. طرائق تدريس المفاهيم في الجغرافيا

6. طرائق تدريس المفاهيم في الفنون

7. طرائق تدريس المفاهيم في التربية البدنية

8. طرائق تدريس المفاهيم في التربية الاجتماعية

9. طرائق تدريس المفاهيم في التربية المهنية

10. طرائق تدريس المفاهيم في التربية الخاصة

### مسألة محلولة

**مسألة محلولة**

1. المسألة الأولى

2. المسألة الثانية

3. المسألة الثالثة

4. المسألة الرابعة

5. المسألة الخامسة

6. المسألة السادسة

7. المسألة السابعة

8. المسألة الثامنة

9. المسألة التاسعة

10. المسألة العاشرة

تقترح في هذا الجزء طرائق لتوظيف المعارف المدروسة ؛ مجسدة بحل تمرين بالتفصيل يسمح للتلميذ بتطبيقها في حل وضعيات مشابهة.

إن الوضعية المقترحة في هذا الجزء هو نشاط مركب ، يسمح للمتعلم بإدماج مكتسباته (معارف وطرائق) وتجنيد حل هذه الوضعية.

### تمارين ومسائل

**تمارين ومسائل**

1. التمرين الأول

2. التمرين الثاني

3. التمرين الثالث

4. التمرين الرابع

5. التمرين الخامس

6. التمرين السادس

7. التمرين السابع

8. التمرين الثامن

9. التمرين التاسع

10. التمرين العاشر

### تمارين ومسائل

**استمارة متعدد الإجابات**

| السؤال              | إجابة 1 | إجابة 2 | إجابة 3 |
|---------------------|---------|---------|---------|
| 1. المسألة الأولى   | صحيح    | خطأ     | خطأ     |
| 2. المسألة الثانية  | خطأ     | صحيح    | خطأ     |
| 3. المسألة الثالثة  | خطأ     | خطأ     | صحيح    |
| 4. المسألة الرابعة  | صحيح    | خطأ     | خطأ     |
| 5. المسألة الخامسة  | خطأ     | صحيح    | خطأ     |
| 6. المسألة السادسة  | خطأ     | خطأ     | صحيح    |
| 7. المسألة السابعة  | صحيح    | خطأ     | خطأ     |
| 8. المسألة الثامنة  | خطأ     | صحيح    | خطأ     |
| 9. المسألة التاسعة  | خطأ     | خطأ     | صحيح    |
| 10. المسألة العاشرة | صحيح    | خطأ     | خطأ     |

يقترح في بداية هذا الجزء نشاط تحت العنوان «صحيح أو خاطئ» ، يهدف إلى تقويم مدى إكتساب التلميذ للمعارف الأساسية من خلال أسئلة بسيطة وقصيرة تتطلب الإجابة عنها ب : صحيح أو خاطئ . وزعت التمارين التطبيقية تبعا لترتيب المفاهيم المعالجة في الدرس فهي تسمح بتوظيف المكتسبات وتدعيمها . فيما يخص المسائل المدرجة، تعتبر وضعيات ثرية ومتنوعة ، تمكن التلميذ من إثبات تحكمه في المعارف والطرائق وتوظيفها لحل وضعيات مركبة وإدماجية .

أما بالنسبة إلى تكنولوجيا الإعلام والإنصال فقد إستعملنا ضمن النصوص صور الوظائف واللمسات والتعليمات ... للحاسبة البيانية والمجدول عند كتابة مختلف البرامج وأخترنا أهم الأجزاء من المنهاج لتوظيفها قصد مساعدة التلميذ على امتلاك هذه الوسائل بسهولة .

فيما يتعلق بالحاسبة البيانية مثلا، فالأنشطة المقترحة تخص حساب المؤشرات والتمثيل البياني للتطور ، والمتتاليات ، والدوال . وقد أولينا عناية خاصة بإدماج هذه الوسائل في باب الإحصاء عند تعيين مؤشرات سلسلة إحصائية وإنشاء مخطط بالعبلة وإنجاز محاكاة تجربة وتمثيل نتائج عشوائية بيانيا .



# الباب 1 النسب المئوية والمؤشرات

1

1. نسبة الجزء إلى الكل
2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى
3. التطورات والنسب المئوية
4. المؤشرات

## تاريخ رمز النسبة المئوية

إن الأعمال الرياضية باللغة اللاتينية، في الأصل، لا يعبر عنها بأرقام أو برموز، بل كانت تعتمد كلياً على الكلمات. وهكذا، فإن الكسر  $\frac{1}{100}$  كان يكتب "unu per cento" الذي يعني "واحد من مئة".

- في سنة 1425، بسطت هذه الكتابة بوضع الحرف *P* أفقياً على الكلمة *cento*.
- وفي 1650 تم تقصير الكلمة *cento* بالاحتفاظ فقط بالحرف الأخير *o*.
- وفي بداية القرن الثامن عشر أخذ رمز النسبة المئوية شكله الحالي %.

%

رمز النسبة المئوية  
في القرن الثامن عشر.

o

رمز النسبة المئوية  
في القرن السابع عشر.

cento

رمز النسبة المئوية  
في القرن الخامس عشر.



## استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

| السؤال   | إجابة 1                      | إجابة 2                                  | إجابة 3                                  |
|--|------------------------------|--|--|
| 1. إزداد سعر منتج بـ 20 % لحساب سعره الجديد، نضرب سعره الأصلي في .....   | 0,2                          | 1,2                                      | $\frac{80}{100}$                         |
| 2. قرر تاجر تخفيض سعر منتج بـ 7 % للحصول على السعر الجديد له، عليه أن يضرب السعر الأصلي في....   | 0,93                         | 1,07                                     | $\frac{7}{100}$                          |
| 3. إزداد عدد سكان مدينة بـ 4 % في سنة 2000 ثم إزداد بـ 6 % في السنة الموالية. النسبة المئوية للزيادة الإجمالية هي....  | 10 %                         | 24 %                                     | 10,24 %                                  |
| 4. كان سعر كتاب 150 ديناراً ثم أصبح 180 ديناراً. النسبة المئوية للزيادة في السعر هي...   | 30 %                         | 20 %                                     | 12 %                                     |
| 5. نسب النجاح في البكالوريا في ثانوية هي:<br>- 28 % في شعبة علوم الطبيعة والحياة:<br>- 24 % في شعبة الأدب.<br>- 40 % في شعبة الرياضيات.<br>- 32 % في شعبة التسيير والاقتصاد.<br>نسبة النجاح الإجمالية في هذه الثانوية هي.... | 27 %                         | 31 %                                     | لا نستطيع حسابها                         |
| 6. تحصل تلميذان على 5 و 7 في فرض الرياضيات. نضيف نقطة واحدة إلى كل منهما، فتكون نسبة الزيادة....   | نفسها بالنسبة إلى التلميذين. | أكبر بالنسبة إلى التلميذ الذي تحصل على 7 | أكبر بالنسبة إلى التلميذ الذي تحصل على 5 |
| 7. لحساب نسبة مئوية لنسبة مئوية أخرى.....  | نجمع النسبتين                | نطرح النسبة الثانية من النسبة الأولى     | نضرب النسبتين                            |
| 8. إذا إزداد سعر منتج بـ 30 % ثم إنخفض بـ 30 %، فإنه...  | لا يتغير                     | يزداد بـ 9 %                             | ينقص بـ 9 %                              |
| 9. يحتوي الاستبيان على 9 أسئلة. إذا تحصلت على $n$ إجابة صحيحة، فإن نسبة نجاحك هي.....  | $\frac{9n}{100}$             | $\frac{100n}{9}$                         | $\frac{100+n}{9}$                        |



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: نسبة الجزء إلى الكل

يمثل الجدول التالي ورقة التعويض للضمان الاجتماعي والتعاضدية. تطبق النسبة المنوية للتعويض من طرف الضمان الاجتماعي على مبلغ قاعدي معين، وتطبق نسبة التعويض للتعاضدية على المبلغ المعوض من طرف الضمان الاجتماعي.

| المبلغ المعوض | نسبة تعويض التعاضدية | المبلغ المعوض | نسبة التعويض | المبلغ القاعدي للتعويض | المبلغ المدفوع | التاريخ  |
|---------------|----------------------|---------------|--------------|------------------------|----------------|----------|
|               | 20 %                 | 40            |              | 50                     | 400            | 05.01.06 |
|               |                      |               |              | 234,50                 | 2340,50        | 06.01.06 |
| المجموع       |                      |               |              |                        |                |          |

يطلب ملء هذه الورقة بعد الإجابة عن الأسئلة التالية:

1. ما هي النسبة المنوية للتعويض من طرف الضمان الاجتماعي؟
2. ما هي المبالغ المعوضة من طرف الضمان الاجتماعي؟
3. ما هي المبالغ المعوضة من طرف التعاضدية؟

## نشاط 2: النسبة المنوية لنسبة منوية أخرى

يتكون نادي الشباب من 192 منخرطاً، 20 % منهم بنات، 35 % من البنات مسجلات في فرع الإعلام الآلي.

1. ما هو عدد البنات في هذا النادي؟
2. ما هو عدد المسجلات في فرع الإعلام الآلي؟
3. استنتج النسبة المنوية للمسجلات في الإعلام الآلي بالنسبة إلى عدد المنخرطين في النادي.
4. احسب هذه النسبة المنوية دون اعتبار السؤالين 1 و 2.

## نشاط 3: التطور والنسبة المنوية

ليكن  $x$  سعر منتج في سنة 2000. خضع هذا السعر إلى زيادة قدرها 10 % في سنة 2001 ثم إلى زيادة أخرى قدرها 15 % في 2002.

1. إذا كان  $x_1$  و  $x_2$  سعري المنتج في سنتي 2001 و 2002 على الترتيب. عبر عن  $x_1$  بدلالة  $x$  وعن  $x_2$  بدلالة  $x_1$  ثم استنتج عبارة  $x_2$  بدلالة  $x$ .
2. ما هي النسبة المنوية للزيادة الإجمالية لسعر هذا المنتج؟



# انشطة تمهيدية

## نشاط 4: المؤشرات

يمثل الجدول التالي تطوّر عدد الولادات ( بالآلاف ) في الجزائر بين 1997 و 2004 .

| السنة    | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| الولادات | 654  | 607  | 594  | 589  | 619  | 617  | 649  | 669  |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات .

نأخذ المؤشر 100 كأساس في السنة 1997 و لحساب المؤشر لسنة 1998 مثلا نتمم جدول التناسبية التالي:

|     |     |
|-----|-----|
| 654 | 607 |
| 100 | ؟   |

1. احسب مؤشر السنة 1998 ثم بنفس الطريقة اتمم الجدول التالي:

| السنة    | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| الولادات | 654  | 607  | 594  | 589  | 619  | 617  | 649  | 669  |
| المؤشر   | 100  |      |      |      |      |      |      |      |

2. استنتج من الجدول النسبة المئوية لتطوّر عدد الولادات بين 1997 و 1998 ثم بين 1997 و 2000 وبين 1997 و 2004 .

3. احسب النسبة المئوية لتطوّر عدد الولادات بين 2000 و 2003 .



## 1. نسبة الجزء إلى الكل

## تعريف

لتكن  $E$  المجموعة المرجعية ذات  $n$  عنصرا و  $A$  جزءا من  $E$  ذا  $a$  عنصرا.  
النسبة المئوية للجزء  $A$  إلى الكل  $E$  هو العدد  $x$  حيث:

$$\frac{x}{100} = \frac{a}{n} \text{ أي } x = \frac{a}{n} \times 100$$

## ملاحظات

- نقول إن العدد  $a$  يمثل  $x\%$  من العدد  $n$  و هذا يعني أن العددين  $a$  و  $n$  متناسبان مع العددين  $x$  و  $100$ .
- يمكن التعبير عن نسبة الجزء إلى الكل باستعمال كسر أو عدد عشري.

## مثال

يتكون قسم من 30 تلميذا منهم 18 ذكرا. النسبة المئوية للذكور هي:  $60 = \frac{18}{30} \times 100$  أي  $60\%$ .  
 $60\%$  هو  $\frac{3}{5}$  وهو أيضا  $0,6$ .

## 2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى

## خاصية

ليكن  $B$  جزءا من مجموعة  $E$  و  $A$  جزءا من  $B$  ( $A \subset B \subset E$ ).  
إذا كان  $B$  يمثل  $y\%$  من  $E$  و  $A$  يمثل  $x\%$  من  $B$ ، فإن الجزء  $A$  يمثل  $x\%$  من  $y\%$  من  $E$ ، أي  $\frac{x \times y}{100}\%$  من  $E$ .

## برهان

نعتبر  $a$ ،  $b$ ،  $n$  أعداد عناصر المجموعات  $A$ ،  $B$ ،  $E$  على الترتيب.

إذا كان  $B$  يمثل  $y\%$  من  $E$ ، فإن  $\frac{y}{100} = \frac{b}{n}$ . إذا كان  $A$  يمثل  $x\%$  من  $B$ ، فإن  $\frac{x}{100} = \frac{a}{b}$ .

نستنتج أن  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{n} = \frac{x}{100} \times \frac{y}{100} = \frac{x \times y}{100 \times 100}$ . لكن  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{n} = \frac{a}{n}$  و إذا كانت  $z$  النسبة المئوية للجزء  $A$

بالنسبة إلى المجموعة  $E$  فإن  $\frac{z}{100} = \frac{a}{n}$ .

ونحصل في الأخير على  $\frac{z}{100} = \frac{x \times y}{100 \times 100}$  أي  $z = \frac{x \times y}{100}$



**مثال**  
في قسم سنة ثانية ثانوي تسيير واقتصاد، يوجد 60% من الذكور، منهم 40% داخليون.  
النسبة المئوية للتلاميذ الذكور الداخليين في القسم هي:  $\frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{24}{100}$  أي 24%.

**ملاحظة**  
في مثل هذه الوضعيات، يجب تحديد المجموعة المرجعية بدقة.  
في المثال السابق، عدد الداخليين يمثل 24% من القسم كله ويمثل 40% من الذكور.

### 3. التطورات والنسب المئوية

• التعبير عن زيادة أو تخفيض

**مبرهنة**

- زيادة مقدار بنسبة مئوية  $a\%$  هو ضرب هذا المقدار في  $1 + \frac{a}{100}$ .
- تخفيض مقدار بنسبة مئوية  $b\%$  هو ضرب هذا المقدار في  $1 - \frac{b}{100}$ .

**برهان**

ليكن  $x_0$  القيمة الأولية لمقدار ما و  $x_1$  قيمته النهائية بعد زيادة  $a\%$  منه، إذن

$$x_1 = x_0 + \frac{a}{100} \times x_0 = x_0 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)$$

في حالة تخفيض  $x_0$  بـ  $b\%$  نجد بنفس الطريقة  $x_1 = x_0 - \frac{b}{100} \times x_0 = x_0 \times \left(1 - \frac{b}{100}\right)$ .

**أمثلة**

- الزيادة بـ  $40\%$  هو الضرب في  $1 + \frac{40}{100} = 1,4$ .
- التخفيض بـ  $25\%$  هو الضرب في  $1 - \frac{25}{100} = 0,75$ .
- الضرب في  $1,085$  هو الزيادة بـ  $8,5\%$ .
- الضرب في  $0,9$  هو التخفيض بـ  $10\%$ .

**ملاحظة**

يمكن التعبير عن زيادة باستعمال عدد موجب وعن تخفيض باستعمال عدد سالب.  
فمثلا، الزيادة بـ  $15\%$  تمثل تطورا بـ  $+15\%$  و التخفيض بـ  $38\%$  تمثل تطورا بـ  $-38\%$ .



• التطور المطلق والتطور النسبي

تعريف

ليكن  $x_0$  القيمة الأولية لمقدار  $x$  و  $x_1$  قيمته النهائية بعد تطور.  
 ■ نسمي التطور المطلق لهذا المقدار الفرق  $x_1 - x_0$  و نرمز له  $\Delta x$ .  
 ■ نسمي التطور النسبي لهذا المقدار حاصل القسمة  $\frac{\Delta x}{x_0}$  أي  $\frac{x_1 - x_0}{x_0}$ .

ملاحظات

- نعبر عن التطور المطلق بنفس وحدة المقدار.
- نعبر عن التطور النسبي بعدد وبدون وحدة.
- إذا كان التطور المطلق (أو النسبي) موجبا، فإن هذا التطور يمثل زيادة.
- إذا كان التطور المطلق (أو النسبي) سالبا، فإن هذا التطور يمثل تخفيضا.

• المعامل الضربي

تعريف

ليكن  $x_0$  القيمة الأولية لمقدار ما و  $x_1$  قيمته النهائية بعد تطور. نسمي المعامل الضربي العدد  $k$   
 حيث  $k = \frac{x_1}{x_0}$ .

ملاحظات

- إذا كان  $k$  هو المعامل الضربي الموافق لتطور ما، فإن النسبة المئوية لهذا التطور هو العدد  $(k - 1) \times 100$ .
- إذا كان التطور عبارة عن زيادة، فإن المعامل الضربي أكبر من 1.
- إذا كان التطور عبارة عن تخفيض، فإن المعامل الضربي أصغر من 1.

أمثلة

- كان سعر لتر البنزين 20 دينارا في تاريخ  $t_0$  و أصبح 23 دينارا في التاريخ  $t_1$ .
  - كان سعر الهاتف النقال 5300 دينار في تاريخ  $t_0$  و أصبح 4920 دينارا في التاريخ  $t_1$ .
- يمثل الجدول التالي الطرق المختلفة المعبرة عن هذا التطور.



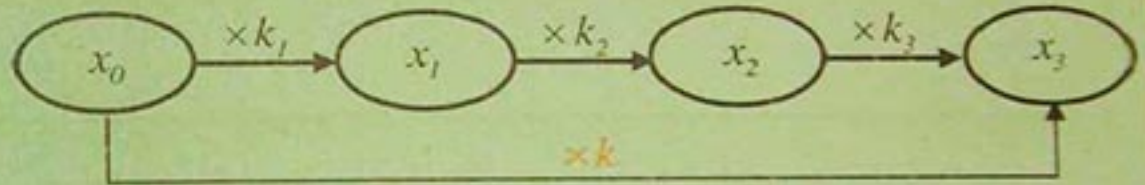
| التطور                | الدستور  | الزيادة                              | التخفيض                                     |
|-----------------------|--|--------------------------------------|---|
| التطور المطلق         | $\Delta x = x_1 - x_0$                         | $23 - 20 = 3$<br>زيادة 3 دنانير      | $4920 - 5300 = -380$<br>تخفيض 380 ديناراً   |
| المعامل الضربي        | $k = \frac{x_1}{x_0}$                          | $\frac{23}{20} = 1,15$               | $\frac{4920}{5200} \approx 0,9462$          |
| النسبة المئوية للتطور | $(k-1) \times 100$                             | $(1,15 - 1) \times 100 = 15$<br>15 % | $(0,9462 - 1) \times 100 = -5,38$<br>5,38 % |
| التطور النسبي         | $\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}$ | $\frac{3}{20} = 0,15$                | $\frac{-380}{5200} \approx -0,7308$         |

## • التطورات المتعاقبة

### خاصية

إذا خضعت قيمة ما إلى تطورات متعاقبة (زيادات أو تخفيضات) ، فإن المعامل الضربي الإجمالي يساوي جداء المعاملات الضربية للتطورات.

$$k = k_1 \times k_2 \times k_3$$



### برهان لدينا

$$x_1 = x_0 \times k_1$$

$$x_2 = x_1 \times k_2 = (x_0 \times k_1) \times k_2 = x_0 \times (k_1 \times k_2)$$

$$x_3 = x_2 \times k_3 = x_0 \times (k_1 \times k_2) \times k_3 = x_0 \times (k_1 \times k_2 \times k_3)$$

إذن  $x = x_0 \times k$  حيث  $k = k_1 \times k_2 \times k_3$ .

### مثال

يزيد سعر منتج بـ 24% ثم ينخفض بـ 17%. ما هي نسبة تطوره ؟  
حساب نسبة التطور:

$$\left(1 + \frac{24}{100}\right) \times \left(1 - \frac{17}{100}\right) = 1,24 \times 0,83 \approx 1,029$$

(لأن  $(1,029 - 1) \times 100 = 2,9$ )

### حذار

لا تجمع النسب المئوية الخاصة بالتطورات.

### مثال

يزداد مقدار بـ 30% ثم بـ 40%. نسبة تطوره هي:

$$\left(1 + \frac{30}{100}\right) \times \left(1 + \frac{40}{100}\right) = 1,3 \times 1,4 = 1,82$$

هذا يعني زيادة بـ 82% بينما  $30\% + 40\% \neq 82\%$



## 4. المؤشرات

### تعريف

لتكن سلسلة قيم  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  المرفقة بالأزمنة  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$  على الترتيب. نأخذ 100 كأساس في الزمن  $t_0$ .

نسمي مؤشرا في الزمن  $t_i$  العدد  $I_i$  حيث  $I_i = \frac{x_i}{x_0} \times 100$

### خاصية

النسبة المئوية لتطور مقدار من الزمن  $t_0$  إلى الزمن  $t_i$  تساوي  $(I_i - 100)\%$ .

### برهان

النسبة المئوية لتطور مقدار من الزمن  $t_0$  إلى الزمن  $t_i$  هو  $a$  حيث

$$a = \frac{x_i - x_0}{x_0} \times 100 = \frac{x_i}{x_0} \times 100 - \frac{x_0}{x_0} \times 100 = I_i - 100$$

### مثال

يبين الجدول تطور سعر منتج خلال السنوات 2003، 2004، 2005.

| السنة                             | 2003 | 2004                             | 2005                               |
|-----------------------------------|------|----------------------------------|------------------------------------|
| السعر                             | 15   | 21                               | 23,40                              |
| المؤشر<br>(الأساس 100 في<br>2003) | 100  | $\frac{21}{15} \times 100 = 140$ | $\frac{23,4}{15} \times 100 = 156$ |
| النسبة المئوية للتطور             |      | 40 % لأن $140 - 100 = 40$        | 56 % لأن $156 - 100 = 56$          |



## 1. حساب نسبة الجزء إلى الكل

طريقة

لحساب نسبة الجزء إلى الكل نحدد بعناية المجموعة المرجعية (المجموعة الكلية).

تمرين

يمثل الجدول التالي توزيع منخرطي ناد رياضي حسب نوع الرياضة وصنف اللاعبين:

|         | كرة القدم | كرة اليد | كرة السلة |
|---------|-----------|----------|-----------|
| الأكابر | 28        | 18       | 15        |
| الأصاغر | 24        | 22       | 12        |
| الأشبال | 36        | 15       | 14        |

1. احسب النسبة المئوية للأصاغر في كرة اليد بالنسبة إلى مجموع لاعبي كرة اليد.
2. احسب النسبة المئوية للاعبين في كرة القدم بالنسبة إلى مجموع المنخرطين في هذا النادي.
3. احسب النسبة المئوية للأكابر في كرة السلة بالنسبة إلى مجموع المنخرطين في هذا النادي.  
(تدور النتائج إلى 0,01).

حل

1. عدد الأصاغر في كرة اليد هو 22 و مجموع لاعبي كرة اليد في النادي هو  
 $18 + 22 + 15 = 55$

وتحسب النسبة المئوية  $\frac{22}{55} \times 100 = 40$  أي 40 %.

2. عدد لاعبي كرة القدم هو  $28 + 24 + 36 = 88$  و مجموع منخرطي النادي هو  
 $(28 + 24 + 36) + (18 + 22 + 15) + (15 + 12 + 14) = 184$

وتحسب النسبة المئوية  $\frac{88}{184} \times 100 \approx 47,83$  أي 47,83 %.

3. عدد الأكابر في كرة السلة هو 15 و مجموع منخرطي النادي هو 184،

وتحسب النسبة المئوية  $\frac{15}{184} \times 100 \approx 8,15$  أي 8,15 %.

ملاحظات

▪ قبل إجراء كل الحسابات، يستحسن حساب المجاميع الأفقية والعمودية المختلفة في الجدول.

|         | كرة القدم | كرة اليد | كرة السلة | المجموع |
|---------|-----------|----------|-----------|---------|
| الأكابر | 28        | 18       | 15        | 61      |
| الأصاغر | 24        | 22       | 12        | 58      |
| الأشبال | 36        | 15       | 14        | 65      |
| المجموع | 88        | 55       | 41        | 184     |



# طرائق

- عند إجراء القسومات المختلفة، ينبغي الاحتفاظ بالعدد الكافي من الأرقام بعد الفاصلة وتدوير النتيجة النهائية فقط.
- لمعرفة قيمة نسبة مئوية مدوّرة إلى 0,01، نحسب القيمة العشرية للجزء بـ 5 أرقام بعد الفاصلة ثم ندور الرقم الرابع وأخيراً نضرب في 100.

مثال

في السؤال الثاني للتمرين السابق لدينا  $\frac{88}{184} \approx 0,47826 \approx 0,4783$

و منه  $\frac{88}{184} \times 100 \approx 0,4783 \times 100 \approx 47,83$

## 2. حساب النسبة المئوية الإجمالية لتطورات متعاقبة

طريقة

لحساب النسبة المئوية الإجمالية لـ  $n$  تطورا متعاقبا، نتبع المراحل التالية:

- نترجم كلا من التطورات المعطاة بالمعامل الضربي الموافق.
- نطبق مبدأ جداء المعاملات الضربية  $k = k_1 \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$ .
- نعبر عن التطور الإجمالي في شكل نسبة مئوية  $a\%$  حيث  $a = (k - 1) \times 100$ .

تمرين

عدد تلاميذ ثانوية في سنة 2002 هو 840 تلميذا و في سنة 2003 ينتقل هذا العدد إلى 882 تلميذا.  
في سنة 2004 إزداد هذا العدد بـ 12% وانخفض في سنة 2005 بـ 8%.  
احسب النسبة المئوية للتطور الإجمالي لتعداد هذه الثانوية مباشرة من 2002 إلى 2005 دون حساب عدد التلاميذ في كل سنة.

حل

- المعامل الضربي الموافق للتطور في سنة 2003 هو  $k_1 = \frac{882}{840} = 1,05$ .
- المعامل الضربي الموافق للتطور في سنة 2004 هو  $k_2 = 1 + 0,12 = 1,12$ .
- المعامل الضربي الموافق للتطور في سنة 2005 هو  $k_3 = 1 - 0,08 = 0,92$ .
- المعامل الضربي الإجمالي هو

$$\begin{aligned} k &= k_1 \times k_2 \times k_3 \\ &= 1,05 \times 1,12 \times 0,92 \\ &= 1,08192 \end{aligned}$$



# طرائق

لنسبة المنوية لهذا التطور الإجمالي هو:

$$a = (k - 1) \times 100$$

$$= (1,08192 - 1) \times 100$$

$$= 0,08192 \times 100 = 8,192 = 8,2$$

إن ازداد عدد التلاميذ في هذه الثانوية بين 2002 و 2005 بـ 8,2 %.

## 3. حساب مؤشرات باستعمال حاسبة بيانية طريقة:

لحساب مؤشرات باستعمال حاسبة بيانية نستعمل القوائم المختلفة المتواجدة في برنامج الإحصاء ثم نطبق الدساتير المناسبة.

### تمرين

يمثل الجدول التالي تطور عدد الوفيات (بالآلاف) في الجزائر من 1997 إلى 2003:

| السنة   | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| الوفيات | 178  | 144  | 141  | 140  | 138  | 145  | 141  |

يؤخذ المؤشر 100 كأساس في سنة 2000.  
باستعمال حاسبة بيانية، عين مؤشرات السنوات الأخرى.

### حل

باستعمال الحاسبة TI 83

1. نحجز السنوات في القائمة L1 للحاسبة وأعداد الوفيات الموافقة في القائمة L2 باستعمال اللمسة **STAT** واختيار الوظيفة **Edit**.

| L1   | L2  |
|------|-----|
| 1997 | 178 |
| 1998 | 144 |
| 1999 | 141 |
| 2000 | 140 |
| 2001 | 138 |
| 2002 | 145 |
| 2003 | 141 |

L2(7) = 141

2. لحساب المؤشرات نقسم كلا من قيم القائمة L2 على القيمة

140 الموافقة لسنة الأساس 2000 ولهذا:

نضع الزايق في **2nd** ثم ندخل الدستور "  $L2/L2(4) \times 100$  " بتنفيذ البرنامج:

**2nd** **2** **÷** **2nd** **2** **(** **4** **)** **×** **100** **ENTER**

| L1   | L2  | L3  |
|------|-----|-----|
| 1997 | 178 | 127 |
| 1998 | 144 | 103 |
| 1999 | 141 | 101 |
| 2000 | 140 | 100 |
| 2001 | 138 | 99  |
| 2002 | 145 | 104 |
| 2003 | 141 | 101 |

$L3 = L2 / L2(4) * 100$

نحصل على المؤشرات التالية:

| السنة    | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|
| الوفيات  | 178  | 144  | 141  | 140  | 138  | 145  | 141  |
| المؤشرات | 127  | 103  | 101  | 100  | 99   | 104  | 101  |



# طرائق

## 4. حساب مؤشرات باستعمال مجداول

### طريقة

لحساب مؤشرات باستعمال مجداول نستعمل القوائم المختلفة المتواجدة في برنامج الإحصاء ثم نطبق الدساتير المناسبة.

### تمرين

يمثل الجدول التالي عدد السكان و عدد الزيجات في الجزائر من 1990 إلى 2004. يؤخذ المؤشر 100 كأساس في سنة 1995. عين، باستعمال مجداول، مؤشرات السنوات الأخرى بالنسبة إلى كل من السكان والزيجات.

|    | A     | B                | C       |
|----|-------|------------------|---------|
| 1  | السنة | السكان (بالآلاف) | الزيجات |
| 2  | 1990  | 25 022           | 149 345 |
| 3  | 1991  | 25 643           | 151 467 |
| 4  | 1992  | 26 271           | 159 380 |
| 5  | 1993  | 26 894           | 153 137 |
| 6  | 1994  | 27 496           | 147 954 |
| 7  | 1995  | 28 060           | 152 786 |
| 8  | 1996  | 28 566           | 156 870 |
| 9  | 1997  | 29 045           | 157 831 |
| 10 | 1998  | 29 507           | 158 298 |
| 11 | 1999  | 29 965           | 163 126 |
| 12 | 2000  | 30 416           | 177 548 |
| 13 | 2001  | 30 879           | 194 273 |
| 14 | 2002  | 31 357           | 218 620 |
| 15 | 2003  | 31 848           | 240 463 |
| 16 | 2004  | 32 364           | 267 633 |

### حل

1. لحساب مؤشرات السكان يجب تقسيم كل من قيم العمود B على القيمة المتواجدة في الخلية B7 الموافقة لسنة الأساس 1995 ولذا: نكتب في الخلية D2 الدستور كما في الجدول المقابل (تدل الكتابة \$B\$7 على " مرجع مطلق " يعني أن قيمة الخلية B7 تبقى ثابتة عند نقل الدستور إلى الخلايا الأخرى).

|   | A     | B                | C       | D                                |
|---|-------|------------------|---------|----------------------------------|
| 1 | السنة | السكان (بالآلاف) | الزيجات | مؤشر السكان                      |
| 2 | 1990  | 25 022           | 149 345 | $\frac{25022}{28060} \times 100$ |
| 3 | 1991  | 25 643           | 151 467 |                                  |
| 4 | 1992  | 26 271           | 159 380 |                                  |
| 5 | 1993  | 26 894           | 153 137 |                                  |
| 6 | 1994  | 27 496           | 147 954 |                                  |
| 7 | 1995  | 28 060           | 152 786 |                                  |
| 8 | 1996  | 28 566           | 156 870 |                                  |

2. نختار الخلية D2 ونسحب بالزائق حتى الخلية D16 ونحصل على مؤشرات السكان.

|    | A     | B                | C       | D           |
|----|-------|------------------|---------|-------------|
| 1  | السنة | السكان (بالآلاف) | الزيجات | مؤشر السكان |
| 2  | 1990  | 25 022           | 149 345 | 89,17       |
| 3  | 1991  | 25 643           | 151 467 | 91,39       |
| 4  | 1992  | 26 271           | 159 380 | 93,62       |
| 5  | 1993  | 26 894           | 153 137 | 95,84       |
| 6  | 1994  | 27 496           | 147 954 | 97,99       |
| 7  | 1995  | 28 060           | 152 786 | 100,00      |
| 8  | 1996  | 28 566           | 156 870 | 101,80      |
| 9  | 1997  | 29 045           | 157 831 | 103,51      |
| 10 | 1998  | 29 507           | 158 298 | 105,16      |
| 11 | 1999  | 29 965           | 163 126 | 107,79      |
| 12 | 2000  | 30 416           | 177 548 | 108,40      |
| 13 | 2001  | 30 879           | 194 273 | 110,05      |
| 14 | 2002  | 31 357           | 218 620 | 111,75      |
| 15 | 2003  | 31 848           | 240 463 | 113,50      |
| 16 | 2004  | 32 364           | 267 633 | 115,34      |

3. بنفس الطريقة نحصل في العمود E على مؤشرات الزواج.



|    | A     | B                | C       | D           | E           |
|----|-------|------------------|---------|-------------|-------------|
| 1  | السنة | السكان (بالآلاف) | الزيجات | مؤشر السكان | مؤشر الزواج |
| 2  | 1990  | 25 022           | 149 345 | 89,17       | 97,75       |
| 3  | 1991  | 25 643           | 151 467 | 91,39       | 99,14       |
| 4  | 1992  | 26 271           | 159 380 | 93,62       | 101,73      |
| 5  | 1993  | 26 894           | 153 137 | 95,84       | 100,23      |
| 6  | 1994  | 27 496           | 147 954 | 97,99       | 96,74       |
| 7  | 1995  | 28 060           | 152 786 | 100,00      | 100,00      |
| 8  | 1996  | 28 566           | 156 870 | 101,80      | 102,77      |
| 9  | 1997  | 29 045           | 157 831 | 103,51      | 103,30      |
| 10 | 1998  | 29 507           | 158 298 | 105,16      | 103,11      |
| 11 | 1999  | 29 965           | 163 126 | 107,79      | 106,77      |
| 12 | 2000  | 30 416           | 177 548 | 108,40      | 116,86      |
| 13 | 2001  | 30 879           | 194 273 | 110,05      | 127,15      |
| 14 | 2002  | 31 357           | 218 620 | 111,75      | 143,29      |
| 15 | 2003  | 31 848           | 240 463 | 113,50      | 157,29      |
| 16 | 2004  | 32 364           | 267 633 | 115,34      | 176,12      |



# طرائق

## 5. التمثيل البياني لتطور باستعمال الحاسبة البيانية

طريقة

للحصول على التمثيل البياني لتطور باستعمال الحاسبة البيانية من النوع TI 83 نستعمل الوظيفة التي نحصل عليها باللمسيتين  ، 



تمرين

يمثل الجدول التالي تطور مؤشرين، أساسهما 100 في الزمن 1. مثل بيانيا تطور كل من هذين المؤشرين ثم قارن التطورين الموافقين.

| الزمن | المؤشر 1 | المؤشر 2 |
|-------|----------|----------|
| 1     | 100      | 100      |
| 2     | 101      | 112      |
| 3     | 105      | 125      |
| 4     | 106      | 136      |
| 5     | 107      | 138      |
| 6     | 108      | 139      |


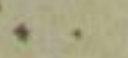
| L1  | L2  | L3  |
|-----|-----|-----|
| 100 | 100 | 100 |
| 101 | 112 | 101 |
| 105 | 125 | 105 |
| 106 | 136 | 106 |
| 107 | 138 | 107 |
| 108 | 139 | 108 |




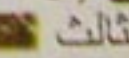
L3(1)=100

1. نحجز الأزمنة في القائمة L1 للحاسبة وقيم المؤشر 1 في القائمة L2 وقيم المؤشر 2 في القائمة L3 باستعمال اللمسة  واختيار الوظيفة 



|           |    |    |
|-----------|----|----|
| Plot1_On  | L1 | L2 |
| Plot2_Off | L1 | L2 |
| Plot3_Off | L1 | L2 |

2. نحصل على الوظيفة  باللمسيتين  و 


|        |   |
|--------|---|
| Plot2  | Plot3   |
| Off    | Off   |
| Type:  |  |
| Xlist: | L1  |
| Ylist: | L2  |
| Mark:  |  |

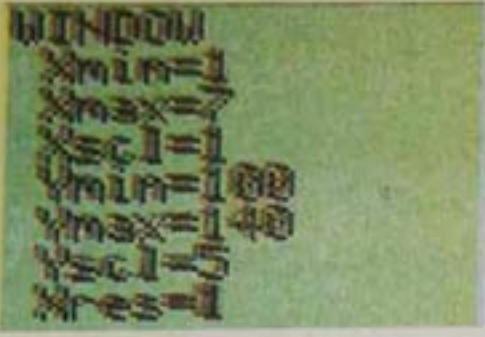
3. للحصول على التمثيل البياني للمؤشر 1 نضغط على  (أو على ) للحصول على الوظيفة  ثم نختار النوع الثالث  للتمثيل البياني ونسجل في L1 في Xlist: و L2 في Ylist: واختيار شكل النقط في Mark:


|             |
|-------------|
| MEMORY      |
| 3:Zoom Out  |
| 4:ZDecimal  |
| 5:ZSquare   |
| 6:ZStandard |
| 7:ZTrig     |
| 8:ZInteger  |
| ZoomStat    |

4. نختار النافذة الإحصائية باستعمال اللمسة  والوظيفة 






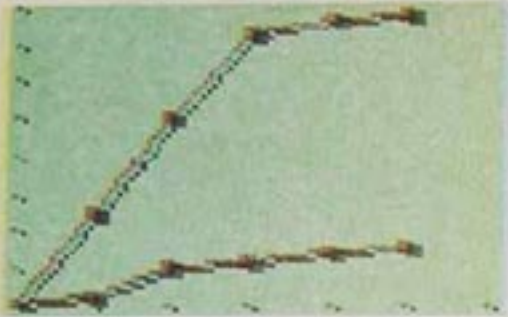
5. نضبط الفواصل في النافذة بالضغط على اللمسة .


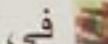


6. نظهر التمثيل باللمسة .




7. للحصول على التمثيل البياني للمؤشر 2 نتبع نفس المراحل السابقة مع اختيار الوظيفة  وتسجيل L1 في  و L3 في .



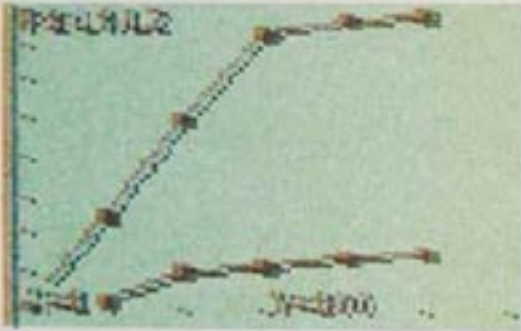
نحصل على التمثيل البياني للمؤشرين في نفس الورقة باستعمال الوظيفة  في .

## ملاحظة

يمكن استظهار إحداثيات نقط التمثيل البياني باستعمال اللمسة  و ننتقل من مثل إلى آخر أو من نقطة أحد التمثيلين إلى نقطة



أخرى منه باستعمال لمسات التنقل



نلاحظ أن المؤشر 1 يزداد بصفة منتظمة و ببطء، أما المؤشر 2 فيزداد بسرعة في السنوات الأربع الأولى .



# مسألة محلولة

دفع مقتصد ثنوية 18 000 دينار لشراء الورق خلال سنة 2004.

1. علما أن رزمة الورق تحتوي على 500 ورقة وسعر الرزمة هو 240 دينارا، احسب عدد الرزم المستهلكة.
2. إزداد سعر الرزمة في 01 جانفي 2005 بـ 5% .  
(أ) إذا استعمل المقتصد نفس المبلغ، ما هو عدد الرزم (بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان) الذي يمكن شراؤها خلال سنة 2005؟  
(ب) عين النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005 (تدور النتيجة إلى 0,1).
3. نفرض أن زيادة سعر الورق في 01 جانفي 2005 هي %  $x$  .  
(أ) بين أن عدد الرزم الذي يمكن للمقتصد شراؤه في 2005 هو  $\frac{7500}{100+x}$  .  
(ب) احسب بدلالة  $x$  النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في 2005.  
(ج) إذا لم يرد المقتصد تخفيض استهلاك الورق بأكثر من 8% . ما هي في هذه الحالة أكبر قيمة للنسبة المئوية  $x$  التي يمكن تحملها؟

حل

$$1. \frac{18000}{240} = 75 \text{ إذن عدد الرزم هو } 75.$$

$$2. \text{ (أ) بعد زيادة } 5\% \text{ يصبح سعر الرزمة في } 2005 \text{ هو } 240 \times 1,05 = 252 \text{ أي } 240 \left(1 + \frac{5}{100}\right) \text{ أي } 252 \text{ دينارا.}$$

$$\text{إذن عدد الرزم الذي يمكن شراؤه خلال سنة } 2005 \text{ هو } 71 \approx \frac{18000}{252} \text{ أي } 71 \text{ رزمة.}$$

$$\text{(ب) النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في } 2005 \text{ هو } 5,3 \approx \frac{75-71}{75} \times 100 \text{ أي } 5,3\%.$$

$$3. \text{ (أ) سعر الرزمة في } 2004 \text{ هو } 240 \text{ دينارا وبعد الزيادة بـ } x\% \text{ يكون السعر الجديد للرزمة:}$$

$$240 \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{240(100+x)}{100} \text{ ومنه عدد الرزم } n \text{ بدلالة } x \text{ هو}$$

$$n = \frac{7500}{100+x} \text{ إذن } n = \frac{18000}{240(100+x)} = \frac{18000 \times 100}{240(100+x)} = \frac{7500}{100+x}$$

$$\text{(ب) النسبة المئوية لتخفيض استهلاك الورق في } 2005 \text{ هو}$$

$$\text{أي } \frac{75 - \frac{7500}{100+x}}{75} \times 100 = \frac{7500 + 75x - 7500}{75} \times 100 = \frac{75x}{75(100+x)} \times 100 = \frac{100x}{100+x} \%$$

$$\text{(ج) بما أن المقتصد لا يريد تخفيض استهلاك الورق بأكثر من } 8\% \text{ فينبغي ألا تتجاوز النسبة}$$

$$\text{المئوية لتخفيض استهلاك الورق } 8\% \text{ في } 2005. \text{ إذن لدينا المتراجحة } 8 < \frac{100x}{100+x}$$

$$\text{أي } 100x < 8x + 800 \text{ أي } x < \frac{800}{92} \text{ إذن } x < 8,7.$$

$$\text{إذن أكبر نسبة مئوية لزيادة سعر الرزمة يمكن تحملها هي } 8,7\%.$$



1. صحيح أو خاطئ

(أ) عندما نضرب قيمة في 1,14، فإن هذه القيمة تزيد بـ 14 %

(ب) عندما نضرب قيمة في 0,93، فإن هذه القيمة تنقص بـ 7 %

(ج) إذا كان 15 % من التلاميذ في ثانوية داخليين و 23 % نصف داخليين، فإن 52 % خارجيون

(د) في ثانوية، إذا كان 48% من الذكور لهم أقل من 18 سنة و 43% من الإناث لهن أقل من 18 سنة، فإن 9 % من تلاميذ الثانوية لهم أقل من 18 سنة

(هـ) عندما يزيد سعر منتج بـ % x ثم ينقص بـ % x فإنه لا يتغير

(و) الزيادة دائما أصغر من 100 %

(ز) إذا خضع مقدار لزيادة 20 % متبوعة بزيادة 25 %، فهذا يعني خضوعه لزيادة 45 %

(ي) زيادة مقدار بـ 100 % تعني ضرب هذا المقدار في 2

نسبة الجزء إلى الكل

2. يتكون قسم من 36 تلميذا منهم 21 ذكرا ما هي النسبة المئوية للذكور في هذا القسم؟

3. كان سعر منتج 175 دينارا ثم أصبح 150 دينارا

عبر عن هذه الزيادة في شكل نسبة مئوية

4. أعط الكتابات العشرية للنسب المئوية التالية: 56 % ، 3 % ، 109 % ، 7,8 % ، 0,9 %

5. اكتب الأعداد العشرية التالية في شكل نسب مئوية:

2,07 ، 1,39 ، 0,0035 ، 0,2 ، 0,48

6. تحتوي ثانوية على 850 تلميذا، منهم 28 % مسجلون في السنة الثانية و 24 % من تلاميذ السنة الثانية مسجلون في شعبة التسيير والاقتصاد (1) احسب عدد تلاميذ السنة الثانية (2) أ) احسب عدد تلاميذ السنة الثانية تسيير واقتصاد (ب) ما هي النسبة المئوية التي يمثلها هذا العدد بالنسبة إلى عدد تلاميذ الثانوية

7. إليك بعض المعطيات الديمغرافية:

|        |        |
|--------|--------|
| ذكور   | إناث   |
| 50,4 % | 49,6 % |

|               |                 |                |
|---------------|-----------------|----------------|
| ذكور          |                 |                |
| أقل من 18 سنة | بين 18 و 60 سنة | أكثر من 60 سنة |
| 18%           | 65 %            | 17%            |

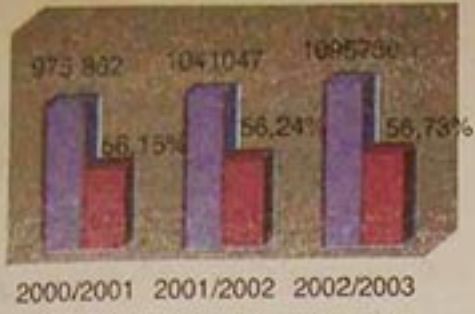
|               |                 |                |
|---------------|-----------------|----------------|
| إناث          |                 |                |
| أقل من 18 سنة | بين 18 و 60 سنة | أكثر من 60 سنة |
| 22%           | 63%             | 15%            |

اتم الجدول التالي بتحديد النسب المئوية الموافقة للفئات المختلفة بالنسبة إلى المجتمع الكلي:

|         |               |                  |                |         |
|---------|---------------|------------------|----------------|---------|
|         | أقل من 18 سنة | من 18 إلى 60 سنة | أكثر من 60 سنة | المجموع |
| ذكور    |               |                  |                |         |
| إناث    |               |                  |                |         |
| المجموع |               |                  |                |         |

8. سعر معطف، بعد تخفيض قدره 15% هو 3245 دينارا ما هو سعره الأصلي؟





المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

احسب عدد الإناث في كل من السنوات الدراسية المعطاة.

15. تمثل الأعداد المدونة في القائمة L1 لحاسبة بيانية أسعار أثاث منزلي (بالدينانير):

| L1     | L2  | L3  |
|--------|-----|-----|
| 2256.0 | --- | --- |
| 4878.0 | --- | --- |
| 7889.0 | --- | --- |
| 2895.0 | --- | --- |
| 1828.0 | --- | --- |
| 2559.0 | --- | --- |
| ---    | --- | --- |
| L2 =   |     |     |

1) إذا علمت أن الرسم على القيمة المضافة هو 17% فما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L2 للحصول على قيمة هذا الرسم على كل سعر؟  
2) استنتج قيمة الرسم على سعر كل أثاث.

16. يمثل المخطط التالي توزيع أساتذة التعليم الثانوي في الجزائر:



المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

احسب النسبة المئوية لكل من فئتي النساء والأجانب، في كل السنوات المدرسية المذكورة.

9. نضع مبلغا ماليا قدره 12000 دينار في صندوق التوفير بفائدة سنوية قدرها 3.5% في كل سنة تضاف الفائدة إلى المبلغ (فوائد مركبة).  
1) ما هو المبلغ الكلي المحصل عليه بعد سنة واحدة؟ بعد سنتين؟ بعد 10 سنوات؟  
2) بعد كم سنة نحصل على ضعف المبلغ الأولي؟

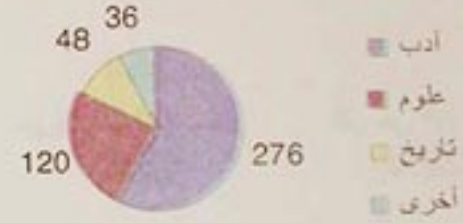
10. توظف مؤسسة اقتصادية 8 إطارات والباقي عمال.

ما هو عدد الأجراء في هذه المؤسسة علما أن نسبة الإطارات هي 2.75% من العدد الإجمالي للأجراء؟

11. كان سعر حاسوب 52000 دينار ثم أصبح 50440 ديناراً.

ما هي النسبة المئوية الموافقة لهذا التخفيض؟

12. يمثل المخطط الدائري التالي توزيع الكتب في مكتبة حسب أنواعها.



احسب النسبة المئوية لكل نوع.

13. أكمل الجدول التالي لنتائج امتحان البكالوريا في التعليم العام لدورة جوان 2002:

|               | ذكور    | إناث    | المجموع |
|---------------|---------|---------|---------|
| المسجلون      |         | 261 657 | 449 023 |
| الحاضرون      | 162 414 |         |         |
| الناجحون      | 45 727  | 73 581  |         |
| نسبة النجاح % |         | 29.72   |         |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

14. يمثل المخطط التالي عدد التلاميذ المسجلين في التعليم الثانوي في الجزائر:



نسب مئوية لنسب مئوية

17. في ثانوية يوجد 53 % من التلاميذ ذكور حيث 25 % منهم مسجلون في الأقسام النهائية. ما هي النسبة المئوية لعدد الذكور في الأقسام النهائية بالنسبة إلى عدد تلاميذ الثانوية.

18. في مكتبة، نجد 30 % من الكتب أدبية منها 70 % بالعربية. عبر، بنسبة مئوية، عن حصة الكتب الأدبية العربية بالنسبة إلى العدد الإجمالي للكتب في المكتبة.

19. يسع قسم 60 % بنات حيث 75 % منهن نصف داخليات و 40 % من الذكور خارجيون ولا يوجد تلاميذ داخليون. عبر عن نسبة التلاميذ نصف الداخليين في هذا القسم. تعطى النتيجة في شكل نسبة مئوية ثم في شكل كسر ثم في شكل عدد عشري.

20. خضع سعر منتج إلى 3 زيادات متعاقبة قدرها 6 % ، 8 % ، 10 % . ما هي النسبة المئوية للزيادة الإجمالية؟

21. تحصلت مؤسسة صناعية على فائدة إجمالية قدرها 6 % من دخلها الكلي حيث قدرت الفائدة على إحدى منتوجاتها بـ 15 % من الفائدة الإجمالية. عبر بنسبة مئوية عن فائدة هذا المنتج بالنسبة إلى الدخل الكلي.

22. اشترى رجل قطعة أرض و خصص خمسا منها لتكون حديقة وخصص 25 % من الحديقة للأزهار.

عبر بكسر ثم بنسبة مئوية عن الجزء الذي تمثله القطعة المغروسة بالأزهار بالنسبة إلى قطعة الأرض الكلية.

23. يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب الجنس ومستوى التمدريس.

|         | 1 ثا | 2 ثا | 3 ثا | المجموع |
|---------|------|------|------|---------|
| اناث    | 18 % | 19 % | 12 % | 49 %    |
| ذكور    | 24 % | 17 % | 10 % | 51 %    |
| المجموع | 42 % | 36 % | 22 % | 100 %   |

ما هي النسبة المئوية للإناث في السنة الأولى؟

24. عين النسب المئوية الموافقة لما يلي:

- (أ) 25 % من 18 % ، (ب)  $\frac{1}{10}$  من 40 % ،  
 (ج) الثلث من النصف ، (د)  $\frac{3}{4}$  من  $\frac{8}{10}$  ،  
 (هـ) 12 % من  $\frac{5}{36}$  ، (و) 20 % من  $\frac{4}{5}$

25. إذا كان 70 % من تلاميذ قسم ذكورا و 25 % منهم يمارسون كرة القدم وعدد لاعبي كرة القدم هو 7. فما هو عدد التلاميذ في هذا القسم؟

التطورات والنسب المئوية

26. سعر منتج هو 125 دينارا. احسب سعر هذا المنتج في كل من الحالتين التاليتين:  
 (أ) بعد زيادة قدرها 6 % .  
 (ب) بعد تخفيض قدره 8 % .

27. عين النسبة المئوية لتطور مقدار في الحالات التالية:

- (1) يضرب المقدار في 3 .  
 (2) يضرب المقدار في 0,4 .  
 (3) ينقص بالنصف .

28. عين المعاملات الضربية الموافقة للتطورات التالية:

- (أ) الزيادة بـ 25 % ، (ب) التخفيض بـ 40 % ،  
 (ج) التخفيض بـ 3,2 % ، (د) الزيادة بـ 200 % .



**34** كان سعر جهاز التليفزيون 17000 دينار ثم أصبح 16200 دينار. احسب كلا من التطور المطلق والتطور النسبي والمعامل الضربي والنسبة المئوية الموافقة لهذا التطور.

**35** صار سعر منتج 845,25 دينارا بعد زيادتين متتاليتين قدرهما 8% و 12%. ما هو السعر الأولي لهذا المنتج؟

**36** أتمم الجدول التالي:

| المعامل الضربي | الزيادة (%) | التخفيض (%) |
|----------------|-------------|-------------|
|                | 1,3         |             |
|                |             | 23          |
| 0,67           |             |             |
| 1,004          |             |             |
|                | 258         |             |
|                |             | 3,5         |

**37** سجلنا، في القائمة L1 لحاسبة، أسعارا مختلفة وفي القائمة L2 الأسعار الموافقة بعد تطورات معينة.

| L1     | L2     | L3    |
|--------|--------|-------|
| 156.00 | 140.00 | ----- |
| 238.00 | 256.00 |       |
| 120.00 | 135.00 |       |
| 260.00 | 240.00 |       |
| 785.00 | 723.00 |       |
| -----  | -----  |       |
| L3 =   |        |       |

(1) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L3 للحصول على التطورات المطلقة الموافقة؟ عين هذه التطورات

(2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L4 للحصول على التطورات النسبية الموافقة؟ عين هذه التطورات.

(3) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L5 للحصول على المعاملات الضربية الموافقة؟ عين هذه المعاملات.

**29** عين النسب المئوية للتطورات الموافقة للمعاملات الضربية التالية:  
1,14 ، 1,028 ، 0,988 ، 0,37 ، 0,8 ، 3,24 .

**30** عين المعاملات الضربية الموافقة للتطورات التالية:  
35% ، 40% ، 7,2% ، -9% ، 0,1% ، -18% .

**31** قررت مؤسسة اقتصادية رفع أجور عمالها بنسبة مئوية سنوية قدرها 7,2% طوال 5 سنوات.

(1) يتقاضى عامل 12 000 دينار شهريا. ما هو المرتب الشهري لهذا العامل بعد سنة واحدة؟ بعد سنتين؟ بعد ثلاث سنوات.

(2) ليكن  $x$  المرتب الشهري لعامل آخر. احسب المرتب الشهري لهذا العامل بعد سنة واحدة؟ بعد سنتين؟ بعد ثلاث سنوات.

(3) عبر، في شكل نسبة مئوية، عن الزيادة التي يتحصل عليها عامل بعد سنتين ثم بعد خمس سنوات.

**32** يقترح بائع سيارات عدة طرق للتخفيض في الأسعار:

- تخفيض 4% متبوعا بتخفيض 6% .
- تخفيض 6% متبوعا بتخفيض 4% .
- تخفيض 5% متبوعا بتخفيض 5% .
- تخفيض 10% .

ما هي الطريقة الأكثر فائدة بالنسبة إلى الزبائن؟

**33** نسمي نسبة التضخم في السنة زيادة مؤشر أسعار الاستهلاك من بداية هذه السنة إلى نهايتها. يمثل الجدول التالي النسب المئوية للتضخم في بلد ما:

| السنة  | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|--------|------|------|------|------|------|
| التضخم | 15%  | 8%   | 6%   | 12%  | 10%  |

ما هي النسبة المئوية للتضخم الإجمالي خلال السنوات الخمس؟



| السنة  | 1980  | 1981  | 1982  | 1983  | 1984  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| المسعر | 35,69 | 34,32 | 31,80 | 28,78 | 28,07 |

| 1985  | 1986  | 1987  | 1988  | 1989  | 1990  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 27,53 | 12,97 | 16,92 | 13,22 | 15,69 | 20,50 |

- (1) نعتبر الأساس 100 في سنة 1980.  
احسب المؤشر الموافق لكل من السنوات الأخرى.  
(2) عين نسبة التطور لكل من السنوات 1982 ،  
1985 ، 1990 .

43. سجلت أيام الأسبوع في القائمة L1 لحاسبة  
بيانية والمبيعات الموافقة لهذه الأيام في القائمة  
L2 :

| L1 | L2 |
|----|----|
| 1  | 48 |
| 2  | 54 |
| 3  | 24 |
| 4  | 20 |
| 5  | 27 |
| 6  | 36 |
| 7  | 18 |

- (1) نعتبر الأساس 100 في اليوم الرابع.  
ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L3  
للحصول على المؤشرات الموافقة للأيام السبعة؟  
عين هذه المؤشرات.  
(2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في القائمة L4  
للحصول على النسب المنوية للتطورات المختلفة  
بالنسبة إلى اليوم الرابع؟  
عين هذه النسب المنوية.

## مسائل

44. يمثل الجدول التالي تطور مؤشر أسعار  
الاستهلاك في الجزائر بين 1989 و 1995 .

| السنة  | 1989 | 1990  | 1991  |
|--------|------|-------|-------|
| المؤشر | 100  | 120,2 | 150,8 |

| 1992 | 1993  | 1994  | 1995  |
|------|-------|-------|-------|
|      | 240,2 | 316,3 | 406,2 |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات .

- نختار المؤشر 100 كأساس في سنة 1989 .  
(1) استنتج من الجدول النسبة المنوية لتطور مؤشر  
الأسعار بين 1989 و 1991 ثم بين 1989 و 1993

38. خضع مقدار إلى زيادة قدرها % 50 .  
ما هو التخفيض الذي يجب أن يخضع له هذا  
المقدار للعودة إلى قيمته الأصلية؟

39. كان سعر كتاب 296,45 ديناراً وبعد  
تخفيضين متتاليين أصبح 245 ديناراً .  
ما هي النسبة المنوية الموافقة لكل تخفيض .

40. إليك ورقة حساب ايكسال:

|   | A              | B               | C                   | D          |
|---|----------------|-----------------|---------------------|------------|
| 1 | القيمة الأولية | القيمة النهائية | المعامل لضرب القيمة | التطور (%) |
| 2 | 4530           | 5100            |                     |            |
| 3 | 2865           | 3075            |                     |            |
| 4 | 1260           | 1100            |                     |            |
| 5 | 4893           | 6309            |                     |            |

- (1) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في الخلية  
C2 للحصول على المعاملات الضربية الموافقة؟  
عين هذه المعاملات ( تدور النتائج إلى  
0,0001 ) .  
(2) ما هو الدستور الذي يجب كتابته في الخلية  
D2 للحصول على نسب التطورات الموافقة؟  
عين هذه النسب ( تدور النتائج إلى 0,01 ) .

## المؤشرات

41. يمثل الجدول التالي إنتاج القمح والشعير  
في الجزائر بملايين الأطنان:

| السنة  | 1996  | 1997  | 1998  | 1999  |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| القمح  | 2,983 | 0,662 | 2,280 | 1,503 |
| الشعير | 1,8   | 0,191 | 0,7   | 0,481 |

- أتمم الجدول التالي مع أخذ إنتاج سنة 1996  
كمؤشر 100 :

| السنة  | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
|--------|------|------|------|------|
| القمح  | 100  |      |      |      |
| الشعير | 100  |      |      |      |

42. يمثل الجدول التالي سعر برميل البترول  
بالدولار بين 1980 و 1990 .



(1) احسب المعامل الضربي الذي يسمح بإيجاد عدد السكان في سنة 1925 اعتماداً على عدد السكان في سنة 1900.  
استنتج النسبة المئوية لتطور عدد السكان في هذه الفترة.

نسمى هذه النسبة المئوية الزيادة النسبية لعدد السكان خلال هذه الفترة ذات 25 سنة.

(2) احسب بالمثل الزيادة النسبية خلال كل فترة من الفترات ذات 25 سنة الموالية.

(3) احسب الوسط لهذه الزيادات النسبية المحصل عليها في السؤال السابق ثم استنتج المعامل الضربي الوسطي الذي يحول عدد السكان من 6,2 ملايين إلى 45 مليوناً عند تطبيقه في كل فترة ذات 25 سنة من 1900 إلى 2000.

## 48. القدرة الشرائية

نسمى القدرة الشرائية لمستهلك حاصل قسمة المرتب الشهري لهذا المستهلك على السعر المرجعي لمنتوج ما محصل عليه بعد اعتبار مجموعة من منتوجات.

1. خصص رب عائلة ميزانية قدرها 4800 دينار لشراء 25 كتاباً في سنة 2003.

ما هو السعر الوسطي للكتاب الواحد؟

2. يزداد السعر الوسطي للكتاب بـ 10% خلال سنة 2004 وميزانية رب العائلة لم تتغير.

(أ) كم من كتب يمكن أن يشتريها رب العائلة في 2004 (تعطى النتيجة بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان).

(ب) هل ازدادت أو انخفضت القدرة الشرائية لرب العائلة؟

(ج) ما هي نسبة تطور عدد الكتب خلال السنتين؟

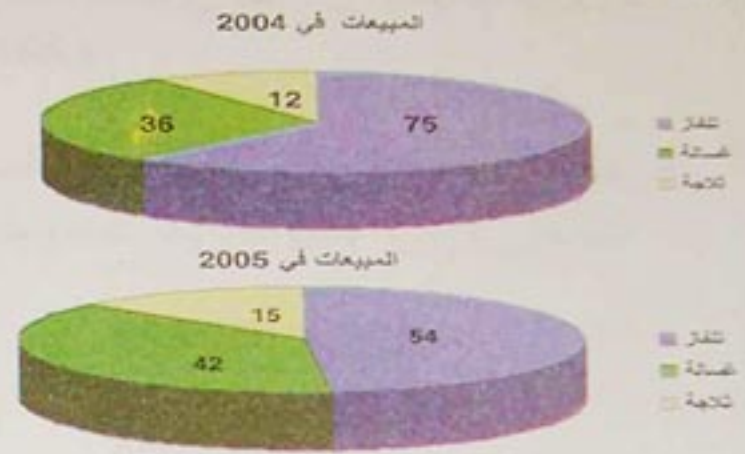
3. قرر رب العائلة في سنة 2005 زيادة الميزانية المخصصة لشراء الكتب بـ 600 دينار مع شراء الكتب بسعرها الوسطي لسنة 2003.

(أ) ما هو عدد الكتب (بالتقريب إلى الوحدة بالنقصان) التي يمكن شراؤها؟

(ب) هل ازدادت أو انخفضت القدرة الشرائية لرب العائلة بالنسبة إلى سنة 2003؟

(2) احسب النسبة المئوية لتطور مؤشر الأسعار بين 1990 و 1991.  
(3) احسب مؤشر سنة 1992 إذا علمت أن النسبة المئوية لتطور مؤشر الأسعار بين 1991 و 1992 تساوي 30,97%.

45. يمثل المخططان التاليان مبيعات دكان لأجهزة كهربائية منزلية خلال السنتين 2004 و 2005:



(1) عين، بالنسبة إلى كل نوع من الأجهزة، نسبة التطور خلال السنتين.

(2) أسعار هذه الأجهزة هي كالتالي:

التلفاز: 15000 دينار، الغسالة: 23000 دينار، الثلاجة: 28000 دينار.

احسب النسبة المئوية لتطور رقم الأعمال لهذا التاجر خلال السنتين.

46. يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ السنوات الثانية في ثانوية حسب الجنس و الشعبة.

| تسيير | رياضيات | علوم | آداب | اقتصاد وافتصاد |
|-------|---------|------|------|----------------|
| إناث  | 18      | 68   | 48   | 34             |
| ذكور  | 12      | 42   | 30   | 32             |

(1) احسب النسبة المئوية التي تمثلها كل فئة بالنسبة إلى عدد التلاميذ في السنوات الثانية.

(2) ما هي نسبة الإناث في شعبة الأدب؟

(3) في أي شعبة نجد أكبر نسبة للإناث؟

47. يمثل الجدول التالي تطور عدد سكان بلد خلال قرن:

| السنة           | 1900 | 1925 | 1950 | 1975 | 2000 |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| السكان (ملايين) | 6,2  | 9,8  | 16,4 | 32   | 45   |



1. السلاسل الزمنية \*
2. التمليس بالأوساط المتحركة \*
3. المدرجات التكرارية
4. التباين والانحراف المعياري
5. الربيعيات والعشريات والمخطط بالعلبة
6. التجربة العشوائية والمحاكاة

تعود إحصاءات السكان الأولى إلى حوالي 4000 سنة قبل الميلاد.

في حوالي 600 سنة قبل الميلاد أعطى المصريون القدماء أهمية بالغة لهذه الإحصاءات إلى درجة إصدار الحكم من طرف احد الفراعنة بالإعدام على كل من يرفض الإدلاء باسمه أو حرفته أو وسائل معيشته أثناء إجراء العمليات الإحصائية.

في القرن 15 وفي عصر إمبراطورية الأنكا في البيرو استعملت حزمات من الحبال للاحتفاظ بأرقام ومعلومات يمكن فراءتها وتفسيرها عند الحاجة من قبل المختصين.

وفي العصر العباسي ( في عهد المأمون ) تميز الكندي في مجال تحليل التواترات حيث عرض في مخطوط له طريقة لفك الرسائل المشفرة التي تعتمد أساسا على تواترات ظهور الحروف في الرسائل المكتوبة بلغة معينة.



الكندي (801-873)



## استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

| السؤال   | إجابة 1           | إجابة 2         | إجابة 3           |
|--|-------------------|-----------------|-------------------|
| 1. كيف نسمي عدد مرات ظهور قيمة أو فئة في سلسلة إحصائية؟                    | التواتر           | التكرار         | التوزيع           |
| 2. كل قيمة في سلسلة أوزان هي متغير....                                     | كمي               | كيفي            | مستمر             |
| 3. مدى سلسلة الأعداد التالية 5؛ 7؛ 10؛ 12؛ 14 هو...                        | 10                | 14              | 9                 |
| 4. وسيط سلسلة إحصائية هو...  | أصغر قيمة للسلسلة | معيار تشتت      | معيار نزعة مركزية |
| 5. التواتر هو عدد محصور بين....  | 0 و 100           | 0 و 1           | 1 و 100           |
| 6. إذا ضربنا كل قيم سلسلة في 10، فإن وسطها ...                             | يزداد بـ 10       | يُقسم على 10    | يُضرب في 10       |
| 7. يمكن تمثيل سلسلة إحصائية بيانياً بطريقة وحيدة.                          | صحيح              | خطأ             | حسب نوعية المتغير |
| 8. تمثل نقطة تقاطع مضعي التواترات المجمع الصاعدة والتواترات المجمع النازلة | الوسط             | الوسيط          | المنوال           |
| 9. في المدرج التكراري، تكون التكرارات متناسبة مع...                        | أطوال المستطيلات  | عروض المستطيلات | مساحات المستطيلات |



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: التمليس بالأوساط المتحركة

يمثل الجدول المقابل تطوّر مؤشر الإستهلاك في الجزائر من 1989 إلى 2001.

| السنة | المؤشرات | القيم المصححة |
|-------|----------|---------------|
| 1989  | 100      |               |
| 1990  | 120,2    |               |
| 1991  | 150,8    |               |
| 1992  | 197,5    |               |
| 1993  | 240,2    |               |
| 1994  | 316,3    |               |
| 1995  | 406,2    |               |
| 1996  | 488,8    |               |
| 1997  | 518,4    |               |
| 1998  | 550,7    |               |
| 1999  | 562,2    |               |
| 2000  | 558,7    |               |
| 2001  | 578,2    |               |

1. اتمم العمود الثالث، بحساب وسط المؤشرات لثلاث سنوات: السنة السابقة، السنة الجارية، السنة الموالية. (مثال: بالنسبة إلى 1992، نجسب وسط المؤشرات للسنوات 1991، 1992، 1993).

2. مثل بمنحن وفي نفس الرسم كلا من سلسلة المؤشرات الأصلية وسلسلة القيم المصححة.

## نشاط 2 : المدرجات التكرارية

سجل رادار سرعات 117 سيارة.  
1. اتمم الجدول التالي:

| الارتفاع | الوحدات | طول الفئة | التكرار | السرعة      |
|----------|---------|-----------|---------|-------------|
|          |         |           | 40      | [0 ; 30 [   |
|          |         |           | 30      | [30 ; 45 [  |
|          |         |           | 35      | [45 ; 60 [  |
|          |         |           | 12      | [60 ; 120 [ |

2. مثل هذه السلسلة بمدرج تكراري.

## نشاط 3 : التباين والانحراف المعياري

سجل أستاذ الرياضيات في فرض مشترك لقسمي السنة الثانية تسيير واقتصاد العلامات التالية:

|        | العلامة      | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|--------|--------------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 ت. 1 | عدد التلاميذ | 2 | 4 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4  | 5  | 2  | 1  | 3  | 1  | 1  | 0  |
| 2 ت. 2 | عدد التلاميذ | 0 | 0 | 1 | 4 | 8 | 7 | 9  | 5  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  |



# أنشطة تمهيدية

## الجزء الأول :

1. احسب وسط (معدل) علامات كل من القسمين. ماذا تلاحظ؟
2. مثل بالأعمدة وفي نفس الرسم كلا من سلسلتي العلامات وبلونين مختلفين.
3. انطلاقاً من هذا التمثيل، ما هو تعليقك على مستوى كل قسم في هذا الفرض.

## الجزء الثاني:

- نريد مقارنة مستوى القسمين وهذا بدراسة توزيع وتشتت علامات كل قسم حول وسطها.
- لذا نضع :  $S = n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2$  حيث  $x_1, x_2, \dots, x_k$  هي قيم السلسلة و  $n_1, n_2, \dots, n_k$  هي التكرارات الموافقة لهذه القيم و  $N$  هو التكرار الكلي لهذه السلسلة.
1. احسب قيمة  $S$  في كل من سلسلتي علامات القسمين.
  2. نضع  $V = \frac{S}{N}$ . احسب قيمة  $V$  (بالتدوير إلى 0,1) بالنسبة إلى كل من السلسلتين.
  3. نضع  $\sigma = \sqrt{V}$ . احسب قيمة  $\sigma$  (بالتدوير إلى 0,1) بالنسبة إلى كل من السلسلتين. قارن النتيجة المحصل عليهما ثم استنتج العلاقة بين قيمة العدد  $\sigma$  وتشتت قيم السلسلة.

## نشاط 4 : الوسيط والربيعيات

يمثل الجدول التالي أوزان 19 شخصاً، مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

| الشخص | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| الوزن | 54 | 55 | 56 | 56 | 57 | 58 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 62 | 63 | 63 | 64 | 65 | 67 | 68 | 72 |

1. ما هو وزن الشخص العاشر؟ ما هي نسبة الأشخاص ذوي وزن أصغر من هذا الوزن؟
2. عيّن وزن كل من الشخص الخامس والشخص الخامس عشر ثم احسب فرق وزنيهما.
3. إلى كم جزءاً تمت تجزئة المجتمع المعطى؟

## نشاط 5: التجربة العشوائية

1. ارم قطعة نقدية 25 مرة ، وسجل 0 عند ظهور الوجه و 1 عند ظهور الظهر ثم دون النتائج في الجدولين التاليين.

|         | 0 | 1 |
|---------|---|---|
| التكرار |   |   |
| التواتر |   |   |

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

2. ضم نتائجك إلى نتائج 3 تلاميذ آخرين ثم احسب تواتر كل من الوجه والظهر في العينة ذات المقاس 100 المحصل عليها. قارن النتيجة مع نتائجك. هل الفرق كبيرة؟
3. باختيار وحدات ملائمة، مثل في نفس الرسم، التواترات المحصل عليها من طرف التلاميذ الأربعة.
4. ضم نتائج كل تلاميذ القسم وأعد حساب التواترين والتمثيل البياني. ماذا تلاحظ؟



نسمى سلسلة زمنية كل سلسلة إحصائية مرتبة وفق الزمن.

مثال

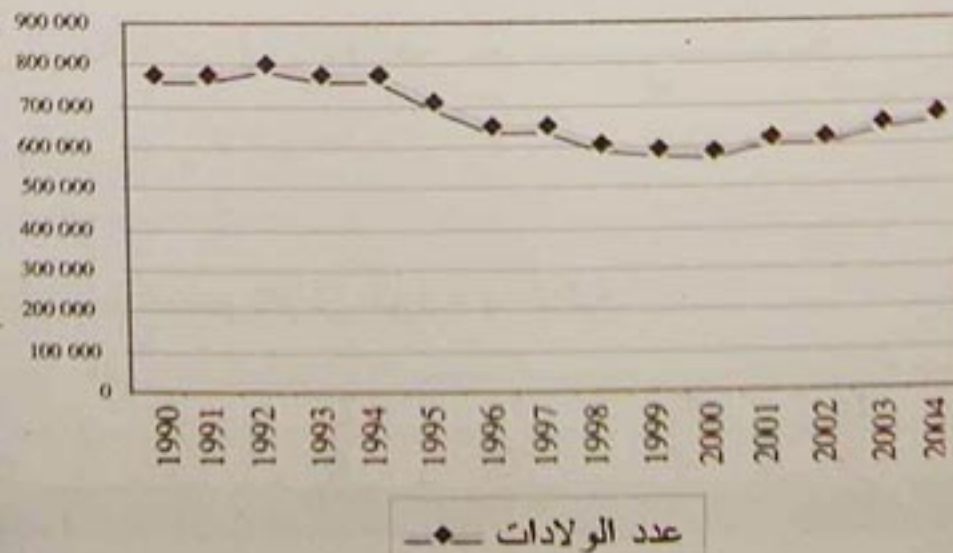
يمثل الجدول التالي سلسلة زمنية تبين تطور عدد الولادات الحية في الجزائر من سنة 1990 إلى سنة 2004.

| السنة | الولادات الحية |
|-------|----------------|
| 1990  | 775 000        |
| 1991  | 773 000        |
| 1992  | 799 000        |
| 1993  | 775 000        |
| 1994  | 776 000        |
| 1995  | 711 000        |
| 1996  | 654 000        |
| 1997  | 654 000        |
| 1998  | 607 000        |
| 1999  | 594 000        |
| 2000  | 589 000        |
| 2001  | 619 000        |
| 2002  | 617 000        |
| 2003  | 649 000        |
| 2004  | 669 000        |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

ملاحظات

- يمكن تمثيل سلسلة زمنية ببيانيا ومن خلاله تحدد المكونات الأساسية التالية:
- حركة النزوع (التوجه) العام الذي يحدد التطور العام للظاهرة المدروسة.
- التغيرات الدورية خلال فترة طويلة.
- التغيرات الفصلية التي تتكرر دوريا في فترات معينة.
- التغيرات العرضية.





## 2. التعليل بالأوساط المتحركة

### • الأوساط المتحركة

#### تعريف

نعتبر سلسلة زمنية قيمها  $x_1, x_2, \dots, x_n$  من أجل الأزمنة  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

■ الوسط المتحرك من الرتبة  $p$  حيث  $p = 2k + 1$  من أجل  $t_i$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) هو وسط القيم

$$\frac{x_{i-k} + \dots + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+k}}{p}$$

■ الوسط المتحرك من الرتبة  $p$  حيث  $p = 2k$  من أجل  $t_i$  هو:

$$\frac{\frac{x_{i-k} + \dots + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+k}}{2}}{p}$$

#### مثال

يمثل الجدول التالي أقياس ظاهرة مسجلة خلال 9 أزمنة مختلفة.

| $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | $t_7$ | $t_8$ | $t_9$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5     | 7     | 6     | 4     | 8     | 6     | 5     | 4     | 7     |

■ لنحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 3:

الوسط المتحرك من الرتبة 3 من أجل  $t_5$  مثلا هو وسط القيم  $t_4$  و  $t_5$  و  $t_6$  أي  $\frac{4+8+6}{3} = 6$

والوسط المتحرك من الرتبة 3 من أجل  $t_8$  هو وسط القيم  $t_7$  و  $t_8$  و  $t_9$  أي  $\frac{5+4+7}{3} \approx 5,33$

نحصل هكذا على الأوساط المتحركة من الرتبة 3 التالية:

| $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | $t_7$ | $t_8$ | $t_9$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5     | 7     | 6     | 4     | 8     | 6     | 5     | 4     | 7     |
|       | 6,00  | 5,67  | 6,00  | 6,00  | 6,33  | 5,00  | 5,33  |       |

■ لنحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 4:

الوسط المتحرك من الرتبة 4 من أجل  $t_3$  هو  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4}$

$$\frac{5 \times \frac{1}{2} + 7 + 6 + 4 + 8 \times \frac{1}{2}}{4} \approx 5,88$$

نحصل هكذا على الأوساط المتحركة من الرتبة 4 التالية:

| $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | $t_7$ | $t_8$ | $t_9$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5     | 7     | 6     | 4     | 8     | 6     | 5     | 4     | 7     |
|       |       | 5,88  | 6,13  | 5,88  | 5,75  | 5,63  |       |       |



## • التمليس بالأوساط المتحركة

### تعريف

تمليس منحني سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة من الرتبة  $p$  هو إنجاز منحني سلسلة زمنية أخرى قيمها هي الأوساط المتحركة من الرتبة  $p$  لقيم السلسلة الأصلية.

### ملاحظة

عند تمليس سلسلة زمنية بالأوساط المتحركة من الرتبة  $p$  ( $p = 2k$  أو  $p = 2k + 1$ ) نهمل  $k$  قيمة طرفية من كل جهة بالنسبة إلى السلسلة الأصلية.

### 3. المدرجات التكرارية

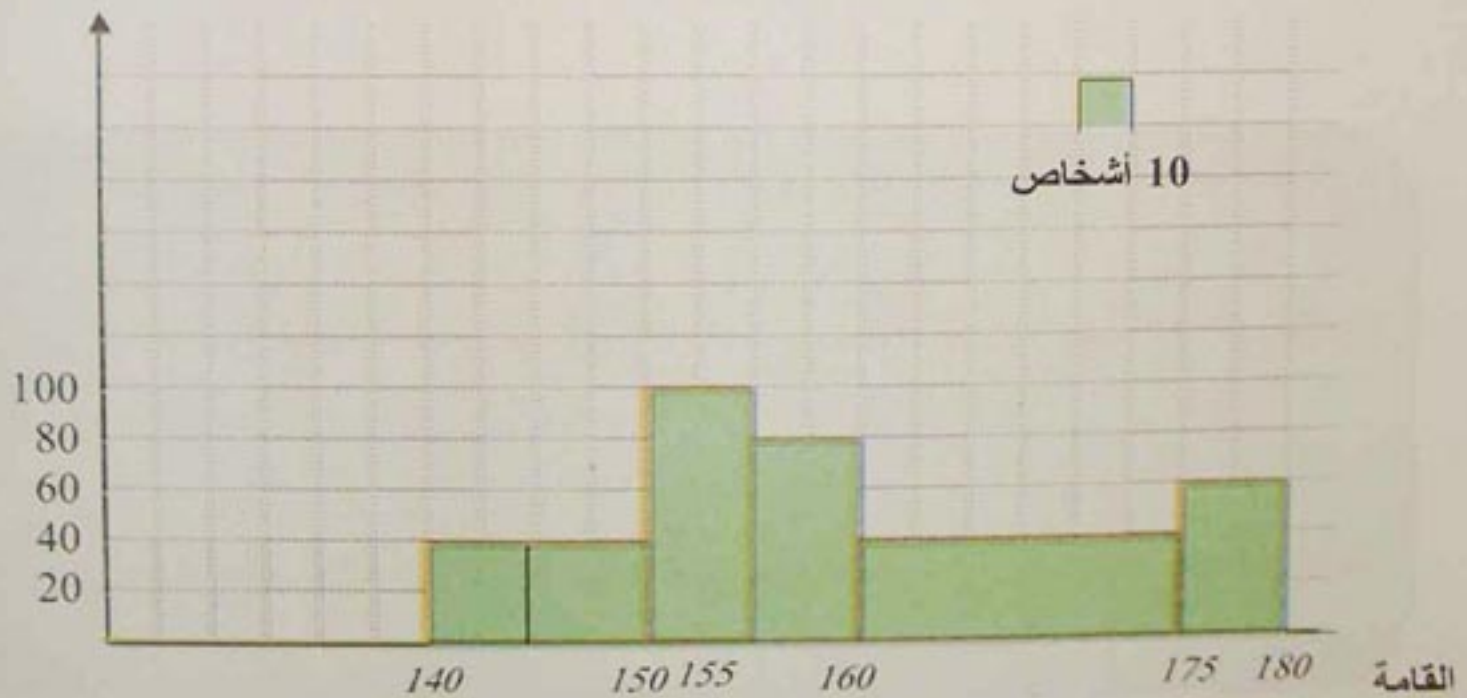
يستعمل المدرج التكراري لتمثيل سلسلة احصائية منظمة في فئات. مساحات المستطيلات متناسبة مع تكرارات الفئات.

### مثال

يمثل الجدول التالي سلسلة قامات 440 شخص بالسنتيمترات.

| القامة  | $[140 ; 150[$ | $[150 ; 155[$ | $[155 ; 160[$ | $[160 ; 175[$ | $[175 ; 180[$ |
|---------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| التكرار | 80            | 100           | 80            | 120           | 60            |

المدرج التكراري





## 4. التباين - الانحراف المعياري

• الوسط الحسابي (تذكير)

تعريف

■ الوسط الحسابي  $\bar{x}$  لسلسلة إحصائية، هو حاصل قسمة مجموع قيم المتغير الإحصائي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{N}$$

أي  $x_1, x_2, \dots, x_k$  على التكرار الكلي  $N$  للسلسلة، أي

إذا كانت قيم السلسلة  $x_1, x_2, \dots, x_k$  مرفقة بتكراراتها  $n_1, n_2, \dots, n_k$  على الترتيب فإن

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

إذا كانت السلسلة مستمرة، تؤخذ مراكز الفئات كقيم المتغير الإحصائي.

**ملاحظة:** الرمز  $\sum_{i=1}^k x_i$  يدل على المجموع  $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ .

خواص

■ إذا أضفنا نفس القيمة  $a$  إلى كل قيم سلسلة إحصائية فوسطها الحسابي يزداد بنفس القيمة  $a$ .

■ إذا ضربنا كل قيم سلسلة إحصائية في نفس القيمة  $b$  فوسطها الحسابي يضرب في نفس القيمة  $b$ .

■ إذا جُزئت السلسلة إلى جزأين تكرارهما  $N_1, N_2$  على الترتيب ووسطاهما الحسابيان  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  على الترتيب، فالوسط الحسابي لهذه السلسلة هو

$$\bar{x} = \frac{N_1 \times \bar{x}_1 + N_2 \times \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

التباين

تعريف

تباين سلسلة معرفة بكل قيمها  $x_i$  ووسطها الحسابي  $\bar{x}$ ، والذي نرمز إليه بالرمز  $V$ ، هو وسط

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

مربعات الفروق بين هذه القيم ووسطها الحسابي  $\bar{x}$ ، أي: حيث  $N$  هو التكرار الكلي للسلسلة.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N n_i}$$

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها  $x_i$  والتكرارات  $n_i$  لهذه القيم، فإن التباين هو

مثال

تحصل تلميذ على العلامات التالية في فروض الرياضيات: 4، 9، 14، 12، 12، 15. فكان الوسط الحسابي للسلسلة هو 11، و التباين هو:

$$V = \frac{(15-11)^2 + (12-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2 + (9-11)^2 + (4-11)^2}{6} \approx 13,33$$



مبرهنة 1 (تقبل)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \times x_i^2}{\sum_{i=1}^N n_i} - \bar{x}^2$$

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمتها  $x_i$  وتكراراتها  $n_i$ ، فإن التباين هو

**ملاحظة:** هذا الدستور عملي أكثر، لأنه لا يتطلب حساب  $(x_i - \bar{x})^2$  بل نحسب فقط  $x_i^2$ .

مبرهنة 2

$$V = \sum_{i=1}^N f_i (x_i - \bar{x})^2$$

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمتها  $x_i$  و تواتراتها  $f_i$ ، فإن التباين هو:

برهان

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N n_i} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i} (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

لدينا  $f_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i}$  و

$$V = \sum_{i=1}^N f_i (x_i - \bar{x})^2$$

إذن

• الانحراف المعياري

تعريف

الانحراف المعياري، والذي نرمز إليه بالرمز  $\sigma$ ، هو الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma = \sqrt{V} \quad \text{أي} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N n_i}}$$

مثال

الانحراف المعياري للسلسلة السابقة هو:  $\sigma \approx \sqrt{13,33} \approx 3,65$ .

ملاحظات

- الانحراف المعياري هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسطها الحسابي.
- يقاس الانحراف المعياري بنفس وحدة قيم السلسلة.
- يتأثر الانحراف المعياري بالقيم الشاذة للسلسلة.

• مجموع مربعات الفروق

مبرهنة

$$S(x) = \sum_{i=1}^N (x_i - x)^2$$

الوسط الحسابي  $\bar{x}$  هو العدد الذي يجعل المجموع أصغرياً.



برهان

نبرهن في حالة سلسلة ذات أربع قيم  $x_1, x_2, x_3, x_4$  وسطها  $\bar{x}$ :

$$(x_3 - x)^2 = x_3^2 - 2x_3x + x^2, (x_2 - x)^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2, (x_1 - x)^2 = x_1^2 - 2x_1x + x^2$$

$$(x_4 - x)^2 = x_4^2 - 2x_4x + x^2$$

$$. S(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x + 4x^2$$

المجموع  $S(x)$  هو من الشكل  $c + bx + ax^2$ ، و هو ثلاثي الحدود للمتغير  $x$  حيث  $a = 4$

$$. c = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ و } b = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

بما أن المعامل  $a$  موجب، فإن  $S(x)$  يقبل قيمة صغرى عند  $\alpha$  حيث:

$$. \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{2 \times 4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

بصفة عامة، عند جمع  $N$  مربعا، فالمعامل  $a$  هو  $N$  والمعامل  $b$  هو  $-2 \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)$

المعامل  $a$  موجب ومنه ثلاثي الحدود  $S(x)$  يقبل قيمة صغرى عند  $\alpha$  حيث

$$. \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2 \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)}{2 \times N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}$$

## 5. الربيعيات- العشریات - المخطط بالعلبة

• الوسيط (تذكير)

تعريف 1

وسيط سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، ونرمز إليه بـ  $Med$ ، هو العدد الذي من أجله يكون نصف قيم السلسلة على الأقل أصغر أو يساوي هذا العدد.

تعريف 2

السلسلة الإحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا.

- إذا كان التكرار الكلي  $N$  للسلسلة فرديا، أي من الشكل  $2k + 1$ ، فوسيطها هي القيمة المركزية، أي القيمة من المرتبة  $k + 1$ .
- إذا كان التكرار الكلي  $N$  للسلسلة زوجيا، أي من الشكل  $2k$ ، فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين، أي وسط القيمتين من المرتبتين  $k$  و  $k + 1$ .

مثال

لدينا فيما يلي سلسلتنا علامات قسمين، الأول متكون من 25 تلميذا والثاني من 26 تلميذا.

| A                       | B | C | D | E | F | G | H | I | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| علامات القسم 2 تلميذا 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1                       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |    |
| 3                       | 3 | 3 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7  | 8  | 8  | 9  | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 15 | 17 | 17 | 18 |
| الوسيط 9                |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| علامات القسم 2 تلميذا 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 1                       | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 4                       | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8  | 9  | 9  | 9  | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 16 | 16 | 17 | 17 | 17 |
| الوسيط 9,5              |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |



نقرأ في الجدول: وسيط السلسلة الأولى هو 9 ووسيط السلسلة الثانية هو 9,5.

## • الربعيات والعشريات

### تعريف 1

- الربعي الأول ونرمز إليه بـ  $Q_1$  هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون 25% على الأقل من قيمها أصغر أو يساوي  $Q_1$ .
- الربعي الثالث ونرمز إليه بـ  $Q_3$  هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون 75% على الأقل من قيمها أصغر أو يساوي  $Q_3$ .
- $[Q_1, Q_3]$  هو المجال الربعي و  $Q_3 - Q_1$  هو الانحراف الربعي.

### ملاحظات

- الربعي الثاني (الوسيط)  $Q_2$  هو أصغر قيمة للسلسلة بحيث يكون 50% من قيمها أصغر أو يساوي  $Q_2$ .
- الانحراف الربعي هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسيطها.
- بالنسبة إلى مفهوم العشري، نستعمل نفس التعريف السابق بدءاً من 10%.
- الانحراف العشري هو الفرق بين العشري الأول  $D_1$  والعشري التاسع  $D_9$  أي  $D_9 - D_1$ .

### تعريف 2

- قيم السلسلة مرتبة ترتيباً تصاعدياً و  $N$  هو التكرار الكلي لهذه السلسلة
- إذا كان  $\frac{N}{4}$  عدداً طبيعياً  $p$ ، فإن الربعي الأول  $Q_1$  هو القيمة ذات الرتبة  $p$ ، والربعي الثالث  $Q_3$  هو القيمة ذات الرتبة  $3p$ .
  - إذا كان  $\frac{N}{4}$  غير طبيعي، فإن الربعي الأول  $Q_1$  هو القيمة ذات الرتبة الأكبر مباشرة من  $\frac{N}{4}$ ، والربعي الثالث  $Q_3$  هو القيمة ذات الرتبة الأكبر مباشرة من  $3 \cdot \frac{N}{4}$ .

### أمثلة

- نعتبر السلسلة 3، 3، 4، 5، 5، 5، 7، 10، 14، 21، 21، 25.
- التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 12 و  $\frac{12}{4} = 3$ ، إذن:
- الربعي الأول  $Q_1$  هو القيمة ذات الرتبة 3 أي القيمة 4.
- الربعي الثالث  $Q_3$  هو القيمة ذات الرتبة  $3 \times 3 = 9$  أي القيمة 14.
- يمثل الجدول التالي سلسلة معطاة بقيمتها والتكرارات الموافقة لها.

| القيمة  | 45 | 47 | 53 | 54 | 60 | 62 | 75 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|
| التكرار | 3  | 6  | 2  | 4  | 7  | 8  | 9  |

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو مجموع التكرارات أي 39 و  $\frac{39}{4} = 9,75$ ، إذن:

- الربعي الأول  $Q_1$  هو القيمة ذات الرتبة 10 أي القيمة 53.



- الربعي الثالث  $Q_3$  هو القيمة ذات المرتبة 30 ( وهي القيمة ذات المرتبة الأكبر مباشرة من  $3 \times 9,75$  أي القيمة 62 .

## ملاحظة

إذا كانت السلسلة منظمة في شكل فئات، فإن:

- الربعي الأول  $Q_1$  هو القيمة الموافقة للتواتر المجمع الصاعد المساوي 0,25 .
- الربعي الثالث  $Q_3$  هو القيمة الموافقة للتواتر المجمع الصاعد المساوي 0,75 .

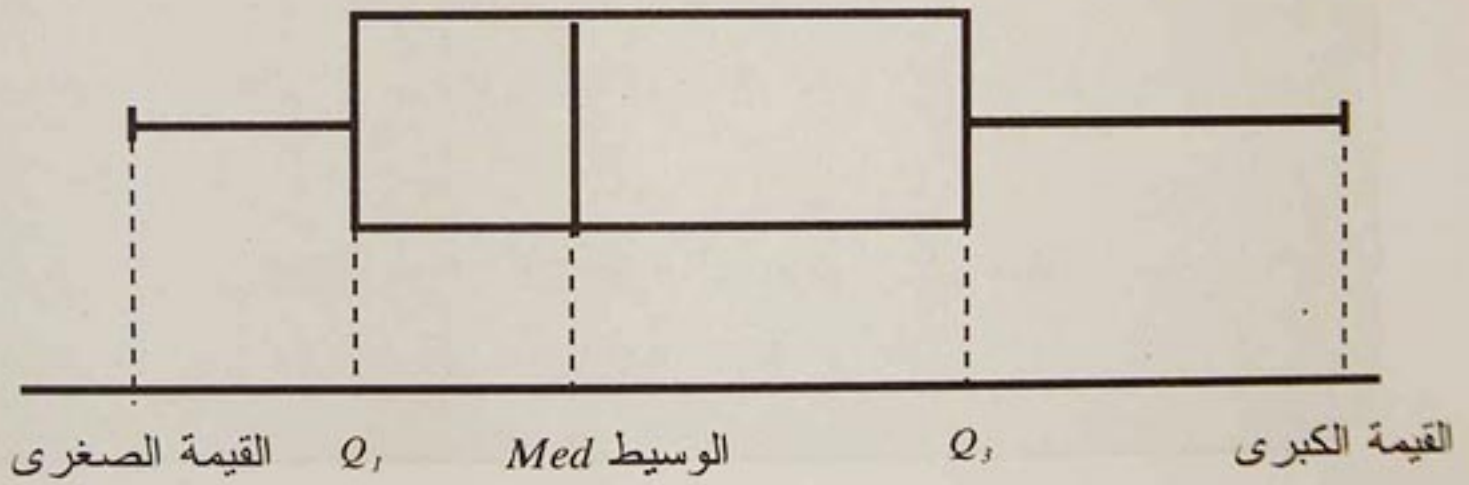
## • المخطط بالعلة (أو مخطط بالربيعيات)

يسمح هذا النوع من التمثيل بتلخيص سلسلة إحصائية بيانياً ودراسة توزيع قيم هذه السلسلة حول وسيطها دون اللجوء إلى مفهوم الانحراف المعياري.

يعتمد هذا المخطط على 5 قيم، هي: القيمة الصغرى، الربعيات الثلاثة  $Q_1$ ،  $Q_2$  (الوسيط)،  $Q_3$  والقيمة الكبرى.

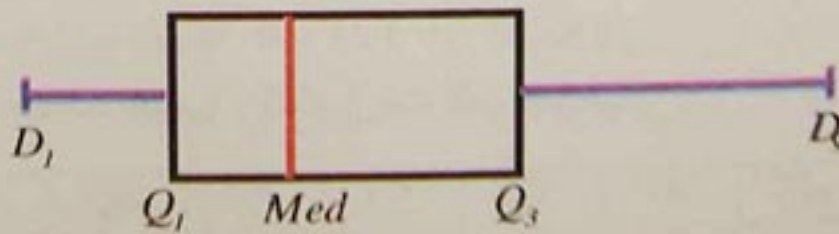
ولإنشاء المخطط بالعلة:

- نختار محورا (أفقيا أو عموديا) مع وحدة ملائمة.
- نعين القيم الخمس المذكورة سابقا.
- نرسم علة مستطيلة الشكل طولها يساوي الانحراف بين ربعيين.
- نصل بخطين العلة وكلا من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى.
- نعين الوسيط بخط (أفقي أو عمودي) داخل العلة (أنظر الشكل).



## ملاحظات

- إذا كانت المعطيات كثيرة جدا ولا نعلم القيمتين الطرفيتين، نستعمل مخططا بالعشريات، حيث نعين العشري الأول  $D_1$  والعشري التاسع  $D_9$ .

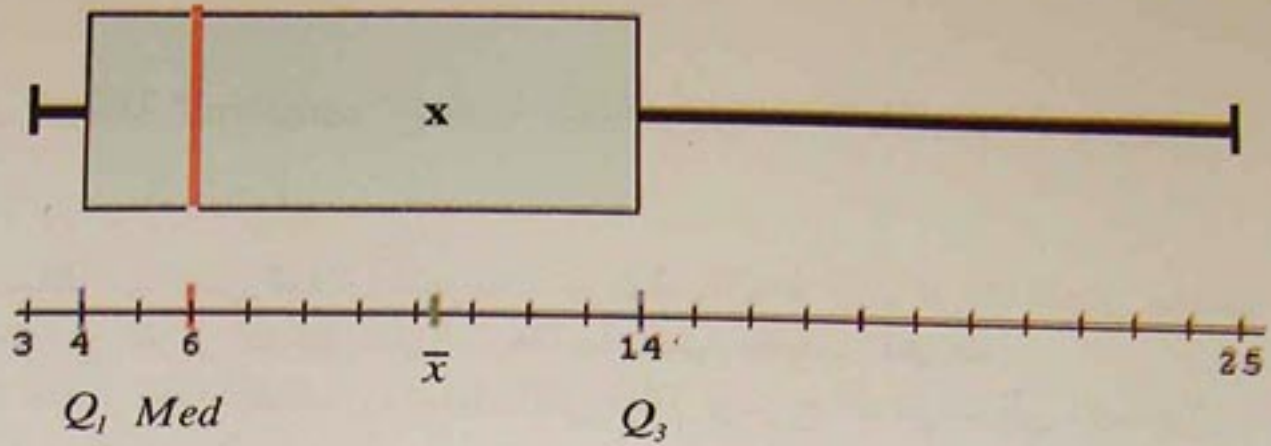


- غالبا ما نستعمل الإشارة  $x$  لتحديد قيمة الوسيط في العلة.



مثال

يمثل المخطط بالعلة الموالي السلسلة المقدمة في المثال الأول من الفقرة السابقة:



ملاحظة

الوسط الحسابي للسلسلة هو  $\bar{x} = 10,25$ .

## 6. التجربة العشوائية- المحاكاة

• التجربة العشوائية

تعريف

نسمي تجربة عشوائية كل تجربة يمكن وصف نتائجها الممكنة مسبقاً، دون القدرة على التعيين المسبق للنتيجة التي ستظهر في كل محاولة.

أمثلة

- رمي قطعة نقدية هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الوجه أو ظهور الظهر.
- رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة (1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6).

• العينة

تعريف

نسمي عينة لتجربة عشوائية، مجموعة النتائج المحصل عليها عند تكرار هذه التجربة. عدد النتائج يسمى مقياس العينة.

ملاحظات

- ينبغي أن تكون محاولات التجربة متطابقة ومستقلة. بمعنى، أن التجربة تنجز في نفس الظروف في كل محاولة وأن نتيجة كل محاولة لا تؤثر على المحاولة الموالية.
- عند حساب تواترات الإمكانات (مخارج)، نحصل على توزيع تواترات العينة.

• محاكاة تجربة عشوائية

عند البحث عن عينة لتجربة عشوائية، يتعسر الحصول على عدد كبير من التجارب، لذا نلجأ إلى محاكاة لمحاكاة تجربة عشوائية، نصف هذه التجربة ثم نمذجها، أي نختار نموذجاً لسحب أعداد بصفة عشوائية حيث يكون لهذا النموذج نفس خواص الظاهرة المدروسة ثم نلاحظ تواترات ظهور مختلف النتائج الممكنة.



## مثال

لمحاكاة رمي قطعة نقدية نختار نموذج سحب العددين 0 و 1 بصفة عشوائية.

## ملاحظة

لانجاز محاكاة، يمكن استعمال الوظيفة " random " لحاسبة بيانية او الوظيفة " ALEA " لمجدول.

## • تذبذب العينات

عندما تنجز عددا من عينات مستقلة لها نفس المقاس لتجربة عشوائية، نلاحظ أن تواترات ظهور مختلف النتائج غير مستقرة إذ يتغير توزيع التواترات لكل عينة، وهذا ما يسمى بتذبذب العينات. عندما يزداد مقياس العينات، نلاحظ أن هذا التذبذب ينضائل أكثر فأكثر وتنتزع التواترات إلى الاستقرار. ويظهر هكذا انتظام في الظاهرة العشوائية المدروسة.



## 1. التمليس بالأوساط المتحركة باستعمال مجداول

طريقة

لتمليس سلسلة زمنية باستعمال مجداول، نحسب الأوساط المتحركة باستعمال الدساتير المناسبة ثم نمثل السلسلة الأصلية والسلسلة الناتجة باستعمال البيان "سحابة نقط متصلة بمنحن" ("nuage de points reliés par une courbe") في المساعد البياني.

تمرين

يمثل الجدول التالي سلسلة أعداد الأدوات المباعة من طرف تاجر خلال 12 شهرا. أنجز التمليسين من الرتبة 3 والرتبة 5 لهذه السلسلة.

| الشهر    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| المبيعات | 120 | 170 | 130 | 150 | 180 | 210 | 240 | 180 | 130 | 200 | 150 | 160 |

حل

| C3 |                | =MOYENNE(B2:B4) |           |   |
|----|----------------|-----------------|-----------|---|
| A  | B              | C               | D         | E |
| 1  | المبيعات الشهر | 3 التمليس       | 5 التمليس |   |
| 2  | 1              | 120             |           |   |
| 3  | 2              | 170             | 140       |   |
| 4  | 3              | 130             |           |   |
| 5  | 4              | 150             |           |   |
| 6  | 5              | 180             |           |   |
| 7  | 6              | 210             |           |   |
| 8  | 7              | 240             |           |   |
| 9  | 8              | 180             |           |   |
| 10 | 9              | 130             |           |   |
| 11 | 10             | 200             |           |   |
| 12 | 11             | 150             |           |   |
| 13 | 12             | 160             |           |   |

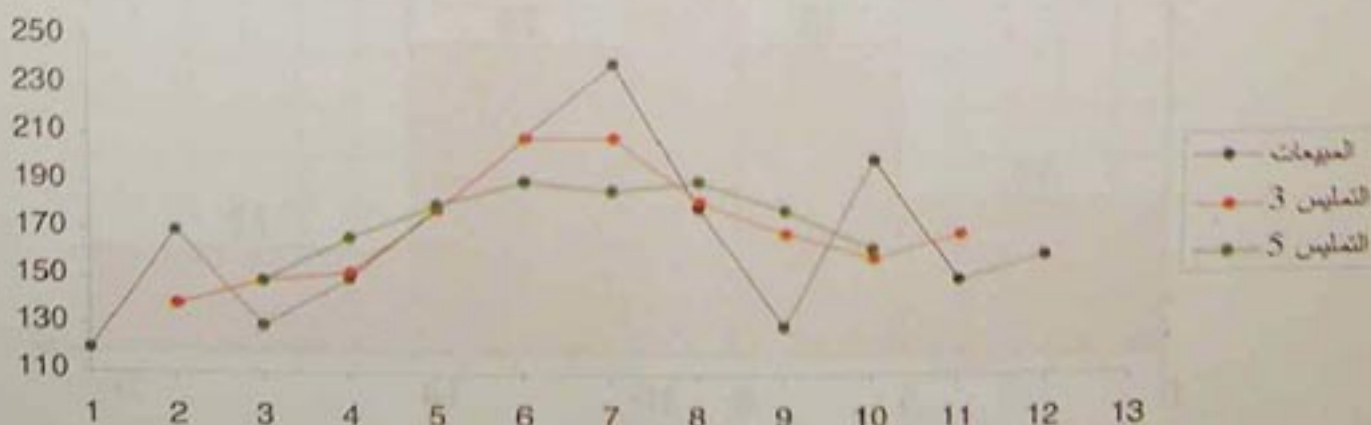
1. نحجز المعطيات.

2. لحساب الأوساط المتحركة من الرتبة 3، نحجز في الخلية C3 الدستور =MOYENNE(B2:B4) (أو الدستور (=SOMME(B2:B4)/3) ثم نسحبه حتى الخلية C12.

3. لتمليس السلسلة بالأوساط المتحركة من الرتبة 5، نحسب الأوساط المتحركة من الرتبة 5 في الخلايا من D4 إلى D11 بنفس الطريقة.

4. نختار مجموعة الخلايا A2:D13 ثم نفتح المساعد البياني ونختار التمثيل "سحابة نقط متصلة بمنحن" ("Nuage de points reliés par une courbe")، ثم نمثل السلسلة الأصلية والسلسلتين المحصل عليهما بالتمليس، فنحصل على التمثيل البياني التالي:

التمليس بالأوساط المتحركة





## 2. إنشاء مدرج تكراري لسلسلة معطاة في شكل فئات مختلفة الأطوال

طريقة

لإنشاء المدرجات التكرارية لسلسلة منظمة في فئات مختلفة الأطوال، يمكن تطبيق الطريقة التالية:

- نحسب طول كل فئة ثم نختار مستطيلا لتمثيل الفئة ذات أصغر طول، نحصل هكذا على معامل التناسب  $k$  الذي يحقق العلاقة:  $h \times e = k \times n$ ، حيث  $h$  هو ارتفاع المستطيل و  $e$  هو طول الفئة و  $n$  هو تكرارها.
- نحسب ارتفاعات المستطيلات الأخرى بتقسيم تكرار كل فئة على طولها ثم نضرب النتيجة في  $k$ ، أي  $h = \frac{n}{e} \times k$ .

تمرين

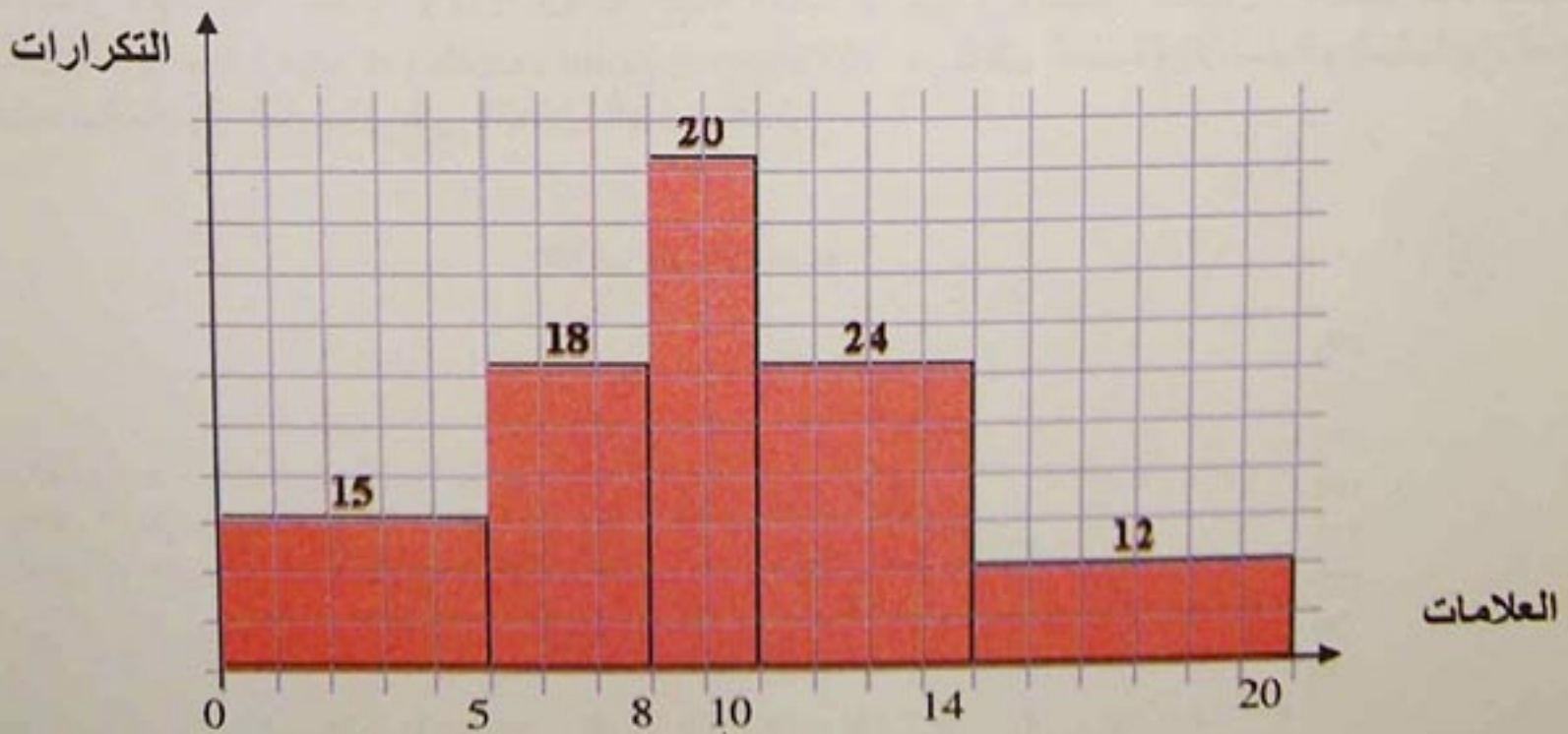
يمثل الجدول التالي علامات قسمين في فرض، موزعة في فئات. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة.

| العلامة     | [ 0; 5[ | [ 5 ; 8[ | [ 8 ; 10[ | [ 10 ; 14[ | [ 14; 20[ |
|-------------|---------|----------|-----------|------------|-----------|
| التكرار $n$ | 15      | 18       | 20        | 24         | 12        |

حل

نختار ارتفاعا ذا 10 مربعات لتمثيل الفئة [ 8 ; 10[ ذات التكرار 20 ، فنحصل على معامل التناسب  $k = 1$ . ونستنتج الجدول والمدرج التكراري التاليين:

| العلامة      | [ 0; 5[ | [ 5 ; 8[ | [ 8 ; 10[ | [ 10 ; 14[ | [ 14; 20[ |
|--------------|---------|----------|-----------|------------|-----------|
| التكرار $n$  | 15      | 18       | 20        | 24         | 12        |
| الطول $e$    | 5       | 3        | 2         | 4          | 6         |
| الارتفاع $h$ | 3       | 6        | 10        | 6          | 2         |





# طرائق

## 3. تعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال حاسبة بيانية

طريقة

لتعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال الحاسبة البيانية من النوع TI-83، نستعمل اللمسة **STAT** ونختار الوظيفة **EDIT**.

تمرين

نعتبر السلسلة التالية:

| القيمة $x_i$  | 6 | 8 | 11 | 12 | 15 |
|---------------|---|---|----|----|----|
| التكرار $n_i$ | 2 | 3 | 7  | 9  | 5  |

باستعمال حاسبة بيانية، احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري والوسيط والرابعي الأول والرابعي الثالث لهذه السلسلة.

حل

1. نضغط على اللمسة **STAT** ثم نختار **EDIT** للحصول على شاشة القوائم.

| L1 | L2 | L3 | 1 |
|----|----|----|---|
|    |    |    |   |

L1(1) =

| L1    | L2   | L3 |
|-------|------|----|
| 6.00  | 2.00 | -- |
| 8.00  | 3.00 |    |
| 11.00 | 7.00 |    |
| 12.00 | 9.00 |    |
| 15.00 | 5.00 |    |

L2(5) =

1-Var Stats  
 $\bar{x} = 11.38$   
 $\Sigma x = 296.00$   
 $\Sigma x^2 = 3532.00$   
 $Sx = 2.55$   
 $\sigma x = 2.50$   
 $n = 26.00$

1-Var Stats  
 $n = 26.00$   
 $\min x = 6.00$   
 $Q_1 = 11.00$   
 $Med = 12.00$   
 $Q_3 = 12.00$   
 $\max x = 15.00$

2. نحجز قيم السلسلة في العمود L1 و التكرارات في العمود L2 مع الضغط على **ENTER** بعد كل قيمة لتصديقها.

3. لاستظهار المؤشرات الإحصائية، ندخل في البرنامج **STAT** ونختار الوظيفة **1-Var Stats** ثم ننفذ البرنامج:

**1-Var Stats** ( **2nd** **L1** , **2nd** **L2** **ENTER** )

إنن :

- الوسط هو:  $\bar{x} = 11,38$ .
- الوسيط هو:  $Med = 12$ .
- الانحراف المعياري:  $\sigma x = 2,5$ .
- الربعي الأول هو:  $Q_1 = 11$ .
- الربعي الثالث هو:  $Q_3 = 12$ .

ملاحظة: في هذا المثال العدد  $\Sigma x$  يوافق العدد  $\sum_{i=1}^5 n_i x_i$  والعدد  $\Sigma x^2$

يوافق العدد  $\sum_{i=1}^5 n_i x_i^2$ .



## 4. حساب الربعيات بالاعتماد على التواترات المجمعّة الصاعدة

## طريقة

- لتعيين الربعي الأول لسلسلة إحصائية انطلاقاً من جدول التواترات المجمعّة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها % 25 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة.
- لتعيين الربعي الثالث لسلسلة إحصائية انطلاقاً من جدول التواترات المجمعّة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها % 75 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة.

## تمرين

يمثل الجدول التالي سلسلة إحصائية:

|               |   |    |    |    |    |    |
|---------------|---|----|----|----|----|----|
| القيمة $x_i$  | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 | 15 |
| التكرار $n_i$ | 6 | 24 | 12 | 22 | 6  | 10 |

- أتمم هذا الجدول بحساب كل من التكرارات المجمعّة الصاعدة والتواترات المجمعّة الصاعدة.
- عين كلا من الربعي الأول والربعي الثالث.

حل  
1.

|                            |       |       |       |     |       |    |
|----------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|----|
| القيمة $x_i$               | 4     | 6     | 8     | 10  | 12    | 15 |
| التكرار $n_i$              | 6     | 24    | 12    | 22  | 6     | 10 |
| التكرارات المجمعّة الصاعدة | 6     | 30    | 42    | 64  | 70    | 80 |
| التواترات المجمعّة الصاعدة | 0,075 | 0,375 | 0,525 | 0,8 | 0,875 | 1  |

- بقراءة جدول التواترات المجمعّة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها % 25 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 6. إذن  $Q_1 = 6$ .
- بقراءة جدول التواترات المجمعّة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها % 75 على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 10. إذن  $Q_3 = 10$ .

## ملاحظة

إذا كانت السلسلة معرفة بمنحنيتها للتواترات المجمعّة الصاعدة، فالربعي الأول  $Q_1$  هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتبها  $\frac{1}{4}$  (أو 0,25 أو 25%)، والربعي الثالث  $Q_3$  هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتبها  $\frac{3}{4}$  (أو 0,75 أو 75%).



# طرائق

## 5. تعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة باستعمال جدول

### طريقة 1

لتعيين مؤشرات إحصائية لسلسلة، باستعمال جدول، نحجز الدساتير المناسبة ثم ننفذها.

### تمرين

نعتبر السلسلة السابقة. عين، باستعمال جدول اكسال، كلا من الوسط والتباين والانحراف المعياري.

### حل

نحجز قيم السلسلة وتكراراتها في العمودين A و B ثم ننفج الحسابات المناسبة والمؤشرات المطلوبة كما في الجدول

|    | A     | B     | C | D           | E             | F | G                  | H             |
|----|-------|-------|---|-------------|---------------|---|--------------------|---------------|
| 1  | $x_i$ | $n_i$ |   | $n_i * x_i$ | $n_i * x_i^2$ |   |                    |               |
| 2  | 4     | 3     |   | 12          | 48            |   |                    |               |
| 3  | 6     | 5     |   | 30          | 180           |   | =SOMME(D2:D7)/D10  |               |
| 4  | 8     | 3     |   | 24          | 192           |   |                    | =SOMME(E2:E7) |
| 5  | 10    | 7     |   | 70          | 700           |   |                    |               |
| 6  | 12    | 10    |   | 120         | 1440          |   |                    |               |
| 7  | 15    | 4     |   | 60          | 900           |   |                    |               |
| 8  |       |       |   |             |               |   | $\bar{x}$          | 9,875         |
| 9  |       |       |   |             |               |   | $\sum n_i * x_i^2$ | 3460          |
| 10 |       |       | N | 32          |               |   | V                  | 10,609        |
| 11 |       |       |   |             |               |   | $\sigma$           | 3,257         |

=SOMME(B2:B7)  
 =H9/D10-H8^2  
 =RACINE(D10)

## 6. إنشاء مخطط بالعلبة باستعمال حاسبة بيانية

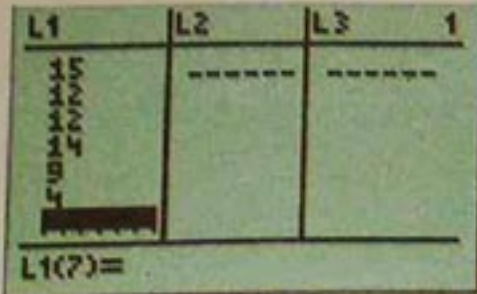
### طريقة

لإنشاء مخطط بالعلبة نستعمل الوظيفة **STAT PLOT** المحصل عليها باللمستين **2nd** و **STAT PLOT**.

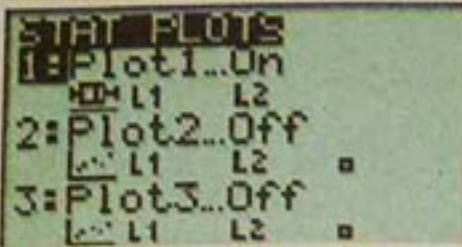
### تمرين

نعتبر السلسلة: 15، 12، 12، 14، 9، 4. باستعمال حاسبة بيانية، مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

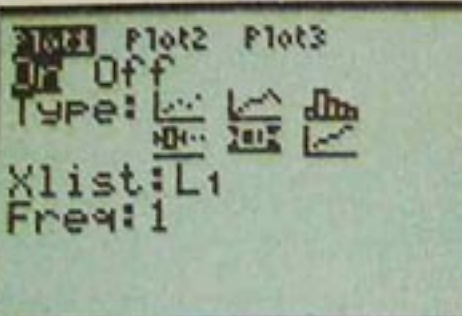




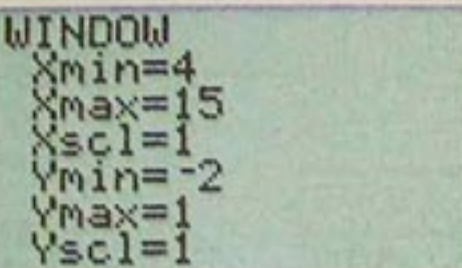
1. باستعمال اللمسة **STAT** نحجز العلامات في القائمة L1 في البرنامج



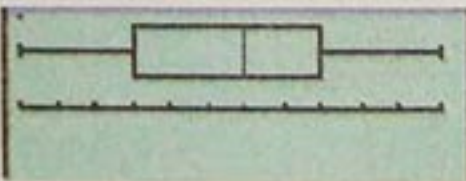
2. نحصل على الوظيفة **STAT PLOTS** بالمستين **2nd** و **STAT PLOT**



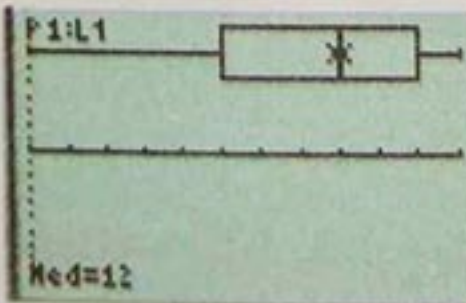
3. نضغط على **1** (أو على **ENTER**) للحصول على الوظيفة **Plot1** ثم نختار النوع الخامس للتمثيل البياني.



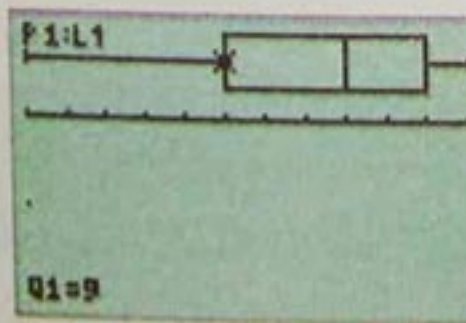
4. نضبط الفواصل في النافذة بالضغط على اللمسة **WINDOW**.



5. نظهر التمثيل باللمسة **GRAPH**.



6. لاستظهار قيم المؤشرات الإحصائية نضغط على اللمسة **TRACE**، فيشير الزالق إلى موقع الوسيط.



7. نحصل على قيمة أخرى (الرابعان أو القيمة الصغرى أو القيمة الكبرى) بتحريك الزالق باستعمال أسهم التنقل للأعلى





## ملاحظات

- يمكن إنشاء علبة لسلسلة أخرى في نفس البيان وهذا بحجز قيم هذه السلسلة في قائمة أخرى (L2) (مثلا)، ثم اختيار **STAT PLOTS** باللمسات **2nd** و **STAT PLOT** و **2** و اتباع نفس المراحل السابقة.






# طرائق

■ إذا قدمت السلسلة بقيمتها مرفقة بالتكرارات الموافقة، نحجز القيم في إحدى القوائم (L1 مثلا) والتكرارات في قائمة أخرى (L2 مثلا)، ثم بعد اختيار التمثيل  نسجل في L2 في .

## 7. إنجاز محاكاة تجربة عشوائية باستعمال حاسبة بيانية



### طريقة 1

لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة  التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 1 والتي تنفذ باللمسة  والوظيفة .

### تمرين

أنجز، باستعمال حاسبة بيانية، محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة مع تسجيل الحرف F عند ظهور الوجه والحرف P عند ظهور الظهر.


### حل

بما أن الوظيفة  للحاسبة من نوع TI 83 تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 1 متكوّن من 9 أرقام بعد الفاصلة فقط، فنستعمل التعليمية  للحصول على عدد محصور بين 0 و 10.

10\*rand


1. نفذ البرنامج:   1  10

10\*rand  
1.374504142

2. نضغط على  ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد بين 0 و 10. نعتبر كل أرقام هذا العدد ونصطلح أن كل رقم زوجي (مثلا) يمثل الظهر (P) وكل رقم فردي يمثل الوجه (F). في هذه الحالة العدد المسحوب هو 1,374504142 ويمثل نتيجة 10 رميات: FFFPFPPFPP (نقرأ من اليسار إلى اليمين).

10\*rand  
1.374504142  
6.665437149  
5.125324079  
5.977514630  
2.771386094

FFFPFPPFPP  
PPFPFFFFPF  
PFPPFPFFPF  
FFFFFFPPFP  
PFFFFPPFP

نضغط على  4 مرات أخرى ونحصل على 4 سلاسل تتكون كل منها من 10 أرقام في كل منها وتكون النتيجة النهائية كما يلي:

### ملاحظة

العدد العشوائي 125324079. الظاهر في الشاشة هو العدد العشري 0,125324079.



لإنجاز محاكاة بحاسبة بيانية، من النوع TI، نستعمل الوظيفة `randInt` التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد محصور بين عددين كفيين، والتي تنفذ باللمسة `MATH` والوظيفة `PRE`.

تمرين

باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 20 مرة.

حل

1. نضبط الآلة على 0 رقم بعد الفاصلة باستعمال اللمسة `MODE` والوظيفة `Float`.

Normal Sci Eng  
Float 123456789

2. ننفذ البرنامج: `MATH PRE 5`

randInt(

3. ننفذ البرنامج: `1 1 6`

randInt(1,6)

randInt(1,6)

3

4. نضغط على `ENTER` ونحصل، بصفة عشوائية، على عدد طبيعي بين 1 و 6.

randInt(1,6)

3  
4  
2  
5  
1  
3

5. نضغط على `ENTER` 20 مرة ونحصل بصفة عشوائية على سلسلة من 20 عددا محصورا بين 1 و 6.

ملاحظة

يمكن الحصول مباشرة على « نتيجة مخزنة في إحدى قوائم الحاسبة باستعمال الوظيفة `seq` المحصل عليها بالبرنامج `2nd STAT OPS 5`.

تمرين

باستعمال حاسبة بيانية، أنجز محاكاة رمي زهر نرد 120 مرة.

حل

بتنفيذ البرنامج

seq(randInt(1,6)  
,X,1,120)+L1  
{6 3 3 5 5 4 1

`2nd STAT OPS 5 MATH PRE 5 1 1 6`  
`ENTER`  
`1 X,T,θ,n 1 1 1 120`  
`ENTER`

تظهر النتائج على الشاشة.

ملاحظة

يمكن استظهار القائمة باللمستين `STAT` و `1` ثم نستعمل اللمسة `ENTER` لمشاهدة كل الأعداد.

L1  
6  
3  
3  
5  
5  
4  
1  
L3(0)=



## 8. إنجاز محاكاة تجربة عشوائية باستخدام جدول طريقة

لإنجاز محاكاة بجدول، اكسال مثلا، نستعمل الوظيفة **ALEA** التي تسمح بالحصول، بصفة عشوائية، على عدد محصور بين 0 و 1.

### تمرين

باستعمال حاسبة جدول، أنجز محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة مع تسجيل الرقم 0 عند ظهور الوجه والرقم 1 عند ظهور الظهر.

### حل

| A2 | =ENT(ALEA()*2)                |   |   |   |   | F |
|----|-------------------------------|---|---|---|---|---|
|    | A                             | B | C | D | E |   |
| 1  | محاكاة: رمي 50 مرة قطعة نقدية |   |   |   |   |   |
| 2  | 0                             | 0 | 0 | 0 | 1 |   |
| 3  | 0                             | 1 | 1 | 1 | 0 |   |
| 4  | 0                             | 1 | 1 | 0 | 1 |   |
| 5  | 1                             | 0 | 0 | 1 | 1 |   |
| 6  | 1                             | 0 | 1 | 1 | 0 |   |
| 7  | 1                             | 0 | 1 | 1 | 1 |   |
| 8  | 0                             | 1 | 0 | 1 | 1 |   |
| 9  | 1                             | 0 | 0 | 0 | 0 |   |
| 10 | 1                             | 1 | 1 | 0 | 1 |   |
| 11 | 0                             | 0 | 1 | 1 | 1 |   |

نختار الخلية A2 مثلا ونكتب الدستور:  
 "`=ENT(ALEA()*2)`" أو "`=ENT(ALEA()+0,5)`".  
 ثم نسحب نحو اليمين حتى الخلية E2 ونحو الأسفل حتى E11. نحصل هكذا على 50 عددا (كل عدد هو 0 أو 1) مأخوذة بصفة عشوائية.

### ملاحظة

يمكن الحصول على هذه الأعداد مباشرة بسحب الخلية A2 نحو الأسفل حتى A51.

## 9. تعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة

• باستخدام حاسبة

### طريقة

لتعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة بحاسبة نستعمل الوظيفة

المحصل عليها بالبرنامج **5** **MATH** **STAT** **Sum**.

### تمرين

عَيِّن عدد مرات ظهور كل وجه في محاكاة رمي زهر النرد 120 مرة.



# طرائق

حل  
بتنفيذ البرنامج التالي:



seq(sum(L1=X), X,  
1,6)→L2  
{22 21 19 19 20...

تظهر النتائج على الشاشة.

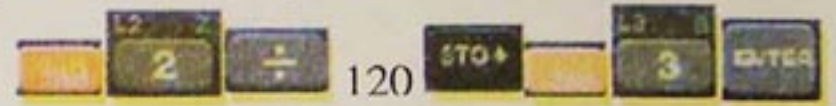
| L2 |
|----|
| 22 |
| 21 |
| 19 |
| 19 |
| 20 |
| 19 |

| L3   |
|------|
| .183 |
| .175 |
| .158 |
| .158 |
| .167 |
| .158 |

ملاحظتان  
يمكن استظهار القائمة L2 بالمستين STAT و 1.

في هذه الحالة، فإن أعداد ظهور الأوجه الستة 1، 2، 3، 4، 5، 6 هي 22، 21، 19، 19، 20، 19 على الترتيب.

لتعيين التواترات الموافقة في القائمة L3 يكفي تنفيذ البرنامج التالي:



التواترات الموافقة هي: 0,158 ، 0,167 ، 0,158 ، 0,158 ، 0,175 ، 0,183.

باستعمال جدول  
طريقة

لتعيين عدد مرات ظهور نتيجة تجربة عشوائية بعد محاكاة بمجدول نستعمل الوظيفة NB.SI

- عين عدد مرات ظهور كل من الوجه والظهر في محاكاة رمي قطعة نقدية 50 مرة.
- أحسب تواتر ظهور كل من الوجه والظهر

| H2 | =NB.SI(A2:E11;0)              |   |   |   |   |   |   |    |         |
|----|-------------------------------|---|---|---|---|---|---|----|---------|
|    | A                             | B | C | D | E | F | G | H  |         |
| 1  | محاكاة: رمي 50 مرة قطعة نقدية |   |   |   |   |   |   |    | التكرار |
| 2  | 0                             | 0 | 0 | 0 | 1 |   | 0 | 22 |         |
| 3  | 0                             | 1 | 1 | 1 | 0 |   | 1 | 28 |         |
| 4  | 0                             | 1 | 1 | 0 | 1 |   |   |    |         |
| 5  | 1                             | 0 | 0 | 1 | 1 |   |   |    |         |
| 6  | 1                             | 0 | 1 | 1 | 0 |   |   |    |         |
| 7  | 1                             | 0 | 1 | 1 | 1 |   |   |    |         |
| 8  | 0                             | 1 | 0 | 1 | 1 |   |   |    |         |
| 9  | 1                             | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |    |         |
| 10 | 1                             | 1 | 1 | 0 | 1 |   |   |    |         |
| 11 | 0                             | 0 | 1 | 1 | 1 |   |   |    |         |

- لحساب تكرار القيمة 0 (عدد مرات ظهور الوجه)  
نختار الخلية H2 مثلا ونكتب الدستور " $=NB.SI(A2:E11;0)$ " وبنفس الطريقة نحسب تكرار القيمة 1 (عدد مرات ظهور الظهر) في الخلية H3.

- ونختار الخلية I2 لحساب التواتر الموافق للقيمة 0 باستعمال الدستور " $=E2/50$ " وبنفس الطريقة نحسب تواتر القيمة 1.



# طرائق

## 10. التمثيل البياني لنتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة باستخدام حاسبة طريقة

لتمثيل نتائج تجربة عشوائية بعد محاكاة، بيانياً، بحاسبة نستعمل الوظيفة **seq** المحصل عليها

بالبرنامج **STAT PLOT** **Y=** **1**

**تمرين**

أنجز تمثيلاً بيانياً لنتائج التجربة العشوائية السابقة.

**حل**

1. نعد "قائمة فواصل" التي نخزنها في إحدى القوائم (L4 مثلاً) بتنفيذ البرنامج:

```
seq(X,X,1,6)→L4
(1 2 3 4 5 6)
```

**STAT** **OPS** **5** **XJ,0/1** **,** **XJ,0/1** **,**  
**STO+** **End** **4** **ENTER** **1** **,** **6** **)**

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Freq:L2
```

2. ننفذ البرنامج: **STAT PLOT** **Y=** **1**

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: [ ] *
```

3. نختار أحد البيانات (مثلاً **نتي**) ثم نضغط على **ENTER**.

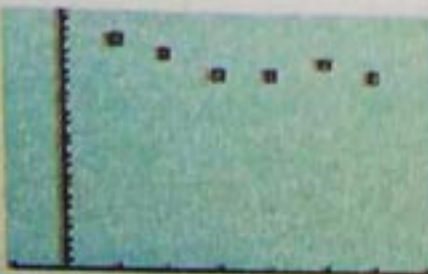
```
Plot1 Plot2 Plot3
Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L4
Ylist:L2
Mark: [ ] *
```

4. نسجل L4 (قيم الوجه) في **Xlist:L2** (التكرارات) في **Ylist:** مع اختيار شكل النقط المراد استعمالها في الرسم

5. نضبط النافذة باختيار القيم الحدية والوحدات الملائمة.

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=7
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=25
Yscl=1
Xres=1
```

6. نضغط على **ENTER** ونحصل على التمثيل البياني.



**ملاحظة**

يمكن الحصول على التمثيل البياني باستخدام التواترات بدل من التكرارات وهذا باختيار القائمة L3 التي تحتوي على التواترات بدل من القائمة L2.



# مسألة محلولة

إليك سلسلة العلامات (على 10) المحصل عليها عند استجواب تلاميذ قسم في مادة الرياضيات:  
8 - 2 - 6 - 2 - 3 - 8 - 5 - 5 - 7 - 8 - 4 - 8 - 8 - 6 - 8 - 1 - 1 - 8 - 2 - 5 - 7 - 8 - 2 - 5 - 5 - 6 - 5 - 9 - 8 - 5 - 5 - 7 - 9 - 7

1. نظم هذه المعطيات في جدول مبين فيها العلامات من 0 إلى 9 والتكرارات والتكرارات المجمعّة الصاعدة والتواترات والتواترات المجمعّة الصاعدة، في شكل نسب مئوية مع تدوير النتائج إلى 0,1.

2. أ) عين كلا من الوسيط والربعي الأول والربعي الثالث لهذه السلسلة.  
ب) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.  
ج) مثل التكرارات المجمعّة الصاعدة بمخطط بالأعمدة، ثم تحقق من صحة قيم المعايير المعينة في السؤال 2.

3. أ) احسب كلا من المدى والوسط  $\bar{x}$  والانحراف المعياري  $\sigma$ . تدور النتائج إلى 0,01.  
ب) احسب (بالتقريب إلى 0,1%) نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على علامة محصورة بين  $\bar{x} - \sigma$  و  $\bar{x} + \sigma$ .

4. بعد الملاحظة أن علامات الاستجواب ضعيفة جدا، قرر الأستاذ تغييرها بإحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: يضيف 4 نقط إلى كل العلامات.  
الطريقة الثانية: يضعف كل العلامات.

أ) عين، في كل حالة، كيف تتغير هذه المعايير بالنسبة إلى معايير السلسلة الأصلية.  
ب) استنتج خاصية للانحراف المعياري للسلسلة.

حل

1. تسجل العلامات في الجدول، ثم تعين التكرارات بعناية ويملا الجدول.

| العلامات                       | 1   | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7    | 8    | 9   |
|--------------------------------|-----|------|------|-----|------|------|------|------|-----|
| التكرارات                      | 2   | 5    | 1    | 1   | 8    | 3    | 4    | 9    | 3   |
| التكرارات المجمعّة الصاعدة     | 2   | 7    | 8    | 9   | 17   | 20   | 24   | 33   | 36  |
| التواترات (%)                  | 5,6 | 13,9 | 2,8  | 2,8 | 22,2 | 8,3  | 11,1 | 25   | 8,3 |
| التواترات المجمعّة الصاعدة (%) | 5,6 | 19,5 | 22,3 | 25  | 47,3 | 55,6 | 66,7 | 91,7 | 100 |

2. أ) التكرار الكلي لسلسلة العلامات هو 36:

▪ وسيطها هو وسط العلامة من الرتبة 18 والعلامة من الرتبة 19 إذن:  $Med = \frac{6+6}{2} = 6$ .

فالوسيط هو  $Med = 6$ .

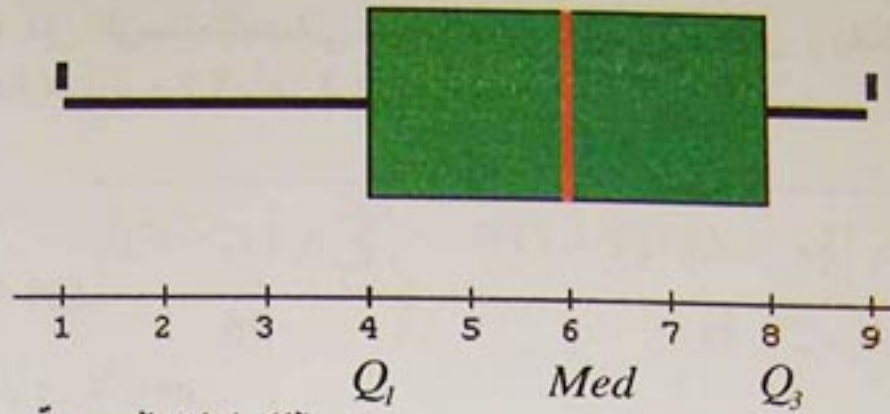
▪ الربعي الأول هو القيمة من الرتبة  $\frac{36}{4}$  أي القيمة من الرتبة 9، إذن الربعي الأول هو  $Q_1 = 4$ .

▪ الربعي الثالث هو القيمة من الرتبة  $3 \times \frac{36}{4}$  أي القيمة من الرتبة 27، إذن الربعي الثالث هو  $Q_3 = 8$ .



# مسألة محلولة

(ب) تمثيل السلسلة بالمخطط بالعلبة:



(ج)

- الوسيط يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي نصف التكرار الكلي، إذن هو 6.
- لرابعي الأول يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي ربع التكرار الكلي، إذن هو 4.
- الرابعي الثالث يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي ثلاث أرباع التكرار الكلي، إذن هو 8.

(2) (أ)

- المدى هو الفرق بين أصغر علامة وأكبر علامة، إذن هو  $9 - 1 = 8$  أي 8.
- الوسط الحسابي:  $\bar{x} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 8 + 6 \times 3 + 7 \times 4 + 8 \times 9 + 9 \times 3}{36} \approx 5,7$
- أي  $\bar{x} = 5,7$ .
- الانحراف المعياري هو:

$$\sigma \approx 2,4 \quad \text{أي} \quad \sigma \approx \sqrt{\frac{2 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 1 \times 3^2 + 1 \times 4^2 + 8 \times 5^2 + 3 \times 6^2 + 4 \times 7^2 + 9 \times 8^2 + 3 \times 9^2}{36} - 5,7^2}$$

- (ب)  $\bar{x} - \sigma \approx 5,7 - 2,4 \approx 3,3$  و  $\bar{x} + \sigma \approx 5,7 + 2,4 \approx 8,1$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة محصورة بين 3,3 و 8,1 هو مجموع تكرارات العلامات 4، 5، 6، 7، 8 أي  $1 + 8 + 3 + 4 + 9 = 25$ .

ومنه النسبة المئوية هي  $\frac{25}{36} \times 100 \approx 69,4$  أي % 69,4.



# مسألة محلولة

- 3 . بتطبيق الطريقة الأولى أي إضافة 4 إلى كل علامة:
- مدى السلسلة الجديدة هو:  $(9+4) - (1+4) = 8$  أي 8 إذن المدى لا يتغير.
  - حسب خواص الوسط الحسابي، فإن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة يزيد بنفس زيادة العلامات. إذن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة هو:  $5,7 + 4 = 9,7$ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i [(x_i + 4) - (\bar{x} + 4)]^2}{36}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i (x_i - \bar{x})^2}{36}}$$

الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو:

أي  $\sigma \approx 2,4$ . إذن الانحراف المعياري لا يتغير.

- بتطبيق الطريقة الثانية أي تضعيف كل علامة:
- مدى السلسلة الجديدة هو  $(9 \times 2) - (1 \times 2) = 16$  أي 16. إذن المدى يضعف.
- حسب خواص الوسط الحسابي، فإن الوسط الحسابي للسلسلة الجديدة يضعف أيضا. إذن وسط السلسلة الجديدة هو  $5,7 \times 2 = 11,4$ .
- الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i [(x_i \times 2) - (\bar{x} \times 2)]^2}{36}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i [2(x_i - \bar{x})]^2}{36}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \times 4(x_i - \bar{x})^2}{36}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{36}} = 2 \times \sigma$$

- أي  $2,4 \times 2 = 4,8$ . إذن الانحراف المعياري يضعف.

(ب) خاصية

- إذا أضفنا نفس العدد  $b$  إلى كل قيم سلسلة، فإن الانحراف المعياري لا يتغير.
- إذا ضربنا كل قيم سلسلة في نفس العدد  $a$ ، فإن الانحراف المعياري يضرب في نفس العدد  $a$ .



|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| السنة  | 1990   | 1991   | 1992   | 1993   |
| المؤشر | 117,5  | 148,38 | 195,38 | 235,51 |
| 1994   | 1995   | 1996   | 1997   | 1998   |
| 303,1  | 394,42 | 468,12 | 494,93 | 519,44 |
| 1999   | 2000   | 2001   | 2002   |        |
| 532,2  | 533,8  | 557,5  | 565,49 |        |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات.

أنجز التمليس بالأوساط المتحركة من الرتبة 3 لسلسلة المؤشرات.

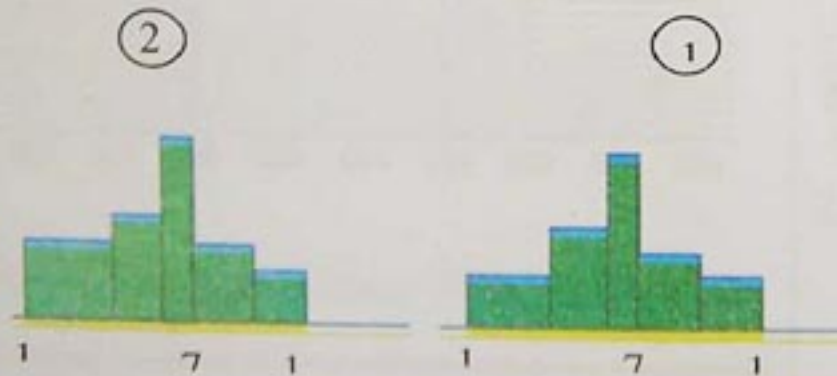
## المدرجات التكرارية

4. مثل السلسلة التالية بمدرج تكراري:

|         |       |        |         |         |
|---------|-------|--------|---------|---------|
| الفئة   | [0;6[ | [6;10[ | [10;12[ | [12;16[ |
| التكرار | 5     | 7      | 12      | 8       |

5. عين، من بين المدرجين التكراريين التاليين، الذي يمثل السلسلة التالية؟

|         |       |       |       |       |        |
|---------|-------|-------|-------|-------|--------|
| الفئة   | [1;4[ | [4;6[ | [6;7[ | [7;9[ | [9;11[ |
| التكرار | 6     | 8     | 7     | 6     | 4      |



6. مثل كلا من السلسلتين التاليتين بمدرج تكراري:

|       |        |         |         |         |
|-------|--------|---------|---------|---------|
| $x_i$ | [0;20[ | [20;30[ | [30;40[ | [40;60[ |
| $n_i$ | 4      | 6       | 6       | 8       |

1. صحيح أو خاطئ

(أ) في سلسلة إحصائية % 50 من القيم أصغر أو تساوي الوسيط.

(ب) التباين موجب دائما.

(ج) كل سلسلة إحصائية تقبل منوالا واحدا.

(د) الربعي الأول للسلسلة 4،6،8،15،17،17،17، هو 8.

(هـ) وسيط سلسلة إحصائية أصغر من وسطها.

(و) إذا كان الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية معدوما فإن كل قيم السلسلة متساوية.

(ز) توجد سلاسل إحصائية تقبل وسطا ووسيطا متساويين.

(ي) الربعي الأول لسلسلة إحصائية أصغر من ربعيها الثالث.

## الأوساط المتحركة

2. نعتبر السلسلة الزمنية التالية التي تعطي درجات الحرارة في مدينة الجزائر خلال أسبوع.

|            |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| اليوم      | الأربعاء | الاربعاء | الاربعاء | الاربعاء | الاربعاء |
| القيمة (°) | 19       | 12       | 11       | 13       | 15       |

(1) احسب الوسط المتحرك من الرتبة 3 بالنسبة إلى كل من الأيام الأحد، الاثنين، الثلاثاء.

(2) مثل في نفس البيان كلا من السلسلة الأصلية وسلسلة الأوساط المتحركة من الرتبة 3.

3. يمثل الجدول التالي مؤشرات الاستهلاك في مدينة الجزائر من 1990 إلى 2002 ("1989=100").

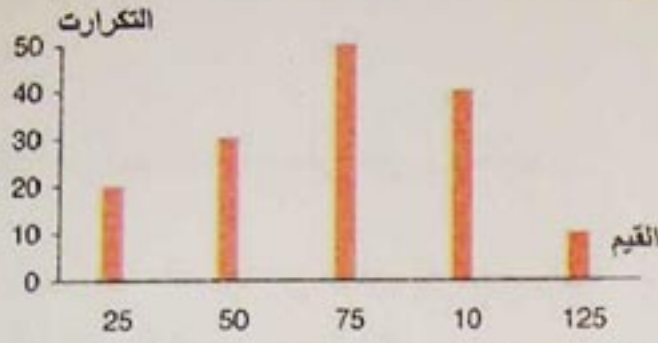


10. احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للسلسلة التالية: -1، -2، 2، 3، 0، -1.

11. باستعمال حاسبة، احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري للسلسلة التالية:

| القيمة  | 3 | 4,5 | 5   | 10  |
|---------|---|-----|-----|-----|
| التكرار | 9 | 40  | 125 | 164 |

12. نعتبر المخطط بالأعمدة التالي:



- اجمع هذه المعطيات في جدول.
- احسب كلا من الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري لهذه السلسلة. تدور النتائج إلى 0,01.

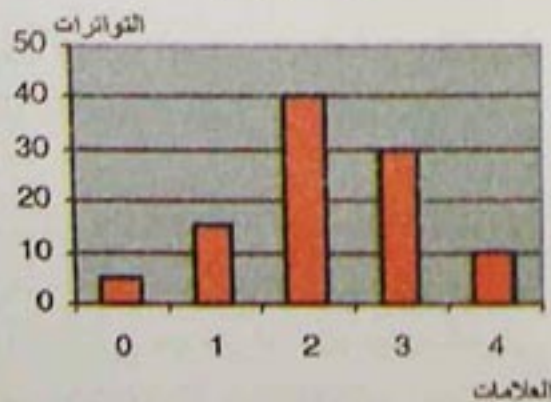
13. نعتبر سلسلة معرفة بقيمتها  $x_1, x_2, \dots, x_k$  مرفقة بتكراراتها  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

نعلم أن  $\sum_{i=1}^k x_i = 61$ ،  $\sum_{i=1}^k n_i = 47$ ،

$\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 = 11870$ ،  $\sum_{i=1}^k n_i x_i = 740$

- ما هو التكرار الكلي لهذه السلسلة؟
- احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة.

14. تم تنقيط تمارين مادة الرياضيات على 4. المخطط التالي يمثل توزيع تواترات بنسب مئوية للعلامات المحصل عليها:



احسب كلا من الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لسلسلة العلامات. تدور النتائج إلى 0,1.

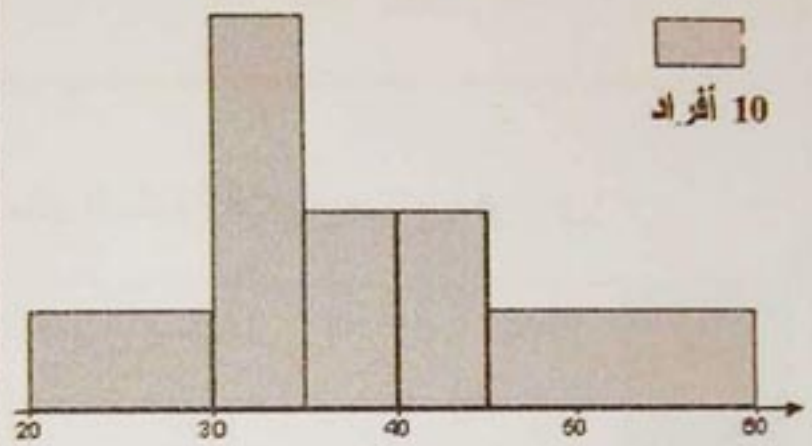
(2)

| $x_i$ | $[0;100[$ | $100;140[$ | $140;160[$ | $160;200[$ |
|-------|-----------|------------|------------|------------|
| $n_i$ | 2         | 1          | 5          | 3          |

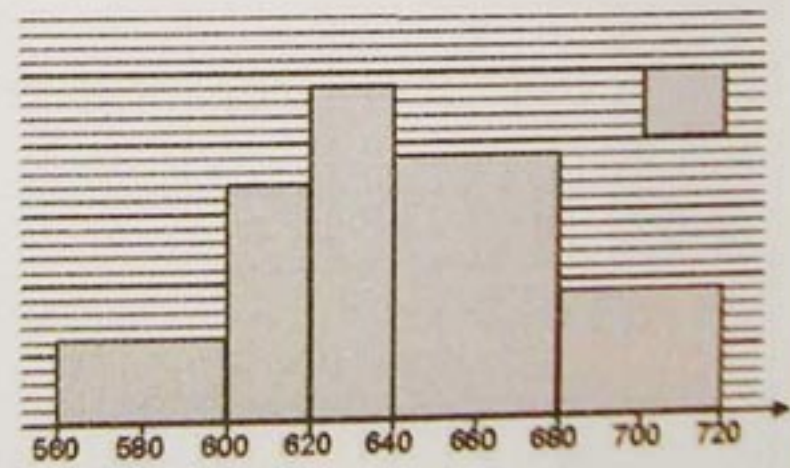
(3)

| $x_i$ | $[150;155[$ | $[155;160[$ | $160;165[$ | $[165;170[$ |
|-------|-------------|-------------|------------|-------------|
| $f_i$ | 0.1         | 0.5         | 0.3        | 0.1         |

7. عين جدول المعطيات (الفئات والتكرارات) للسلسلة الممثلة بالمدراج التكراري التالي:



8. نفس السؤال بالنسبة إلى المدراج التكراري التالي:



الوسط الحسابي - التباين - الانحراف المعياري

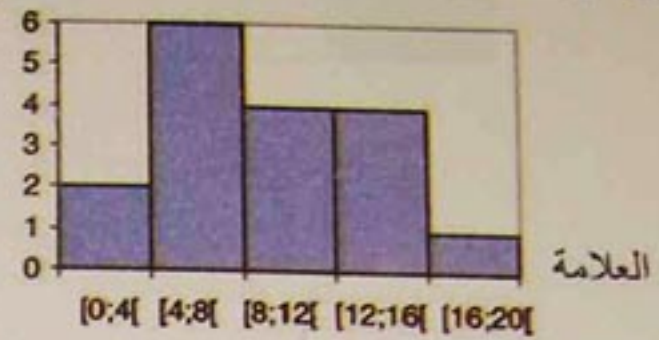
9. تحصل محمد على العلامات التالية في التاريخ: 11، 10، 9، 11، 7، 12.

- تحقق أن معدل العلامات هو 10.
- احسب التباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة.



15. يمثل المدرج التالي توزيع علامات تلاميذ فوج في العلوم الطبيعية.

التكرار



احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه السلسلة. تعطى النتيجة بالتدوير إلى  $10^{-2}$ .

16. تحصل تلميذ على العلامات التالية في

فروض مادة اللغة العربية: 8، 10، 12، 14. (1) احسب كلا من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لسلسلة العلامات. (2) قرر الأستاذ إضافة نقطة واحدة إلى كل علامة من علامات التلميذ. كيف يصبح كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري. (3) نفس السؤال في حالة إضافة 10% إلى كل علامة.

الوسيط - الربيعات - المخطط بالعلة

17. احسب كلا من الوسيط والربيع الأول والربيع الثالث للسلاسل التالية:

- (1) 3، 3، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 9.  
(2) 2، 3، 4، 5، 6، 7، 7، 7، 7، 7.  
(3) 13، 13، 15، 15، 15، 15، 15، 15، 16، 17، 17، 18، 18.

18. أنجز المخطط بالعلة لكل من السلاسل الواردة في التمرين 17.

19. احسب كلا من الوسيط والربيع الأول والربيع الثالث لكل من السلسلتين لتاليتين:

|       |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| $n_i$ | 62 | 41 | 20 | 6  | 43 | 13 |

|       |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 43 | 46 | 55 | 63 | 80 |
| $n_i$ | 3  | 4  | 3  | 8  | 11 |

20. يمثل الجدول التالي سلسلة أعداد (60 عددا) محصورة بين 0 و 10 ومسحوبة بصفة عشوائية.

|   |    |   |    |   |   |   |    |   |   |
|---|----|---|----|---|---|---|----|---|---|
| 7 | 1  | 0 | 1  | 2 | 8 | 5 | 3  | 7 | 4 |
| 8 | 1  | 3 | 2  | 1 | 8 | 3 | 0  | 8 | 0 |
| 8 | 10 | 3 | 10 | 4 | 7 | 1 | 0  | 0 | 5 |
| 3 | 0  | 5 | 5  | 4 | 9 | 5 | 1  | 5 | 3 |
| 5 | 5  | 5 | 3  | 7 | 3 | 5 | 10 | 2 | 0 |
| 4 | 5  | 8 | 10 | 6 | 5 | 3 | 4  | 8 | 7 |

(1) احسب كلا من الوسيط، الربيع الأول والربيع الثالث والعشري الأول والعشري التاسع لسلسلة الأعداد.  
(2) نضيف العدد 10 إلى السلسلة فتتكون من 61 عددا. ما هي المعايير الإحصائية التي تتغير؟

21. إليك قيمة تقريبية للعدد  $\pi$ :

$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$

نهتم فقط بالأرقام بعد الفاصلة.

(1) احسب عدد مرات ظهور كل رقم، أتمم الجدول التالي:

| الرقم                                    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرارات<br>المجمعة<br>الصاعدة          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| التواترات<br>المجمعة<br>المتزايدة<br>(%) |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

(2) أنشئ مخططا بالعلة يمثل سلسلة الأرقام العشرة.

22. يمثل الجدول التالي مبيعات دكانين خلال سنة:

| الشهر    | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----------|----|----|----|----|----|----|
| الدكان أ | 51 | 17 | 25 | 39 | 7  | 49 |
| الدكان ب | 6  | 7  | 13 | 17 | 20 | 25 |

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 62 | 41 | 20 | 6  | 43 | 13 |
| 39 | 41 | 43 | 49 | 51 | 62 |

(1) احسب كلا من الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث لكل من سلسلتي المبيعات.

(2) مثل كلا من هاتين السلسلتين بمخطط بالعلة في نفس البيان.

(3) قارن بين مبيعات الدكانين خلال السنة.



|         |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|
| الوجه   | 1     | 2     | 3     |
| التكرار |       |       |       |
| التواتر | 0,184 | 0,132 | 0,183 |

|  |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|
|  | 4     | 5     | 6     |
|  |       |       |       |
|  | 0,173 | 0,152 | 0,176 |

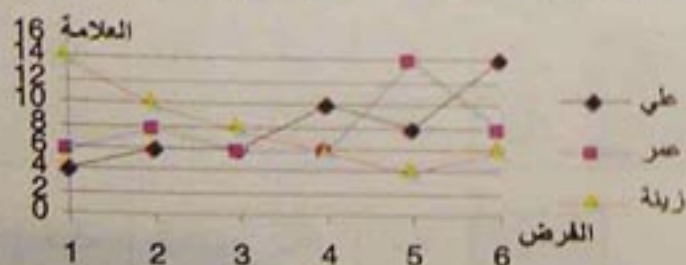
- 1) أتمم هذا الجدول.  
 2) عين تواترات الحوادث التالية:  
 أ) "الوجه المحصل عليه هو 1".  
 ب) "الوجه المحصل عليه هو زوجي".  
 ج) "الوجه المحصل عليه هو فردي".

27. نعتبر التجربة العشوائية التالية:  
 "نرمي 3 أزهار النرد متماثلة ونسجل مجموع القيم الناتجة".  
 1) ما هو عدد إمكانيات الحصول على كل من الأعداد 3، 4، 7، 8.  
 2) باستعمال جدول، أنجز محاكاة التجربة السابقة لعينة ذات المقاس 300.

- أجب بنعم أو لا عن الأسئلة التالية:  
 أ) عدد مرات الحصول على العدد 4 أكثر من عدد مرات الحصول على العدد 3.  
 ب) عدد مرات الحصول على 4 أكثر من عدد مرات الحصول على 7.  
 ج) عدد مرات الحصول على 7 أكثر من عدد مرات الحصول على 8.

### مسائل

28. يمثل البيان التالي العلامات المحصل عليها في 6 فروض لمادة الفلسفة من طرف 3 تلاميذ.



23. نعتبر السلسلة 3، 14، 19.  
 1) عين الوسط الحسابي  $\bar{x}$  لهذه السلسلة.  
 2) أ) نسحب، بصفة عشوائية وبارجاع، قيمتين من قيم السلسلة. أعط كل العينات ذات المقاس 2 المحصل عليها.  
 ب) احسب الوسط الحسابي لقيمتي كل عينة ثم تحقق أن الوسط الحسابي للأوساط الناتجة يساوي  $\bar{x}$ .

24. يتصف 20% من أفراد مجتمع بميزة معينة.

- 1) ما ذا نقول عن عينة مكونة من 120 فردا فيها 14 فردا يتصفون بهذه الميزة؟  
 2) نفس السؤال بالنسبة إلى عينة من 150 فردا فيها 42 يتصفون بهذه الميزة.  
 3) لو نختار، في هذا المجتمع، عينة من 1800 فردا بصفة عشوائية، ما هو عدد الأفراد المتوقع أن يتصفوا بهذه الميزة.

25. نعتبر كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 20.  
 1) احسب الوسط الحسابي هذه الأعداد.  
 2) أ) عين، باستعمال حاسبة بيانية أو جدول، عشر عينات ذات المقاس 50 مكونة من هذه الأعداد مسحوبة بصفة عشوائية.

26. تمت محاكاة رمي زهر نرد ذي 6 أوجه. يمثل الجدول التالي توزيع تواترات ظهور الأوجه الستة بالنسبة إلى عينة ذات المقاس 400.



- (2) هل توجد قيم للعدد  $x$  من أجلها يكون  $V = 2$ ؟  
 (3) أوجد أصغر قيمة للتباين  $V$ .  
 ما هي، في هذه الحالة، قيمة الوسط  $\bar{x}$ .

**32.** نعتبر سلسلة معطاة بقيمتها  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

حيث تكرارها الكلي هو  $N$  ووسطها هو  $\bar{x}$  وتباينها هو  $V$  وانحرافها المعياري هو  $\sigma$ .

نضيف العدد  $b$  إلى كل من قيم هذه السلسلة و

نحصل على سلسلة جديدة  $(y_i)$  حيث

$$y_i = x_i + b$$

(1)  $\bar{y}$ ،  $V'$ ،  $\sigma'$  هي الوسط والتباين والانحراف المعياري للسلسلة  $V$ .

أثبت أن  $\bar{y} = \bar{x} + b$  و  $V' = V$  و  $\sigma' = \sigma$ .

(2) نضرب كلا من قيم السلسلة الأصلية في العدد الموجب  $a$ ، فنتنتج سلسلة أخرى،

كيف يصبح وسط هذه السلسلة؟ برهن أن تباين السلسلة الناتجة يساوي  $a^2V$  ثم استنتج انحرافها المعياري.

(3) استنتج الخاصيتين الموافقتين

**33.** يمثل الجدول التالي علامات تلاميذ ثلاثة أقسام في اختبار مادة الرياضيات:

| العلامة              | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------------|---|---|---|---|
| عدد التلاميذ القسم 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| عدد التلاميذ القسم 2 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| عدد التلاميذ القسم 3 | 6 | 4 | 2 | 1 |

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 |
| 6 | 9  | 7  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  |
| 1 | 5  | 3  | 8  | 4  | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 1 | 0  | 0  | 1  | 5  | 6  | 3  | 4  | 1  |

(1) احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري

- (1) من التلميذ الذي تحصل على أكبر معدل؟  
 (2) من التلميذ الذي يعمل بصفة منتظمة أكثر؟

**29.** يمثل الجدول التالي تطور عدد الزيجات في الجزائر من 1990 إلى 2003.

| السنة | 1990   | 1991   | 1992   | 1993   |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| العدد | 149345 | 151467 | 159380 | 153137 |

| 1994   | 1995   | 1996   | 1997   | 1998   |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 147954 | 152786 | 156870 | 157831 | 158298 |

| 1999   | 2000   | 2001   | 2002   | 2003   |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 163216 | 177578 | 194276 | 218620 | 240463 |

المصدر: الديوان الوطني للإحصائيات

(1) أنجز التمليس بالأوساط المتحركة من الرتبة 3 لهذه السلسلة.

(2) احسب كلا من الوسط والوسيط لهذه السلسلة

**30.** نعتبر السلسلة: 6، 10، 11، 14، 16، 15.

(1) احسب كلا من الوسط  $\bar{x}$  والتباين  $V$

والانحراف المعياري  $\sigma$  لهذه السلسلة.

كيف تصبح القيم السابقة إذا أضفنا القيمة 12

(كقيمة سابعة) لهذه السلسلة.

(2) نعتبر سلسلة ثانية: 5، 10، 11، 14، 16، 16.

(أ) تحقق أن هذه السلسلة تقبل نفس وسط السلسلة الأولى.

(ب) احسب كلا من التباين  $V$  والانحراف

المعياري  $\sigma$  لهذه السلسلة.

(ج) قارن هذه النتائج مع نتائج السلسلة الأولى.

**31.**  $x$  عدد حقيقي. نعتبر السلسلة التالية:

3، 4، 5، 10، 13،  $6x$ .

(1) عبر بدلالة  $x$  عن كل من الوسط  $\bar{x}$  والتباين  $V$  لهذه السلسلة.



لكل من الأقسام الثلاثة ثم علق عن هذه النتائج.  
 (2) باستعمال المخطط بالعبارة، مثل، في نفس  
 البيان، كلا من سلاسل علامات الأقسام الثلاثة.  
 ماذا تلاحظ؟

**34.** نعتبر السلسلة 3، 5، 7، 8، 9.

- (1) احسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة.
- (2) ارسم، باستعمال حاسبة بيانية منحنى الدالة:  
 $f: x \mapsto (x-3)^2 + (x-5)^2 + (x-7)^2 + (x-8)^2 + (x-9)^2$
- (3) ماذا نقول عن الوسط الحسابي لهذه السلسلة؟
- (4) بسط كتابة  $f(x)$ .
- (5) استنتج قيمة  $x$  التي من أجلها، تكون قيمة هذه  
 العبارة أصغر ما يمكن. احسب هذه القيمة.  
 احسب صورة الوسط الحسابي بالدالة  $f$ .
- (6) اعد نفس الحساب مع الدالة  $g$ :  
 $g: x \mapsto (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2 + (x-e)^2$   
 حيث  $a, b, c, d, e$  أعداد معلومة.
- (7) استنتج القيمة التي تجعل  $g(x)$  أصغرية.



# الباب 3 عموميات على الدوال \*

1. الدالة "مكعب"

2. العمليات على الدوال

3. المنحنيات والتحويلات النقطية

4. عناصر تناظر منحنيات

يُعتبر ليبنيز أول من أدرج تسمية مفهوم "الدالة" وذلك سنة 1690م، وهو من فصل الدالة عن المنحنى على أساس أن المنحنى يمكن أن يكون تمثيلاً لأكثر من دالة بعد تغيير المتحول، هذا التغيير يعني مفهوم تركيب الدوال.

في سنة 1748م عمّد أولر إلى شرح تغيير المتحول (تركيب الدوال) ودوره في تبسيط شكل الدالة.

وقد كان لنتائج مختلف هذه الدراسات الدور الهام في دراسة خواص دوال اعتماداً على الخواص المعلومة لدوال مرجعية بسيطة.



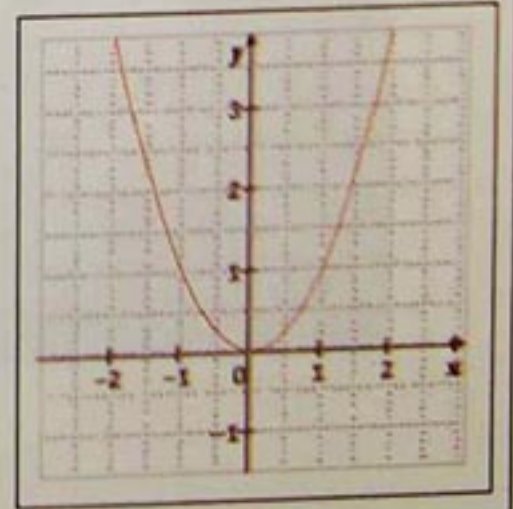
ليبنيز "Gottfried wilhelm Leibniz"  
(1646 - 1716)



# إستبيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

| السؤال  | إجابة 1                  | إجابة 2                    | إجابة 3                      |
|---|--------------------------|----------------------------|------------------------------|
| (1) الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:<br>$f(x) = 3x(x-1) - x(1+3x)$ هي .....   | دالة تآلفية              | الدالة "مربع"              | الدالة "مقلوب"               |
| (2) الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:<br>$g(x) = (4x-1)(4x+1) + 1 - 15x^2$ هي .....  | دالة تآلفية              | الدالة "مربع"              | الدالة "مقلوب"               |
| (3) الدالة $h$ المعرفة على $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ كما يلي:<br>$h(x) = \frac{2x+1}{x} - 2$                                     | دالة تآلفية              | الدالة "مربع"              | الدالة "مقلوب"               |
| (4) صورة العدد 4 بالدالة "مربع" هي .....  | 2                        | 4                          | 16                           |
| (5) بالدالة "مربع" العدد 4 له .....   | سابقة واحدة هي 4         | سابقة واحدة هي 2           | سابتان هما 2 و -2            |
| (6) صورة العدد $\sqrt{2}$ بالدالة "مقلوب" هي .....  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     | $\sqrt{2}$                 | 2                            |
| (7) سابقة العدد $\sqrt{2}$ بالدالة "مقلوب" هي .....   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     | $\sqrt{2}$                 | 2                            |
| (8) صورة العدد 9 بالدالة "الجذر التربيعي" هي ....   | 3                        | 81                         | 9                            |
| (9) سابقة العدد 9 بالدالة "الجذر التربيعي" هي ....  | 3                        | 81                         | 9                            |
| (10) المنحنى التالي هو المنحنى الممثل للدالة "مربع".<br>• الدالة مربع ....<br>• المعادلة $x^2 = 1$<br>• مجموعة حلول المتراجحة $x^2 < 4$ | متزايدة على $\mathbb{R}$ | متزايدة على $]0; +\infty[$ | متزايدة على $] -\infty; 0 ]$ |
|   | تقبل حلا واحدا هو 1      | تقبل حلا واحدا هو -1       | تقبل حلين هما 1 و -1         |
|   | هي $\mathbb{R}$          | هي المجال $] -2; +2 ]$     | هي $] -\infty; -2 ]$         |





# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: مقارنة مكعبي عددين حقيقيين

1. أثبت أن: من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  ؛  
 $(a - b) (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
2. تحقق أن: من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  ؛  
 $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4} b^2 = a^2 + ab + b^2$   
- استنتج إشارة العبارة  $a^2 + ab + b^2$   
ثم استنتج أن العددين  $a^3 - b^3$  و  $a - b$  لهما نفس الإشارة.
3.  $x_1$  ؛  $x_2$  عددان حقيقيان حيث  $x_1 < x_2$   
- قارن بين  $x_1^3$  و  $x_2^3$ .  
- أعط نص خاصية تسمح بمقارنة مكعبي عددين حقيقيين.

## نشاط 2: العمليات على الدوال

$f$  ؛  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  
 $g(x) = 4x + 3$  ؛  $f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$

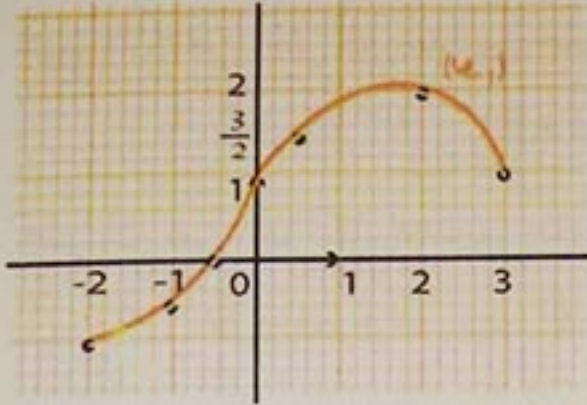
1. أحسب كل عبارة من العبارات التالية:  
 $\frac{1}{2} g(x)$  ؛  $f(x) - g(x)$  ؛  $-g(x)$  ؛  $f(x) + g(x)$   
 $\frac{f(x)}{g(x)}$  ؛  $\frac{1}{g(x)}$

2. عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية:

$$h_3: x \mapsto f(x) - g(x) \quad ; \quad h_2: x \mapsto -g(x) \quad ; \quad h_1: x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$h_6: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad h_5: x \mapsto \frac{1}{g(x)} \quad ; \quad h_4: x \mapsto \frac{1}{2} g(x)$$



# أنشطة تمهيدية



## نشاط 3 : الدوال المرفقة

$f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[-2 ; 3]$  بتمثيلها البياني  $(\mathcal{C}_1)$  (الشكل).

1. أكمل الجدول التالي معتمدا على القراءة البيانية على الشكل.

|        |    |    |      |   |     |   |   |   |
|--------|----|----|------|---|-----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ |    |    |      |   |     |   |   |   |

2. أعد رسم الشكل السابق.

3. أكمل الجدول التالي :

|            |    |    |      |   |     |   |   |   |
|------------|----|----|------|---|-----|---|---|---|
| $x$        | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x) + 3$ |    |    |      |   |     |   |   |   |

ب) علّم النقط ذات الإحداثيات  $(x; f(x)+3)$  في المعلم السابق.

ثم أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_2)$  الممثل للدالة  $x \mapsto f(x)+3$ .

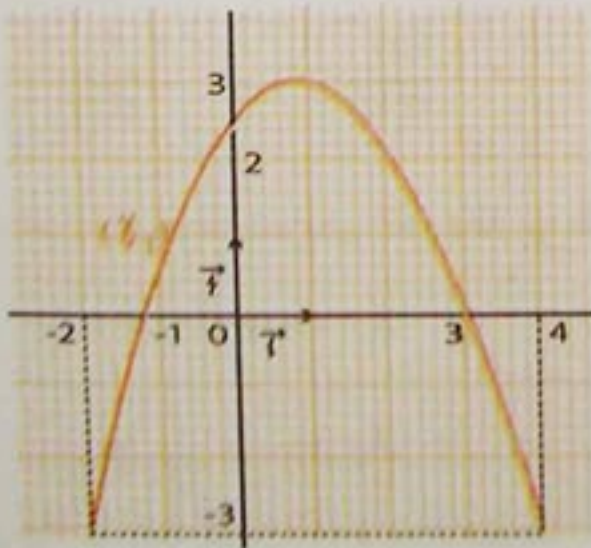
(يتم رسم المنحنيين  $(\mathcal{C}_1)$  و  $(\mathcal{C}_2)$  بلونين مختلفين).

ج) بأي تحويل نقطي يمكن الانتقال من  $(\mathcal{C}_1)$  إلى  $(\mathcal{C}_2)$  ؟

## نشاط 4 : الدوال المرفقة

$g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[-2 ; 4]$  بتمثيلها البياني  $(\mathcal{C}_1)$  (الشكل).

1. أكمل الجدول التالي معتمدا على القراءة البيانية على الشكل.



|        |    |    |   |   |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $g(x)$ |    |    |   |   |   |   |   |

2. أعد رسم الشكل السابق.



# أنشطة تمهيدية

3. (أ) إذا كان  $x + 2$  ينتمي إلى المجال  $[0; 6]$  ،  
فإلى أي مجال ينتمي العدد  $x$  ؟

(ب) أكمل الجدول التالي :

|            |   |   |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$        | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $x + 2$    |   |   |   |   |   |   |   |
| $g(x + 2)$ |   |   |   |   |   |   |   |

(ج) أعد رسم الشكل السابق.

(د) علم النقط ذات الإحداثيات  $(x; g(x + 2))$  في المعلم السابق  
ثم أرسم المنحنى  $(\gamma_2)$  الممثل للدالة  $x \mapsto g(x + 2)$   
(يميز المنحنى  $(\gamma_1)$  عن المنحنى  $(\gamma_2)$  باللون).

(هـ) على أي مجال تكون الدالة  $x \mapsto g(x + 2)$  معرفة ؟

(و) بأي تحويل نقطي يمكن الانتقال من  $(\gamma_1)$  إلى  $(\gamma_2)$  ؟

## نشاط 5: عناصر تناظر منحني

$f$  ؛  $g$  دالتان معرفتان على كما يلي :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4 \quad ; \quad g(x) = x^3 - x$$

1. أكمل الجدولين التاليين :

|        |    |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $g(x)$ |    |    |    |   |   |   |   |

|        |    |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ |    |    |    |   |   |   |   |

- قارن بين  $f(x)$  و  $f(-x)$  ثم بين  $g(x)$  و  $g(-x)$ .

2. أثبت أن، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $f(-x) = f(x)$ .

3. أثبت أن، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $g(-x) = -g(x)$ .

4. ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للمنحنيين الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  ؟



## 1. الدالة "مكعب"

(أ) **تعريف:** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $f(x) = x^3$  تسمى الدالة "مكعب".

**أمثلة:**  $f$  هي الدالة "مكعب".

$$\text{لدينا: } f(-2) = (-2)^3 = -8 \text{ ؛ } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} \text{ ؛ } f(3) = 27 \text{ ؛ } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

(ب) **خاصية:** الدالة "مكعب" فردية على  $\mathbb{R}$ .

**البرهان:**  $f$  هي الدالة "مكعب" و  $x$  عدد حقيقي.

$$\text{لدينا: } (-x) \text{ عدد حقيقي و } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$\text{أي } f(-x) = -f(x)$$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $f(-x) = -f(x)$

ينتج أن الدالة "مكعب" فردية على  $\mathbb{R}$ .

(ج) **دراسة تغيرات الدالة "مكعب"**

• **إتجاه التغير**

**مبرهنة:** الدالة "مكعب" متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

**البرهان:**  $f$  هي الدالة "مكعب" و  $x_1, x_2$  عددان حقيقيان.

إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $x_1^3 < x_2^3$  (حسب النشاط التمهيدي رقم 1).

إذن: من أجل كل عددين حقيقيين  $x_1$  و  $x_2$  ؛

إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) < f(x_2)$ .

وبالتالي الدالة "مكعب" متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

• جدول التغيرات: مما سبق، يكون جدول تغيرات

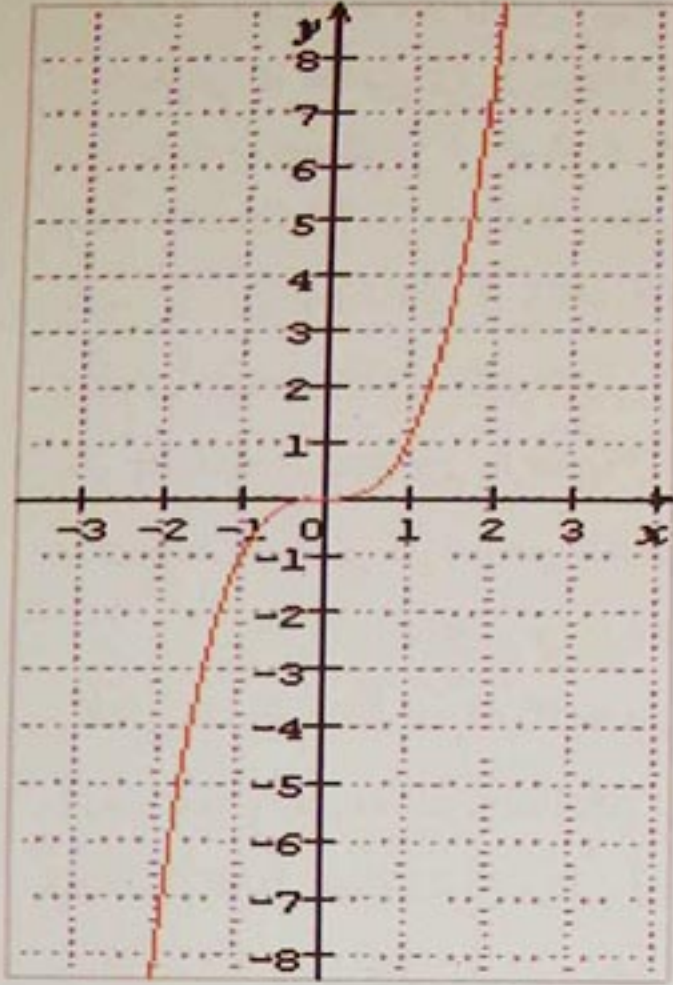
الدالة "مكعب" كالتالي:

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |     |           |



## د) التمثيل البياني

- ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة "مكعب" في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ( $\|\vec{i}\|=1$  ؛  $\|\vec{j}\|=1$ )



- المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مركز تناظر وهو النقطة  $O$  مبدأ المعلم.

- جدول بعض القيم للدالة "مكعب".

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |

- رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ . الشكل المقابل

## 2. العمليات على الدوال

- $f, g$  دالتان معرفتان على نفس المجموعة  $I$ .  
 $h$  عدد حقيقي.

### أ) مجموع دالتين

**تعريف:** نسمي مجموع الدالتين  $f$  و  $g$  ، الدالة  $f + g$  المعرفة على  $I$  كما يلي :  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .

**مثال:**  $f, g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

مجموع الدالتين  $f$  و  $g$  هي الدالة  $f + g$  ، المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :

$$(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

• اتجاه التغيير

**مبرهنة:**

- إذا كان كل من  $f$  و  $g$  متزايدة تماما على مجال  $I$  فإن الدالة  $f + g$  متزايدة تماما على  $I$ .
- إذا كان كل من  $f$  و  $g$  متناقصة تماما على مجال  $I$  فإن الدالة  $f + g$  متناقصة تماما على  $I$ .



**البرهان:**  $f$  ،  $g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$ .

نفرض أن كلا من  $f$  و  $g$  متزايدة تماماً على مجال  $I$ .

$x_1$  ،  $x_2$  عددان من  $I$  حيث  $x_1 < x_2$ .

إذن  $f(x_1) < f(x_2)$  و  $g(x_1) < g(x_2)$  (لأن  $f$  و  $g$  متزايدتان تماماً على  $I$ ).

ينتج أن  $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$

وبالتالي  $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$

إذن إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$ .

نستنتج أن من أجل كل عددين حقيقيين  $x_1$  ،  $x_2$  من المجال  $I$ ,

إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$ .

وبالتالي، الدالة  $f+g$  متزايدة تماماً على  $I$ .

نبرهن بنفس الطريقة أن إذا كان كل من  $f$  و  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $I$

فإن الدالة  $f+g$  متناقصة تماماً على  $I$ .

**ملاحظة:** لا توجد قاعدة تخص دالتين مختلفتين في إتجاه التغير.

## التمثيل البياني للدالة $f+g$

$(\mathcal{C}_f)$  ،  $(\mathcal{C}_g)$  ،  $(\mathcal{C}_{f+g})$  هي التمثيلات البيانية للدوال  $f$  ،  $g$  ،  $f+g$  على الترتيب. (الشكل)

$x$  عدد حقيقي. نعتبر النقط  $H$  ،  $M$  ،  $N$  ذات نفس الفاصلة  $x$  والتي تنتمي إلى محور الفواصل والمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  على الترتيب.

نشئ النقطة  $S$  المعرفة كما يلي:

$$\vec{HS} = \vec{HM} + \vec{HN}$$

فاصلة النقطة  $S$  هي  $x$  وترتيبها هو  $y_S = y_M + y_N$

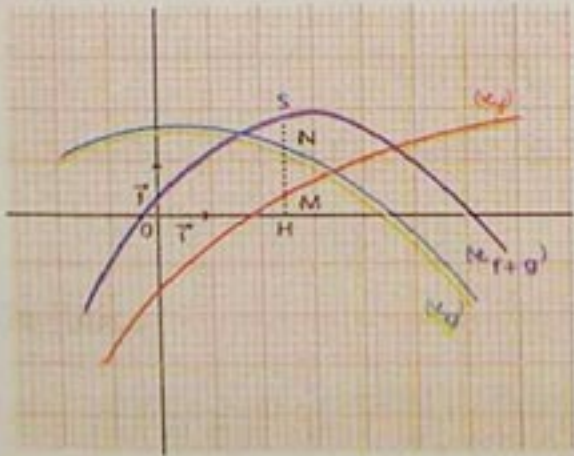
نعلم أن  $y_M = f(x)$  (لأن  $M$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_f)$ )

و  $y_N = g(x)$  لأن  $N$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_g)$ .

إذن  $y_S = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

ينتج أن  $S$  هي النقطة من المنحنى  $(\mathcal{C}_{f+g})$  التي فاصلتها  $x$ .

بتكرار هذه العملية من أجل قيم أخرى للعدد  $x$ ، نشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_{f+g})$  نقطة فنقطة.





## ب) فرق دالتين

**تعريف:** نسمي فرق الدالتين  $f$  و  $g$  ، الدالة  $f - g$  المعرفة على  $I$

$$\text{كما يلي: } (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

**مثال:**  $f$  ،  $g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $]-\infty; +\infty[$  كما يلي:

$$g(x) = 3x - 5 \quad ; \quad f(x) = x^2 + 2x$$

فرق الدالتين  $f$  و  $g$  هي الدالة  $f - g$  ، المعرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$

$$\text{كما يلي: } (f - g)(x) = x^2 - x + 5$$

**ملاحظة 1:** الدالة  $x \mapsto -g(x)$

تسمى معاكس الدالة  $g$  على  $I$ .

**ملاحظة 2:** الدالتان  $g$  ،  $-g$  لهما إتجاهها تغير متعاكسان؛

أي إذا كانت  $g$  متزايدة على  $I$  فإن  $-g$  متناقصة على  $I$ .

وإذا كانت  $g$  متناقصة على  $I$  فإن  $-g$  متزايدة على  $I$ .

## التمثيل البياني للدالة $f - g$

•  $(\mathcal{C}_f)$  ،  $(\mathcal{C}_g)$  ،  $(\mathcal{C}_{f-g})$  هي التمثيلات البيانية للدوال  $f$  ،  $g$  ،  $f - g$  على الترتيب .  
(الشكل)

$x$  عدد حقيقي و  $H$  ،  $M$  ،  $N$  نقط ذات نفس الفاصلة  $x$  وتنتمي إلى محور الفواصل ،  
والمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  على الترتيب.

ننشئ النقطة  $S$  المعرفة كما يلي:

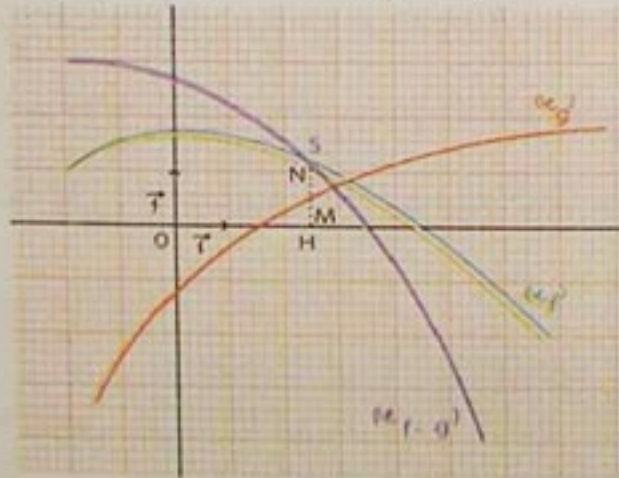
$$\overline{HS} = \overline{HM} - \overline{HN}$$

فاصلة  $S$  هي  $x$  وترتيبها هو  $y_S = y_M - y_N$

$$\text{أي } y_S = f(x) - g(x) = (f - g)(x)$$

إذن  $S$  تنتمي إلى المنحنى  $(\mathcal{C}_{f-g})$ .

بتكرار هذه العملية من أجل قيم أخرى للعدد  $x$  ، ننشئ  $(\mathcal{C}_{f-g})$  نقطة فنقطة.





**ملاحظة 1:** المنحنيان  $(\mathcal{C}_g)$  ،  $(\mathcal{C}_{-g})$  متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل.

**ملاحظة 2:** نعلم أن  $f - g = f + (-g)$

إذن لإنشاء  $(\mathcal{C}_{f-g})$  يمكن إنشاء  $(\mathcal{C}_g)$  و  $(\mathcal{C}_{-g})$  ثم نطبق الطريقة السابقة المتعلقة بالدالة  $f + g$ .

**ج) جداء دالتين**

**تعريف:** نسمي جداء الدالتين  $f$  و  $g$  الدالة  $f \cdot g$  المعرفة على المجموعة  $I$

كما يلي:  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ .

**مثال:**  $f$  ،  $g$  هما الدالتان المعرفتان على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = -3x + 4 \text{ و } g(x) = x - 1$$

جداء الدالتين  $f$  و  $g$  هي الدالة  $f \cdot g$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$(f \cdot g)(x) = (-3x + 4)(x - 1)$$

**ملاحظة:** لا توجد قاعدة تخص اتجاه تغير الدالة  $f \cdot g$

في المثال التالي، كل من الدالتين  $f$  ،  $g$  المعرفتين على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \frac{-1}{x} \text{ متزايدة تماما على } ]0; +\infty[ \text{ بينما الدالة } f \cdot g \text{ المعرفة}$$

$$\text{على } ]0; +\infty[ \text{ كما يلي: } (f \cdot g)(x) = -x \text{ متناقصة تماما على } ]0; +\infty[ .$$

وفي المثال الآتي كل من الدالتين  $h$  و  $t$  المعرفتين على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:

$$h(x) = x^3 \text{ و } t(x) = x \text{ متزايدة تماما على هذا المجال، والدالة } h \cdot t \text{ المعرفة على } ]0; +\infty[$$

$$\text{كما يلي: } (h \cdot t)(x) = x^3 \text{ متزايدة تماما على } ]0; +\infty[ .$$

**د) جداء دالة بعدد حقيقي**

**تعريف:** نسمي جداء الدالة  $f$  بالعدد الحقيقي  $k$  الدالة  $k \cdot f$  المعرفة على

$$\text{المجموعة } I \text{ كما يلي: } (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

**مثال:**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 3x - 5$ .



الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 4(3x - 5)$

هي جداء الدالة  $f$  بالعدد 4 . نكتب :  $g = 4 \cdot f$

**• اتجاه التغير**  
إذا كان  $k > 0$  فإن للدالتين  $f$  و  $k \cdot f$  نفس اتجاه التغير.  
إذا كان  $k < 0$  فإن للدالتين  $f$  و  $k \cdot f$  اتجاهي تغير متعاكسين.

**البرهان :** - نفرض أن  $f$  متزايدة تماما على  $I$  و  $k > 0$  .

من أجل كل عددين حقيقيين  $x_1$  ،  $x_2$  ؛

إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) < f(x_2)$  (لأن  $f$  متزايدة تماما على  $I$ ) .

وبالتالي  $k \cdot f(x_1) < k \cdot f(x_2)$  أي  $(k \cdot f)(x_1) < (k \cdot f)(x_2)$

ينتج أن : من أجل كل عددين حقيقيين  $x_1$  ،  $x_2$  ؛

إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $(k \cdot f)(x_1) < (k \cdot f)(x_2)$

أي الدالة  $k \cdot f$  متزايدة تماما على  $I$  .

نستنتج أنه إذا كانت  $f$  متزايدة تماما على  $I$  و  $k > 0$  فإن الدالة  $k \cdot f$  متزايدة تماما على  $I$  .

- وبالمثل، نبرهن أن، إذا كانت  $f$  متناقصة تماما على  $I$  و  $k > 0$  فإن الدالة  $k \cdot f$  متناقصة تماما على  $I$  .

وبنفس الطريقة، تدرس الحالة  $k < 0$  .

مثال :  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 0[$  كما يلي :  $f(x) = x^2$  .

- الدالة  $f \cdot \frac{1}{2}$  معرفة ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0[$  .

- الدالة  $f \cdot 2$  معرفة ومتزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 0[$  .

ملاحظة : إذا كان  $k = 0$  فإن الدالة  $k \cdot f$  هي الدالة المنعدمة، وهي دالة ثابتة.

**د) حاصل قسمة دالتين**

**تعريف :** نسمي حاصل قسمة الدالتين  $f$  و  $g$  ، الدالة  $\frac{f}{g}$  المعرفة على المجموعة  $I$  ،

باستثناء الأعداد الحقيقية  $x$  من  $I$  حيث  $g(x) = 0$  ، كما يلي :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$



**حالة خاصة:** مقلوب الدالة  $g$  المعرفة على  $I$  هي الدالة  $\frac{1}{g}$  المعرفة على  $I$ ، باستثناء

الأعداد الحقيقية  $x$  من  $I$  حيث  $g(x) = 0$ ، كما يلي:

**ملاحظة:** يمكن اعتبار الدالة  $\frac{f}{g}$  كجداء الدالتين  $f$  و  $\frac{1}{g}$ .

وتكون معرفة كما يلي:

**مثال 1:**  $f, g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - 2$  و  $g(x) = 3x - 1$

حاصل قسمة الدالتين  $f$  و  $g$  هي الدالة  $\frac{f}{g}$  المعرفة على

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2}{3x - 1} \quad ] -\infty; \frac{1}{3} [ \cup ] \frac{1}{3}; +\infty [$$

**مثال 2:**  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = -2x + 5$ . الدالة  $\frac{1}{g}$  هي الدالة

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{-2x + 5} \quad ] -\infty; \frac{5}{2} [ \cup ] \frac{5}{2}; +\infty [$$

(و) مركب دالتين

**مثال تمهيدي:**  $f$  هي الدالة التي ترفق بكل طول (بالأمتار)، المساحة (بالأمتار المربعة)

لقطعة أرضية مستطيلة الشكل، طولها ضعف عرضها. من أجل  $x > 0$ ،  $f(x) = 2x^2$ .

$g$  هي الدالة التي ترفق بكل مساحة معطاة (بالأمتار المربعة) ثمن القطعة (بالدينانير)

حيث ثمن المتر المربع هو 10 000 دينار. من أجل  $\mathcal{A} > 0$ ،  $g(\mathcal{A}) = 10\,000 \mathcal{A}$ .

يمكن التعبير مباشرة عن ثمن القطعة الأرضية، بدلالة عرضها كما يلي:

$$x \xrightarrow{f} 2x^2 = \mathcal{A} \xrightarrow{g} 10\,000 \mathcal{A} = 20\,000 x^2$$

الدالة  $x \xrightarrow{\quad} 20\,000 x^2$ ، المحصل عليها بتطبيق الدالة  $f$  ثم الدالة  $g$  تسمى الدالة المركبة

من الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب.

**تعريف:** نسمي الدالة المركبة من الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب، الدالة  $g \circ f$  المعرفة

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad \text{على المجال } I \text{ كما يلي:}$$

**ملاحظات:** 1. الرمز  $g \circ f$  يقرأ "دائرة"  $f$ .

2. الكتابة  $(g \circ f)(x)$  تقرأ "دائرة"  $f$  لـ  $x$ .

3. الكتابة  $g[f(x)]$  تقرأ "لـ  $f$  لـ  $x$ ".

**مثال 1:**  $f, g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x - 5$  و  $g(x) = x^2 - 3$ .



الدالة المركبة من  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب هي الدالة  $gof$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x - 5)$$

$$(2x - 5)^2 - 3 = 4x^2 - 20x + 22$$

$$(gof)(x) = 4x^2 - 20x + 22 \quad \text{أي}$$

الدالة المركبة من  $g$  و  $f$  بهذا الترتيب هي الدالة  $fog$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 3)$$

$$2(x^2 - 3) - 5 = 2x^2 - 11$$

$$(fog)(x) = 2x^2 - 11 \quad \text{أي}$$

**ملاحظة:** عموماً،  $gof \neq fog$

### 3. المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة

$f$  دالة معرفة على المجال  $I$  و  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل لها في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، عدد حقيقي  $k$ .

**أ) إنشاء المنحنى الممثل للدالة**  $g: x \mapsto f(x+k)$

$(\mathcal{C}_g)$  المنحنى الممثل للدالة  $g: x \mapsto f(x+k)$  في المعلم السابق.

**خاصية:** المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  الممثل للدالة  $g: x \mapsto f(x+k)$  هو صورة المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $-k\vec{i}$ .

**البرهان:**  $x$  عنصر من  $I$  حيث  $g(x) = f(x+k)$  . إذن  $g(x-k) = f(x)$

النقطة  $M(x; y)$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_f)$  يعني  $y = f(x)$

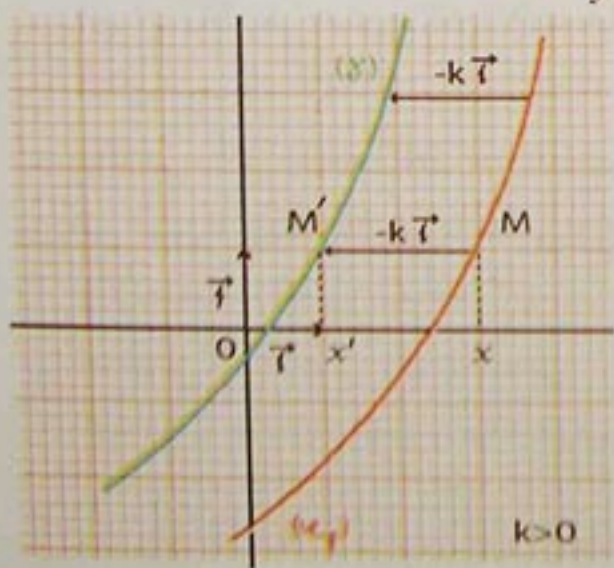
$$\text{أي } y = g(x-k)$$

$$M'(x-k; y) \text{ يعني النقطة } (x-k; y)$$

تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_g)$ .

يكون إحداثيا الشعاع  $\vec{MM}'$  هما

$$\vec{MM}' = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أي } \begin{pmatrix} x-k-x \\ y-y \end{pmatrix}$$





ينتج أن  $\overline{MM'} = -k\vec{i}$

وبالتالي كل نقطة  $M'$  من المنحنى  $(\mathcal{C})$  هي صورة نقطة  $M$  من المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $-k\vec{i}$ .

نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل

للدالة  $x \mapsto f(x+k)$

هو صورة المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $-k\vec{i}$ .

**ب) إنشاء المنحنى الممثل للدالة  $h: x \mapsto f(x) + k$**

$(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $h: x \mapsto f(x) + k$  في المعلم السابق.

**خاصية:** المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $h: x \mapsto f(x) + k$  هو صورة المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $k\vec{j}$ .

**البرهان:** لتكن  $M'$  نقطة من المنحنى  $(\mathcal{C})$

$M'(x'; y') \in (\mathcal{C})$  يعني  $y' = h(x')$

يعني  $y' = f(x') + k$

إذن  $y' - k = f(x')$

ينتج أن النقطة  $M(x; y)$  حيث  $x = x'$  و  $y = y' - k$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_f)$

$x' - x = 0$  و  $y = y' - k$  إذن  $y' - y = k$

أي  $\overline{MM'} = k\vec{j}$

أي أن  $M'$  هي صورة  $M$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $k\vec{j}$ .

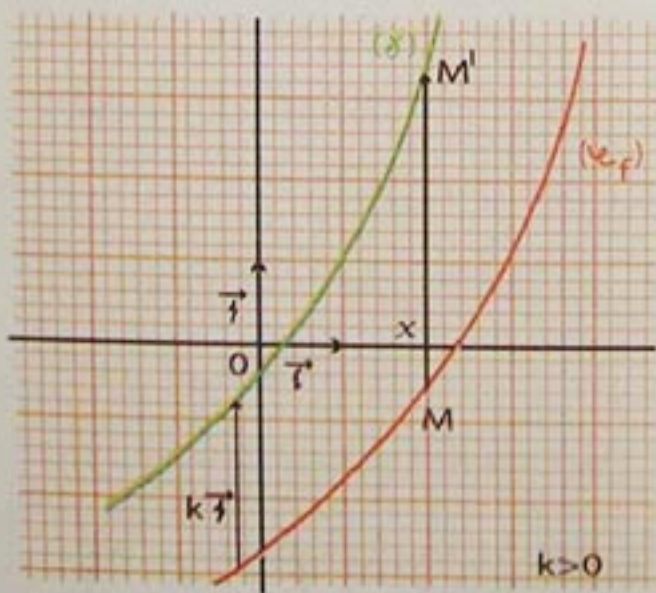
وبالتالي، كل نقطة  $M'$  من المنحنى  $(\mathcal{C})$

هي صورة نقطة  $M$  من المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$

بالإنسحاب الذي شعاعه  $k\vec{j}$ .

نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل

للدالة  $x \mapsto f(x) + k$  هو صورة المنحنى





( $\mathcal{C}_f$ ) الممثل للدالة  $f$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{kj}$ .

**ملاحظة:** عموماً، الدالة  $f$  هي دالة مرجعية.

**مثال:**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = x^2$  و ( $H$ ) هو

القطع المكافئ الممثل للدالة  $f$  في مستو

منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

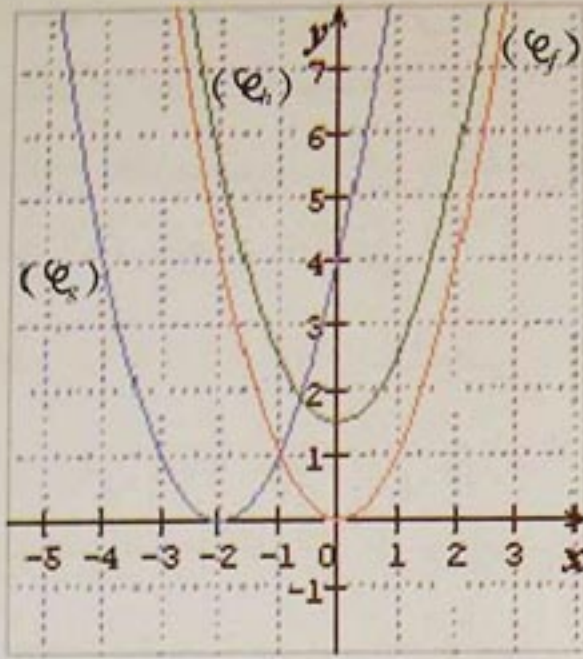
(أ) هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

المنحنى الممثل ( $\mathcal{C}_g$ ) و  $g(x) = (x+2)^2$

لها في المعلم السابق.

المنحنى ( $\mathcal{C}_g$ ) هو صورة ( $\mathcal{C}_f$ ) بالإنسحاب

الذي شعاعه  $\vec{-2i}$ .



(ب)  $h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.  $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}$  و ( $\mathcal{C}_h$ )

المنحنى ( $\mathcal{C}_h$ ) هو صورة ( $\mathcal{C}_f$ ) بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{\frac{3}{2}j}$ .

(ج) إنشاء المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto k \cdot f(x)$

( $\mathcal{C}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $x \mapsto k \cdot f(x)$

في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**قاعدة:** نتحصل على المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) بضرب ترتيب كل نقطة من ( $\mathcal{C}_f$ ) بالعدد الحقيقي  $k$ .

فعلاً: إذا كانت  $(M(x; y), H(x; 0))$

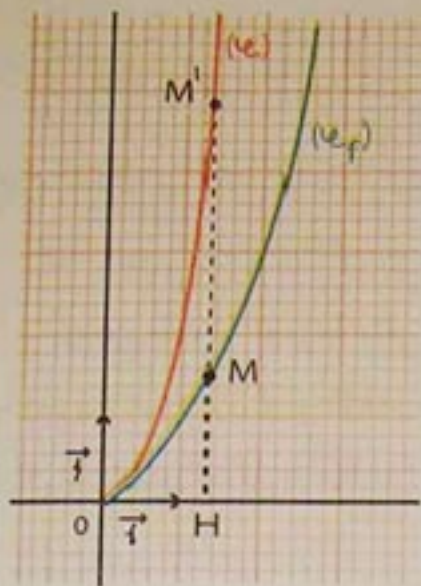
$M(x; y')$  نقطاً تنتمي

إلى محور الفواصل و المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ )

و المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) على الترتيب.

فإن  $y = f(x)$  و  $y' = k \cdot f(x)$  (الشكل).





إذن  $y' = k \cdot y$   
وبالتالي: نتحصل على  $M'$  بضرب ترتيب  $M$

بالعدد الحقيقي  $k$ .

وهكذا يتم الحصول على المنحنى  $(C_{kf})$

الممثل للدالة  $k \cdot f(x)$

نقطة فنقطة بضرب ترتيب كل نقطة من المنحنى  $(C_f)$

الممثل للدالة  $f$  بالعدد الحقيقي  $k$ .

**ملاحظة:** إذا كان  $k = -1$  فإن المنحنى  $(C_{kf})$  هو نظير  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

**مثال 1:**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2$ .

$(C_f)$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$h$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = \frac{1}{2} x^2$ .

و  $(C_h)$  المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

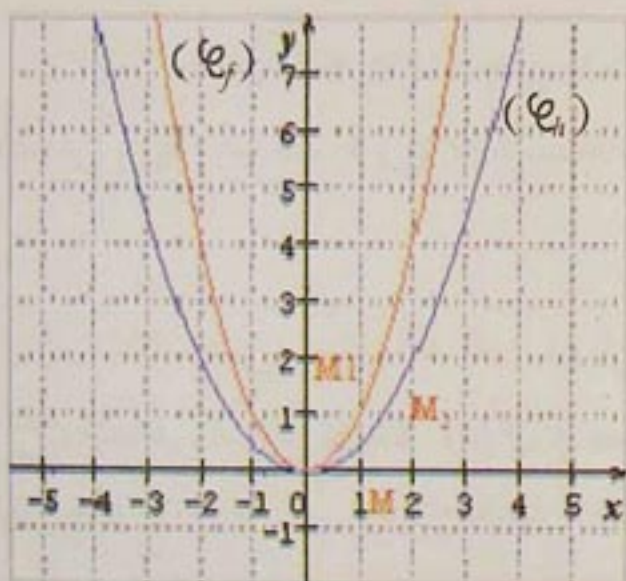
لتكن  $M(x; 0)$  نقطة من محور

الفواصل و  $M_1(x; x^2)$  نقطة من  $(C_f)$ .

$M_2(x; \frac{1}{2} x^2)$  نقطة من  $(C_h)$ .

لدينا:  $\overline{MM_2} = \frac{1}{2} \overline{MM_1}$

إذن  $M_2$  منتصف  $[MM_1]$ .



**(د) إنشاء المنحنى الممثل للدالة  $-f(x)$**

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$ ;  $I$  جزء من  $\mathbb{R}$ .

$(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $I$  كما يلي:  $g(x) = -f(x)$  و  $(C_g)$  المنحنى الممثل لها في المعلم

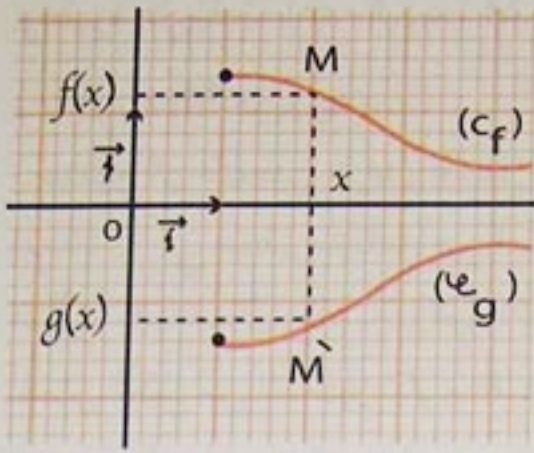
السابق.

**خاصية:** المنحنى  $(C_g)$  هو نظير المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

**البرهان:** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$ ; النقطتان  $M(x; f(x))$



و  $M(x; -f(x))$  متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.



إذن نظيرة كل نقطة  $M(x; f(x))$  من  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_g)$ .

ونظيرة كل نقطة  $M(x; g(x))$  من  $(\mathcal{C}_g)$  بالنسبة إلى محور الفواصل تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_f)$ .

وبالتالي  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل،

أي  $(\mathcal{C}_g)$  هو نظير  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

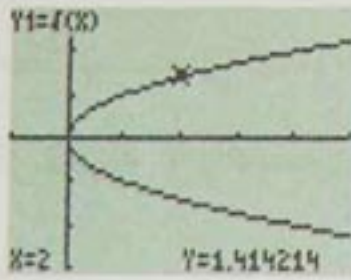
**مثال:** باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها

المنحنيين الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين

على  $[0; 5]$  كما يلي:  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = -\sqrt{x}$ .

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة  $g$  هو نظير المنحنى

الممثل للدالة  $f$  بالنسبة إلى محور الفواصل.



**هـ) إنشاء المنحنى الممثل للدالة  $f(-x)$**

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$ ؛  $I$  جزء من  $\mathbb{R}$ .

$(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $I$  كما يلي:  $h(x) = f(-x)$ ،

$(\mathcal{C}_h)$  المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

**خاصية:** المنحنى  $(\mathcal{C}_h)$  هو نظير المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الترتيب.

**البرهان:** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$ ؛ النقطتان  $M(x; f(x))$  و  $M(-x; f(x))$

متناظرتان بالنسبة إلى محور الترتيب.

نعلم أن  $h(x) = f(-x)$  إذن  $h(-x) = f(x)$

النقطة  $M(-x; h(-x))$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_h)$ .

أي النقطة  $M(-x; f(x))$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C}_h)$ .

إذن نظيرة كل نقطة  $M(x; f(x))$  من  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الترتيب هي النقطة

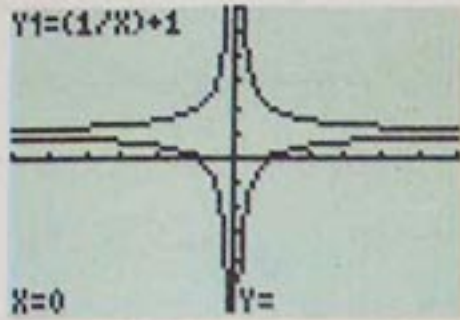
$M(-x; f(x))$  من  $(\mathcal{C}_h)$ .



ونظيرة كل نقطة  $M(x; f(-x))$  من  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الترتيب هي النقطة  $M(x; f(x))$  من  $(\mathcal{C}_f)$ .

نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f(-x) \rightarrow x$  هو نظير المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد من المستوى.

مثال: باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها المنحنى الممثل لكل من الدالتين  $f$  و  $h$  المعرفتين على المجموعة  $[-5; 0 [ \cup ] 0; 5]$  كما يلي:



$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ و } h(x) = -\frac{1}{x} + 1$$

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة  $h$  هو نظير المنحنى الممثل للدالة  $f$  بالنسبة إلى محور الترتيب.

#### 4. عناصر تناظر منحنيات

$I$  جزء من  $\mathbb{R}$  و  $f$  دالة معرفة على  $I$ .

**(أ) تعريف:** الدالة  $f$  زوجية على  $I$  إذا وفقط إذا كان:

$$f(-x) = f(x) \text{ و } -x \in I \text{ من } x \in I$$

**مثال:** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 + 3$  زوجية (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ؛  $-x$  عدد حقيقي و  $f(-x) = f(x)$ ).

**(ب) تعريف:** الدالة  $f$  فردية على  $I$  إذا وفقط إذا كان:

$$f(-x) = -f(x) \text{ و } -x \in I \text{ من } x \in I$$

**مثال:** الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  فردية (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ؛  $-x$  عدد حقيقي و  $g(-x) = -g(x)$ ).

**ملاحظة:** توجد دوال ليست فردية وليست زوجية مثل الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = -2x + 3$ .

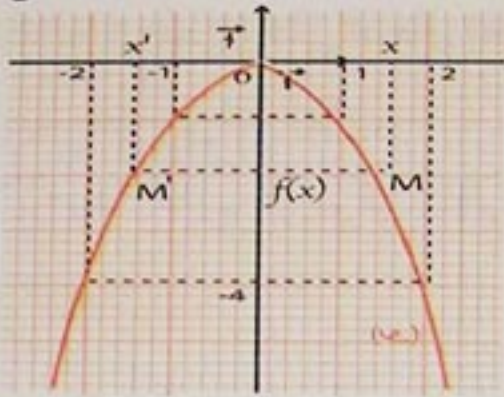


## ج) خواص:

- دالة معرفة على مجموعة  $I$  جزئية من  $\mathbb{R}$ .
- و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**خاصية 1:** إذا كانت الدالة  $f$  زوجية على  $I$  فإن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل لها يقبل محور تناظر وهو محور تراتيب المعلم.

**البرهان:**  $f$  دالة زوجية؛  $M$  نقطة من  $(\mathcal{C})$  إحداثياتها  $(x; f(x))$  و  $M'$  نقطة من  $(\mathcal{C})$



فاصلتها  $-x$  وترتيبها  $f(-x)$ .

بما أن  $f$  زوجية فإن  $f(-x) = f(x)$ .

وبالتالي النقطتان  $M$  و  $M'$  لهما فاصلتان

متعاكستان وترتيبان متساويان،

إذن  $M$  و  $M'$  متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$ ، النقطتان  $M(x; f(x))$  و  $M'(-x; f(-x))$

من  $(\mathcal{C})$  متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب؛

وبالتالي، محور تراتيب المعلم هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$ .

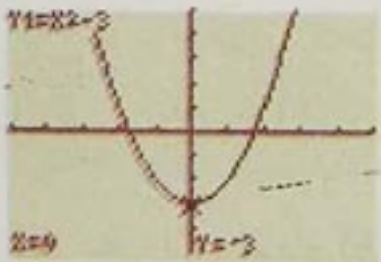
**مثال:** باستعمال حاسبة بيانية، نظهر على شاشتها

المنحنى الممثل للدالة  $f$  المعرفة على

المجال  $[-4; 4]$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - 3$

نلاحظ أن محور تراتيب المعلم هو محور

تناظر منحنى الدالة  $f$ .



**خاصية 2:** إذا كانت الدالة  $f$  فردية على  $I$  فإن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل لها يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.

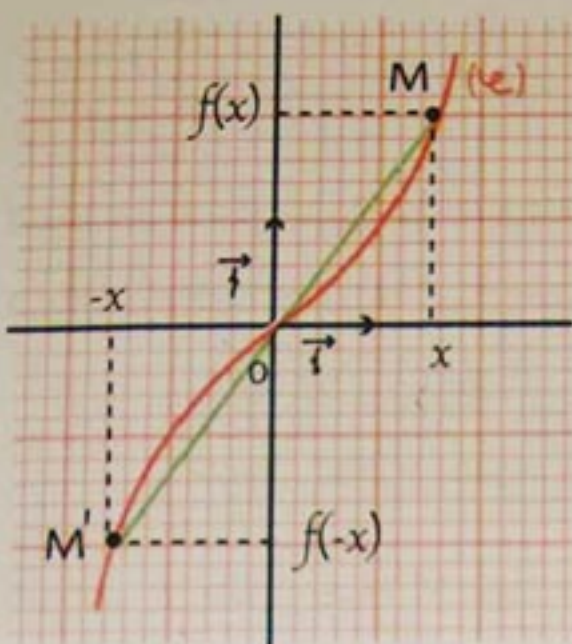
**البرهان:**  $f$  دالة فردية؛  $M$  نقطة من  $(\mathcal{C})$  إحداثياتها  $(x; f(x))$  و  $M'$  نقطة من  $(\mathcal{C})$

فاصلتها  $-x$  وترتيبها  $f(-x)$ .

بما أن  $f$  فردية فإن  $f(-x) = -f(x)$ .

وبالتالي النقطتان  $M$  و  $M'$  لهما فاصلتان متعاكستان وترتيبان متعاكسان،





إذن  $M$  و  $M'$  متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم .  
ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ،

النقطتان  $M(x; f(x))$  و  $M'(-x; f(-x))$  من  $(\mathcal{C})$   
متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

وبالتالي ، مبدأ المعلم هو مركز تناظرا لمنحنى  $(\mathcal{C})$   
الممثل للدالة  $f$  .

**مثال :** على شاشة حاسبة بيانية ، نظهر المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[-4; 4]$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ : كما يلي}$$

نلاحظ أن مبدأ المعلم هو مركز تناظرا لمنحنى  $(\mathcal{C})$  .

### (د) محور تناظر منحني

$I$  جزء من  $\mathbb{R}$  ،  $f$  دالة معرفة على  $I$  .

$(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

$(D)$  مستقيم معادلته  $x = a$  ؛  $a$  عدد حقيقي .

**مبرهنة :** المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $x = a$  محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$  يعني ، من أجل

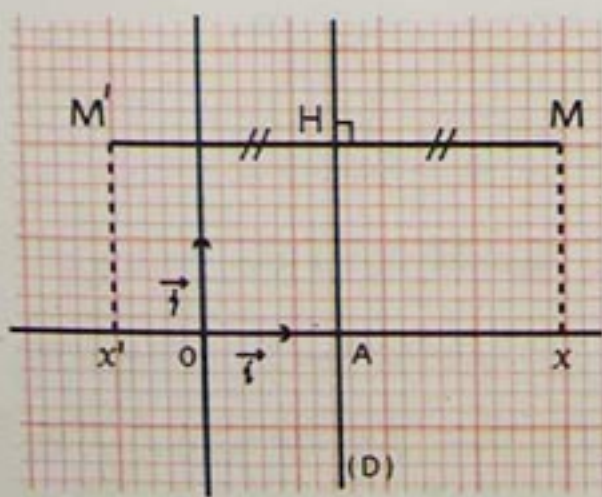
كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$  ، العدد  $a - h$  ينتمي إلى  $I$

$$\text{و } f(a + h) = f(a - h) \text{ .}$$

**ملاحظة :** بعد حساب العدد  $f(a + h)$  نحسب العدد  $f(a - h)$  بتعويض  $h$  بالعدد

$-h$  في عبارة  $f(a + h)$  .

### البرهان :



- نفرض أن المستقيم  $(D)$  محور تناظرا لمنحنى  $(\mathcal{C})$  .

- نبرهن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ،

حيث  $x = a + h$  ، العدد  $a - h$  ينتمي إلى  $I$

$$\text{و } f(a + h) = f(a - h) \text{ .}$$

من أجل كل نقطة  $M(x; y)$  من  $(\mathcal{C})$  ،

نظيرتها  $M'(x'; y')$  تنتمي إلى  $(\mathcal{C})$  وتحقق :  $\overline{MM'} = 2\overline{MH}$  حيث  $H$  هي المسقط



العمودي للنقطة  $M$  على  $(D)$ .

إحداثيات النقط  $M(x'; f(x'))$ ؛  $M(x; f(x))$ ؛  $H(a; f(x))$  تحقق العلاقتين التاليتين:

$$f(x') = f(x) \text{ و } \frac{x' + x}{2} = a$$

$$\text{أي } f(x') = f(x) \text{ و } x' = 2a - x$$

بوضع  $x = a + h$  ينتج أن  $x' = a - h$  و  $f(a + h) = f(a - h)$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$ ، العدد  $a - h$  ينتمي إلى  $I$

$$\text{و } f(a + h) = f(a - h)$$

**العكس:** نفرض أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$ ، العدد  $a - h$

$$\text{ينتمي إلى } I \text{ و } f(a + h) = f(a - h)$$

بوضع  $x = a + h$  و  $x' = a - h$  نتحصل على  $f(x) = f(a + h)$  و  $f(x') = f(a - h)$

$$\text{ينتج أن } f(x) = f(x') \text{ و } \frac{x + x'}{2} = a$$

إذن النقطتان  $M(x; f(x))$ ؛  $M(x'; f(x'))$  من المنحنى  $(\mathcal{C})$  متناظرتان بالنسبة إلى

المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $x = a$ . وبالتالي، المستقيم  $(D)$  هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

## هد) مركز تناظر منحن

$I$  جزء من  $\mathbb{R}$ ،  $f$  دالة معرفة على  $I$ .

$(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نقطة  $A(a; b)$  من المستوي.

**مبرهنة:** النقطة  $A(a; b)$  مركز تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$  يعني من أجل كل عدد

حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$ ، العدد  $a - h$  ينتمي إلى  $I$

$$\text{و } \frac{f(a + h) + f(a - h)}{2} = b$$

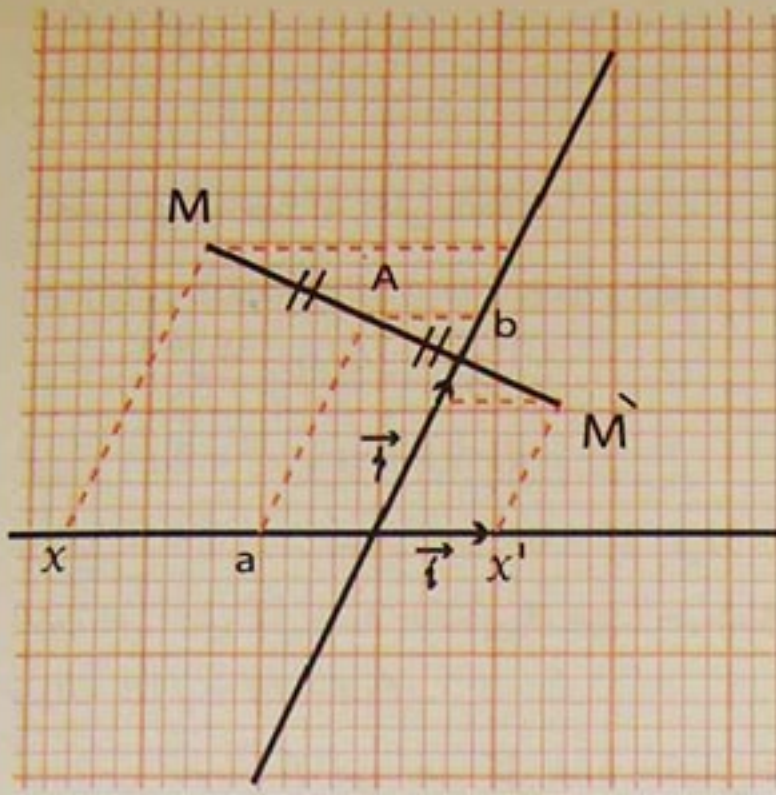
## البرهان:

- لتكن  $M(x; y)$  نقطة من  $(\mathcal{C})$ ،  $M(x'; y')$  نظيرتها بالنسبة إلى النقطة  $A(a; b)$

$M'$  هي أيضا نقطة من  $(\mathcal{C})$  لأن  $A$  مركز تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$$\text{إذن } \overline{MM'} = 2\overline{MA}$$





$$\begin{cases} x' - x = 2(a - x) \\ y' - y = 2(b - y) \end{cases} \text{ وبالتالي}$$

$$\begin{cases} x' + x = 2a \\ y' + y = 2b \end{cases} \text{ أي}$$

إذا كان  $x = a + h$  فإن  $x' = a - h$

$$\text{و } y' + y = 2b$$

بما أن  $y = f(x)$  و  $y' = f(x')$

$$\text{فإن } f(x) + f(x') = 2b$$

$$\text{أي } \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$

ينتج أن، إذا كانت  $A(a; b)$  مركز تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$ ،

فإن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$ ، العدد  $a - h$  ينتمي إلى  $I$

$$\text{و } \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$

**العكس:** نفرض أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$ ، العدد  $a - h$

$$\text{ينتمي إلى } I \text{ و } \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$

بوضع  $x' = a - h$  و  $f(a+h) = f(x)$  و  $f(a-h) = f(x')$ ،

$$\text{يكون } x' + x = 2a \text{ و } f(x) + f(x') = 2b$$

لتكن  $M(x; f(x))$  و  $M'(x'; f(x'))$  نقطتين من المستوى.

ينتج أن النقطتين  $M$  و  $M'$  متناظرتان بالنسبة إلى النقطة  $A(a; b)$ .

إذن: كل نقطتين  $M(a+h; f(a+h))$  و  $M'(a-h; f(a-h))$  من  $(\mathcal{C})$  متناظرتان

بالنسبة إلى النقطة  $A(a; b)$ .

وبالتالي النقطة  $A(a; b)$  مركز تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$ .



## 1- الحل بيانيا لمعادلات من الشكل $x^3 = k$

طريقة:

$k$  عدد حقيقي.

حل معادلة من الشكل  $x^3 = k$  ، بيانيا ،

- نرسم المنحنى الممثل لكل من الدالتين  $x \mapsto x^3$  و  $x \mapsto k$  في نفس المعلم.

وحلول المعادلة  $x^3 = k$  هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين.

تمرين: حل بيانيا كلا من المعادلات التالية:  $x^3 = 1$  ؛  $x^3 = 0$  ؛  $x^3 = -8$

حل: نرسم في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(  $\|\vec{i}\| = 2$  ؛  $\|\vec{j}\| = 1$  ) المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $x \mapsto x^3$  والمستقيمات  $(D_1)$  ،  $(D_2)$  ،  $(D_3)$  الممثلة للدوال  $x \mapsto 1$  ؛  $x \mapsto 0$  ؛  $x \mapsto -8$  على الترتيب.

1. المستقيم  $(D_1)$  يقطع  $(\mathcal{C})$  في نقطة

واحدة فاصلتها 1.

إذن المعادلة  $x^3 = 1$  تقبل حلاً واحداً

في  $\mathbb{R}$  هو 1.

2. المستقيم  $(D_2)$  (وهو محور الفواصل)

يقطع  $(\mathcal{C})$  في نقطة واحدة فاصلتها 0.

إذن المعادلة  $x^3 = 0$  تقبل حلاً واحداً

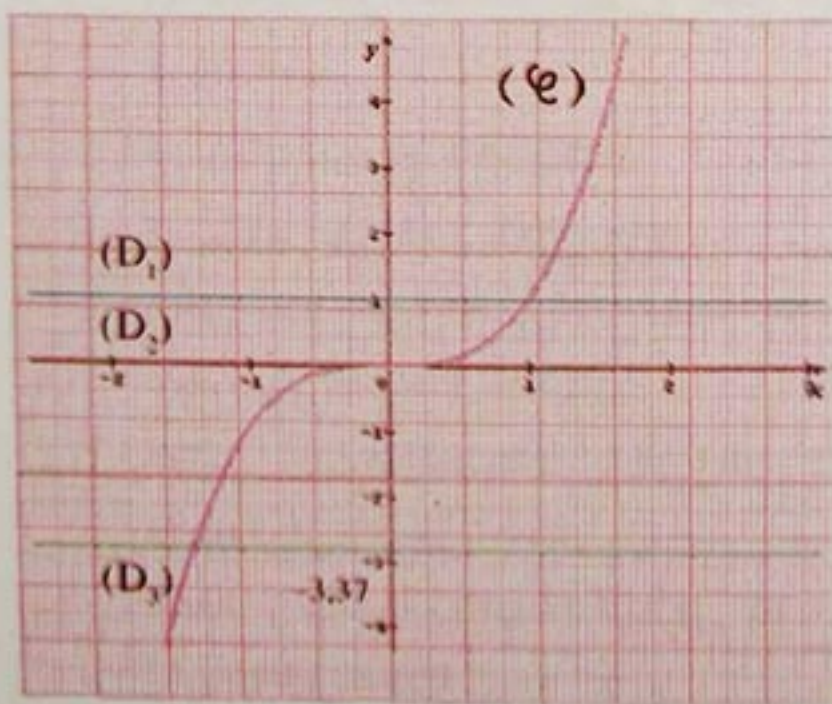
في  $\mathbb{R}$  هو 0.

3. المستقيم  $(D_3)$  يقطع  $(\mathcal{C})$  في نقطة

واحدة فاصلتها -2 .

إذن المعادلة  $x^3 = -8$  تقبل حلاً واحداً

في  $\mathbb{R}$  هو -2 .





2- حل معادلات من الشكل  $x^3 = k$  ، باستعمال حاسبة بيانية

طريقة:

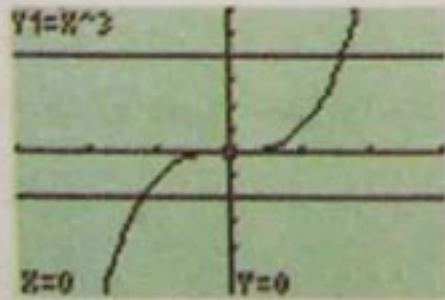
$k$  عدد حقيقي.

- نرسم المنحنى الممثل للدالة  $x \rightarrow x^3$  والمستقيم الممثل للدالة  $x \rightarrow k$  على شاشة الحاسبة بواسطة اللمسة **GRAPH**.
- نضغط على اللمسة **WINDOW** ثم نضع الزايق على نقطة من نقط التقاطع؛
- بواسطة اللمسة **ZOOM** ، نختار البرنامج **2:Zoom In** ثم نضغط على اللمسة **ENTER**.
- نواصل تحريك الزايق بجوار نقطة التقاطع للحصول على القيمة المقربة (أو التامة) الأفضل لحل المعادلة.
- نكرر نفس العمل بالنسبة إلى نقط التقاطع الأخرى إن وجدت.

**تمرين:** باستعمال حاسبة بيانية، حل كلا من المعادلتين التاليتين:  $x^3 = 4$  ؛  $x^3 = -2$  .

**حل:** ( تعطى الحلول التامة أو المقربة).

1. نرسم المنحنى الممثل للدالة "مكعب".
2. نرسم المستقيمين حيث معادلتاهما  $y = 4$  ؛  $y = -2$  .
3. نضغط على اللمسة **WINDOW** و نضع الزايق على إحدى نقطتي تقاطع المنحنى مع المستقيمين.
4. نختار البرنامج **2:Zoom In** بواسطة اللمسة **ZOOM** .
5. نضغط على اللمسة **ENTER** ونقرأ قيمة مقربة لفاصلة نقطة التقاطع. بتكرار نفس العمل بالنسبة إلى نقطة التقاطع الثانية، نتوصل إلى النتيجة التاليتين:



العدد 1.59 هو القيمة المقربة إلى  $10^{-2}$

بالزيادة لحل المعادلة  $x^3 = 4$  .

العدد -1.27 هو القيمة المقربة إلى  $10^{-2}$

بالزيادة لحل المعادلة  $x^3 = -2$  .



3- الحل بيانيا لمتراجحات من الشكل  $x^3 \geq k$  أو  $x^3 \leq k$ طريقة:  $k$  عدد حقيقي.

حل متراجحة من الشكل  $x^3 \geq k$  أو  $x^3 \leq k$  ، بيانيا ،  
 - نرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين  $x \mapsto x^3$  و  $x \mapsto k$   
 في نفس المعلم ثم ندرس الأوضاع النسبية لهما.  
 - مجموعة حلول المتراجحة  $x^3 \geq k$  هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل  
 للدالة  $x \mapsto x^3$  الواقعة فوق المستقيم الممثل للدالة  $x \mapsto k$  أو عليه.  
 - مجموعة حلول المتراجحة  $x^3 \leq k$  هي مجموعة فواصل نقط المنحنى الممثل  
 للدالة  $x \mapsto x^3$  الواقعة تحت المستقيم الممثل للدالة  $x \mapsto k$  أو عليه.

**تمرين:** حل بيانيا كلا من المتراجحات التالية:  $x^3 \geq 1$  ؛  $x^3 \leq -1$  ؛  $x^3 > 0$

**حل:** نرسم في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
 (  $\| \vec{i} \| = 2$  ؛  $\| \vec{j} \| = 1$  ) المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $x \mapsto x^3$  والمستقيمات  
 $(D_1)$ ،  $(D_2)$ ،  $(D_3)$  الممثلة للدوال  $x \mapsto 1$  ؛  $x \mapsto -1$  ؛  $x \mapsto 0$  على  
 الترتيب:

1. المستقيم  $(D_1)$  يقطع المنحنى  $(\mathcal{C})$  في نقطة

واحدة فاصلتها 1.

مجموعة نقط المنحنى  $(\mathcal{C})$  التي تراتيبها

أكبر أو يساوي 1 هي مجموعة نقط

المنحنى  $(\mathcal{C})$  التي تقع على المستقيم  $(D_1)$

أو فوقه.

فواصل هذه النقط هي حلول

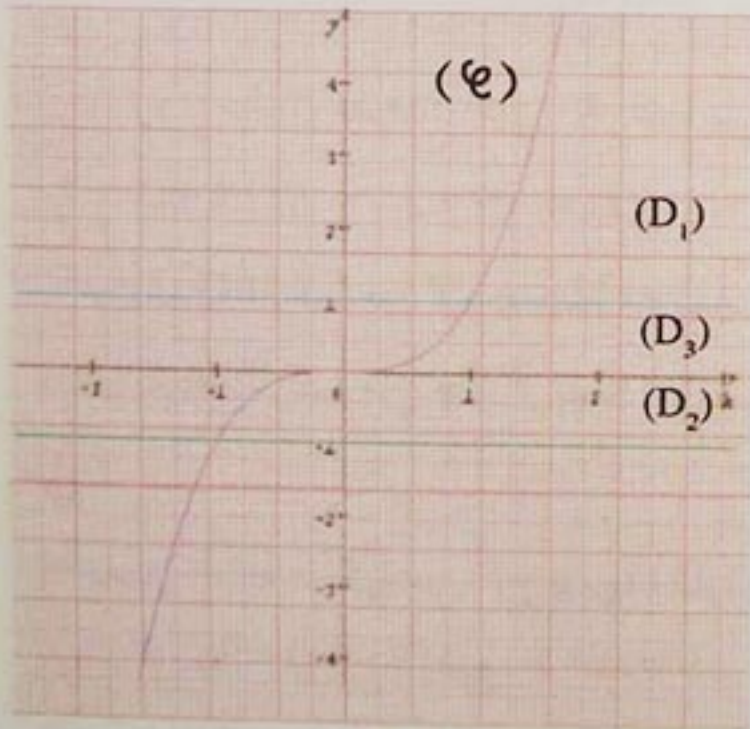
المتراجحة  $x^3 \geq 1$  .

إذن مجموعة حلول المتراجحة

$x^3 \geq 1$  هي المجال  $[1; +\infty[$

2. المستقيم  $(D_2)$  يقطع المنحنى  $(\mathcal{C})$  في نقطة واحدة فاصلتها -1.

مجموعة نقط المنحنى  $(\mathcal{C})$  التي تراتيبها أصغر أو يساوي -1





- هي مجموعة نقط المنحنى  $(\mathcal{C})$  التي تقع على المستقيم  $(D_1)$  أو تحته.  
 فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة  $x^3 \leq -1$  .  
 إذن مجموعة حلول المتراجحة  $x^3 \leq -1$  هي المجال  $]-\infty; -1]$  .  
 3. المستقيم  $(D_2)$  (وهو محور الفواصل) يقطع المنحنى  $(\mathcal{C})$  في نقطة واحدة فاصلتها 0.  
 مجموعة نقط المنحنى  $(\mathcal{C})$  التي تراتيبها أكبر تماما من 0 هي مجموعة نقط المنحنى  
 $(\mathcal{C})$  التي تقع فوق المستقيم  $(D_2)$  .  
 فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة  $x^3 > 0$  .  
 إذن مجموعة حلول المتراجحة  $x^3 > 0$  هي المجال  $]0; +\infty[$  .

#### 4- تعيين الدالة المركبة من دالتين

**طريقة:**  
 •  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على نفس المجموعة  $I$  ؛  $I$  جزء من  $\mathbb{R}$  .  
 - لتعيين الدالة المركبة  $g \circ f$  من  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب، نحسب  $g[f(x)]$  .  
 - لحساب  $g[f(x)]$  ، نضع  $f(x) = y$  ونحسب  $g(y)$  ثم نعوض  $y$  بالعدد  
 $f(x)$  في عبارة  $g(y)$  .  
 تكون الدالة المركبة من  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب هي الدالة المعرفة على  $I$   
 بـ:  $g \circ f : x \mapsto g[f(x)]$  .

**تمرين:**  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 3 \quad ; \quad f(x) = 3x - 2$$

- عين الدالة المركبة من  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب.  
 - عين الدالة المركبة من  $g$  و  $f$  بهذا الترتيب.

**حل:**

1. تعيين الدالة المركبة من  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب.

$$\text{لدينا } f(x) = 3x - 2 \text{ ، نضع } y = 3x - 2$$

حساب  $g(y)$  .

$$\text{لدينا } g(y) = -y^2 + 3$$

$$\text{إذن } g(y) = -(3x - 2)^2 + 3$$







لدينا:  $(g \circ u)(x) = g[u(x)] = g(x^2) = 2x^2 - 1 = f(x)$

نكتب:  $g \circ u = f$

تعيين الدالتين  $u$  و  $g$  يعني تفكيك الدالة  $f$  إلى الدالتين  $u$  و  $g$  بهذا الترتيب.

**تمرين 2:** دالة معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x+3}$   
عين تفكيكا للدالة  $f$ .

**حل:** نعتبر الدالتين  $g: x \mapsto x+3$  و  $h: x \mapsto \frac{1}{x}$  المعرفتين على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا:  $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(x+3) = \frac{1}{x+3} = f(x)$   
نكتب:  $h \circ g = f$

تعيين الدالتين  $g$  و  $h$  يعني تفكيك الدالة  $f$  إلى الدالتين  $g$  و  $h$  بهذا الترتيب.

### 6- دراسة إشارة دالة

**طريقة:**  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$ .  $I$  جزء من  $\mathbb{R}$ . لدراسة إشارة  $f$  على المجموعة  $I$ ، ندرس إشارة  $f(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  من  $I$ .

**تمرين:** أدرس إشارة كل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$f(x) = 5x + 2$  و  $g(x) = -2x + 5$

**حل:** - دراسة إشارة  $f$  على  $\mathbb{R}$  يعني تعيين إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

لدينا:  $f(x) = 0$  إذا وفقط إذا كان  $5x + 2 = 0$ .

أي  $x = -\frac{2}{5}$

$f(x) > 0$  إذا وفقط إذا كان  $5x + 2 > 0$ .

أي  $x \in ]-\frac{2}{5}; +\infty[$

$f(x) < 0$  إذا وفقط إذا كان  $5x + 2 < 0$

أي  $x \in ]-\infty; -\frac{2}{5}[$

إشارة  $f(x)$  ملخصة في الجدول المقابل

ينتج أن الدالة  $f$  موجبة على المجال  $] -\frac{2}{5}; +\infty[$

|        |           |                |           |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{2}{5}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -         | ○              | +         |



وسالبة على المجال  $]-\infty ; -\frac{2}{5}]$

- دراسة إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$  يعني تعيين إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$

لدينا:  $g(x) = 0$  إذا وفقط إذا كان  $-2x + 5 = 0$

$$x = \frac{5}{2} \text{ أي}$$

$g(x) > 0$  إذا وفقط إذا كان  $-2x + 5 > 0$

$$x \in ]-\infty ; \frac{5}{2}[ \text{ أي}$$

$g(x) < 0$  إذا وفقط إذا كان  $-2x + 5 < 0$

$$x \in ]\frac{5}{2} ; +\infty[ \text{ أي}$$

|        |           |               |           |
|--------|-----------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | +         | ○             | -         |

إشارة  $g(x)$  ملخصة في الجدول المقابل

ينتج أن الدالة  $g$  موجبة على المجال

$$]-\infty ; \frac{5}{2}[$$

وسالبة على المجال  $]\frac{5}{2} ; +\infty[$

7- رسم المنحنى الممثل للدالة  $|f(x)| \rightarrow x$

طريقة:

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$  جزئية من  $\mathbb{R}$

$(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j})$$

$g$  الدالة المعرفة على المجموعة  $I$  كما يلي:  $g(x) = |f(x)|$

$(\mathcal{C}_g)$  المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

- لرسم المنحنى الممثل للدالة  $g$ ، نعبر عن  $g(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة،

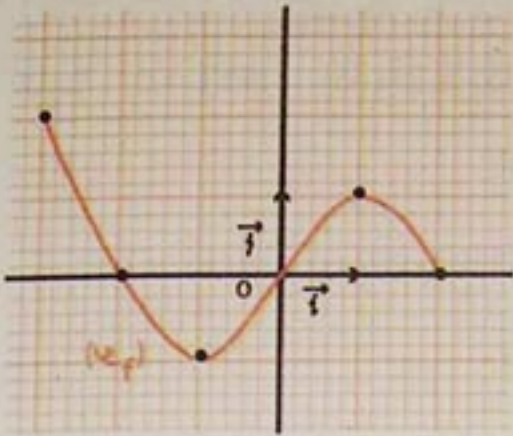
ويكون:  $(\mathcal{C}_g)$  و  $(\mathcal{C}_f)$  منطبقين في المجالات التي يكون فيها  $f(x) \geq 0$

-  $(\mathcal{C}_g)$  هو نظير  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي

يكون فيها  $f(x) \leq 0$ .



**ملاحظة:**  $|f(x)| = f(x)$  إذا كان  $f(x) \geq 0$   
و  $|f(x)| = -f(x)$  إذا كان  $f(x) \leq 0$ .



**تمرين:**  $(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$

على المجال  $[-3; 2]$  ، في معلم

متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الشكل).

- أعد هذا الشكل وارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $g$  حيث  $g(x) = |f(x)|$

**حل:**  $f(x) \geq 0$  على كل من المجالين  $[-3; -2]$  و  $[0; 2]$ .

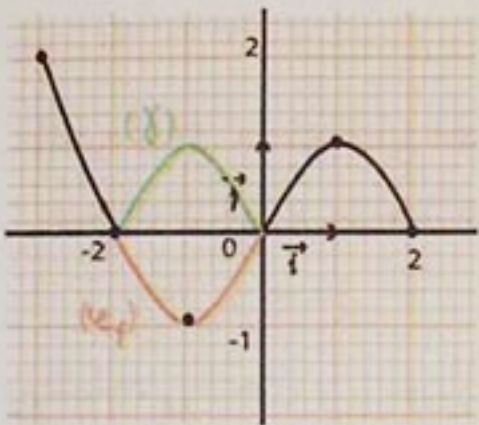
إذن  $(\mathcal{C})$  و  $(\mathcal{C}_f)$  منطبقان.

-  $g(x) \leq 0$  على المجال  $[-2; 0]$ .

إذن  $(\mathcal{C})$  هو نظير  $(\mathcal{C}_f)$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

- على الشكل نلاحظ أن  $(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل

باللون الأحمر و  $(\mathcal{C})$  هو المنحنى الممثل باللون الأخضر.



## 8- إثبات أن مستقيما هو محور تناظر منحن

**طريقة:**

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$  جزئية من  $\mathbb{R}$ .

$(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$(D)$  مستقيم معادلته  $x = a$  ؛  $a$  عدد حقيقي.

لإثبات أن المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $x = a$  هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل

للدالة  $f$  ، يكفي إثبات أن:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$  ، العدد  $a - h$  ينتمي

إلى  $I$  و  $f(a - h) = f(a + h)$ .

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أثبت أن المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $x = -\frac{5}{4}$  هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C})$ .



**حل:** - من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x = -\frac{5}{4} + h$  ، العدد  $-\frac{5}{4} - h$  ينتمي إلى  $\mathbb{R}$  .

- نقارن بين  $f\left(-\frac{5}{4} + h\right)$  و  $f\left(-\frac{5}{4} - h\right)$  .

$$\text{لدينا } f\left(-\frac{5}{4} + h\right) = 2\left(-\frac{5}{4} + h\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{4} + h\right) - 1 = 2h^2 - \frac{33}{8}$$

$$\text{إذن } f\left(-\frac{5}{4} + h\right) = 2h^2 - \frac{33}{8}$$

$$\text{ولدينا أيضا } f\left(-\frac{5}{4} - h\right) = 2\left(-\frac{5}{4} - h\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{4} - h\right) - 1 = 2h^2 - \frac{33}{8}$$

$$\text{إذن } f\left(-\frac{5}{4} - h\right) = 2h^2 - \frac{33}{8}$$

ينتج أن  $f\left(-\frac{5}{4} - h\right) = f\left(-\frac{5}{4} + h\right)$  .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x = -\frac{5}{4} + h$  ، العدد  $-\frac{5}{4} - h$

ينتمي إلى  $\mathbb{R}$  و  $f\left(-\frac{5}{4} - h\right) = f\left(-\frac{5}{4} + h\right)$

نستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $x = -\frac{5}{4}$  هو محور تناظر المنحنى (C) الممثل للدالة  $f$  .

### 9- إثبات أن نقطة هي مركز تناظر منحنى

**طريقة:**

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $I$  جزئية من  $\mathbb{R}$  .

(C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد

على  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

$A(a; b)$  نقطة من المستوي .

لإثبات أن النقطة  $A(a; b)$  هي مركز تناظر المنحنى (C) ، يكفي إثبات أن:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x = a + h$  ؛ العدد  $a - h$  ينتمي

$$\text{إلى } I \text{ و } \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$$



تمرين:  $f$  هي الدالة المعرفة على المجموعة  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$$

- (ع) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- أثبت أن النقطة  $A(1; 3)$  مركز تناظر المنحنى (ع).

حل: - من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  حيث  $x = 1 + h$  ،  
العدد  $1 - h$  ينتمي إلى  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  ، أي  $h \neq 0$ .

$$\text{حساب العدد } \frac{f(1+h) + f(1-h)}{2}$$

$$f(1+h) = \frac{3(1+h) + 2}{(1+h) - 1} = \frac{3h + 5}{h} \quad \text{لدينا}$$

$$f(1-h) = \frac{3(1-h) + 2}{(1-h) - 1} = \frac{-3h + 5}{-h} = \frac{3h - 5}{h}$$

$$\text{(لأن } h \neq 0 \text{)} \quad \frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = \frac{\frac{3h + 5}{h} + \frac{3h - 5}{h}}{2} = \frac{6h}{2h} = 3$$

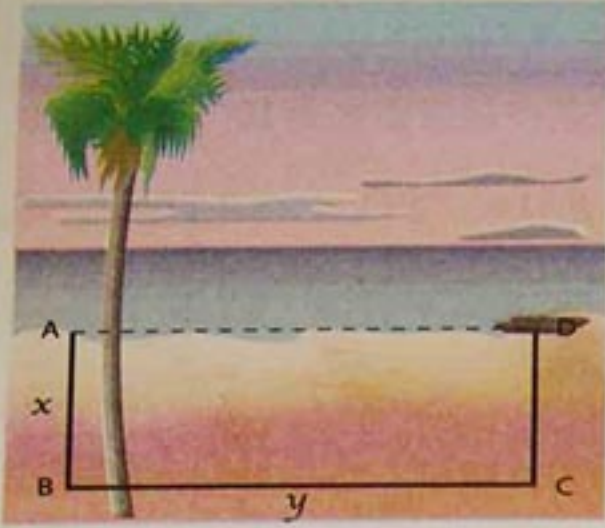
$$\text{إذن: } \frac{f(1+h) + f(1-h)}{2} = 3$$

نستنتج أن النقطة  $A(1; 3)$  مركز تناظر المنحنى (ع).



# مسألة محلولة

## مسألة 1



لتحديد حيز مستطيل الشكل للاصطياف على شاطئ البحر،  
تُبت حبل طوله 40 متراً بواسطة أربعة أوتاد في المواضع A، B،  
C، D على أن يكون طرفا الحبل هما A، D (كما في الشكل).  
نفرض أن  $AB = x$ ،  $BC = y$ ،

1. اثبت أن، من أجل كل عدد من المجال  $[0; 20]$ ،

المساحة  $f(x)$  للحيز يعبر عنها بالدستور  $f(x) = -2x^2 + 40x$

2. أ) أظهر على شاشة حاسبة بيانية، المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$ .

- ثم حدّد القيمة العظمى  $\beta$  للدالة  $f$  على المجال  $[0; 20]$ .

- من أجل أية قيمة  $\alpha$ ، تبلغ  $f(x)$  هذه القيمة العظمى؟

ب) اكتب  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = -2(x - \alpha)^2 + \beta$ .

3. أ)  $g$  هي الدالة المعرفة كما يلي:  $g(x) = -2x^2$ .

و  $(\mathcal{C}_g)$  هو المنحنى الممثل لها في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- ماهو التحويل النقطي الذي يحول  $(\mathcal{C}_g)$  إلى  $(\mathcal{C}_f)$ ؟

- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

ب) ماذا تستنتج بالنسبة إلى عرض وطول الحيز؟

حل:

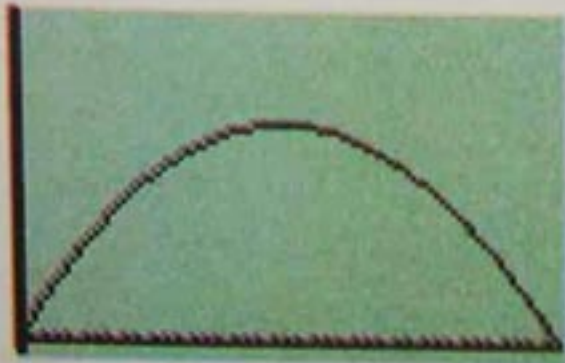
1. نعلم أن  $2x + y = 40$  (طول الحبل) حيث  $x \in [0; 20]$ .

إذن  $y = 40 - 2x$

مساحة الحيز هي  $f(x)$  حيث  $f(x) = x \cdot y$

وبالتالي  $f(x) = x \cdot (40 - 2x) = -2x^2 + 40x$

إذن من أجل  $x$  من  $[0; 20]$  ؛  $f(x) = -2x^2 + 40x$



2. أ) - إظهار، على شاشة حاسبة بيانية،

المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$ .

- القيمة العظمى  $\beta$  هي 199,99909

- تبلغ  $f(x)$  هذه القيمة من أجل



# مسألة محلولة

$x = 9,978723$  أي  $\alpha = 9,978723$  ؛ بعد التدوير إلى الوحدة ، نجد  
 $\beta = 200$  و  $\alpha = 10$  .

$$f(x) = -2(x - 10)^2 + 200 \quad (\text{ب})$$

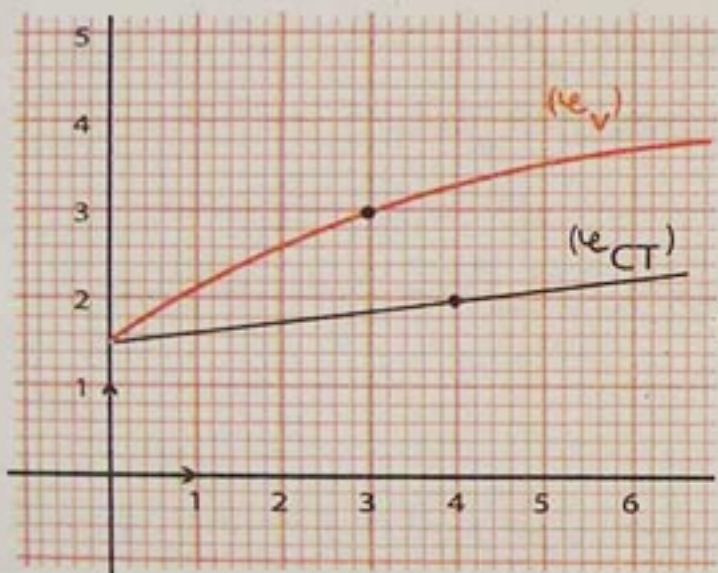
3. (أ) التحويل النقطي الذي يحول  $(e_g)$  إلى  $(e_r)$  هو الإنسحاب  
 الذي شعاعه  $10\vec{i} + 200\vec{j}$

– الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $[0; 10]$  ومتناقصة على  $[10; 20]$  .  
 (من القراءة البيانية).

(ب) من أجل  $x = 10$  ؛  $y = 20$  (عرض وطول الحيز) يكون للحيز أكبر مساحة.

## مسألة 2

CT هي الدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  (مقدرة بالأمتار)  
 من بضاعة منتجة، كلفتها (بالآلاف الدنانير)،  
 $(e_{CT})$  تمثيلها البياني في معلم متعامد  
 ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .



V هي الدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  (مقدرة بالأمتار)  
 من بضاعة مبيعة، ثمن بيعها (بالآلاف الدنانير).  
 $(e_V)$  المنحنى الممثل لها في المعلم السابق (الشكل).

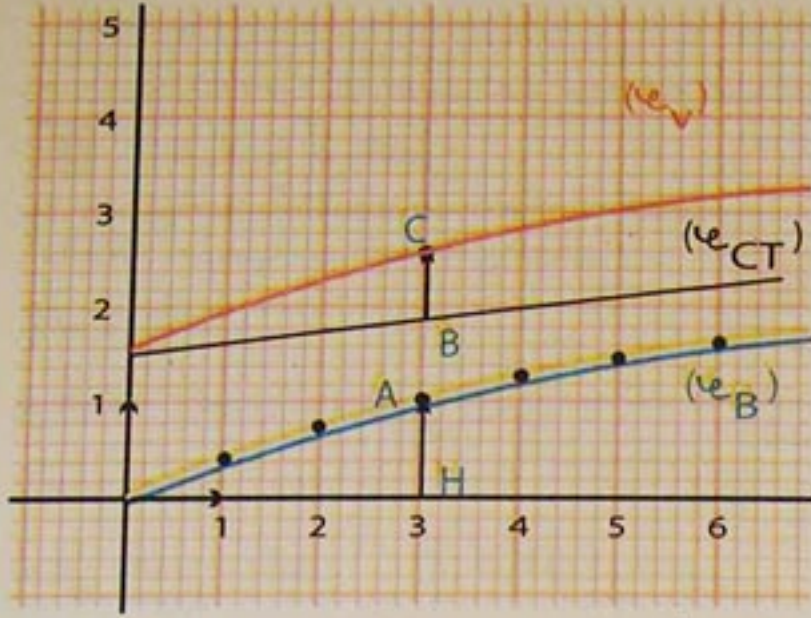
1. عين، بيانيا، بالتقريب إلى 100 دينار، الربح B  
 الناتج عن ثلاثة أمتار مبيعة.

2. لتكن B الدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  مبيعة الربح  $B(x)$  الناتج.

– انشئ نقطة فنقطة المنحنى  $(e_B)$  للدالة B في المعلم السابق.



# مسألة محلولة



حل:

1. من القراءة البيانية، ينتج أن:  
 $CT(3) \simeq 1,8$  ،  $V(3) \simeq 2,9$   
 من أجل ثلاثة أمتار مبيعة، يكون الربح  
 قريبا من  $2,9 - 1,8$  أي  $1,1$  أي 1100 دينار.
2. نعلم أن  $V(x) = CT(x) + B(x)$

$$\text{أي } B(x) = V(x) - CT(x) \dots (1)$$

لتكن C نقطة من المنحنى  $(e_V)$  ، B نقطة من المنحنى  $(e_{CT})$ .  
 و H نقطة من محور الفواصل حيث يكون لهذه النقط نفس الفاصلة  $x$ .

لتكن A نقطة من  $(e_B)$  فاصلتها  $x$ .

من العلاقة (1)، ينتج أن  $y_A = y_C - y_B$

$$\text{أي } \overline{HA} = \overline{BC}$$

إذن يمكن إنشاء النقطة A إذا علمت النقط C ، B ، H .

لإنشاء المنحنى  $(e_B)$  نقطة فنقطة، ننشئ نقط  $(e_B)$  التي فواصلها أعداد صحيحة ثم  
 نصل فيما بينها.



1 صحيح أو خاطئ

1. الدالة "مكعب" متناقصة على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .
2. الدالة "مكعب" فردية على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .
3. في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، محور الترتيب هو محور تناظر منحنى الدالة "مكعب".
4. إذا كان  $x$  عددا حقيقيا غير منعدم حيث  $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x}$  فإن  $-f(x) = -\frac{1}{x} + 5x^2$
5. إذا كان  $x$  عددا حقيقيا غير منعدم حيث  $g(x) = \frac{1}{x}$  و  $f(x) = x + 2$  فإن  $f(x).g(x) = \frac{x+2}{x}$
6. إذا كان  $x$  عددا حقيقيا غير منعدم حيث  $g(x) = \frac{1}{x}$  و  $f(x) = x^2 + 1$  فإن  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{x}$
7. في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، التمثيل البياني للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^3 + 2$  هو صورة منحنى الدالة "مكعب" بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{j} - 2$ .
8. في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، التمثيل البياني للدالة  $g$  حيث  $g(x) = (x + 2)^3$  هو صورة منحنى الدالة "مكعب" بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{i} - 2$ .
9. الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x^3}$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة "مكعب"

2  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  
 $f(x) = x^3$

أحسب صورة كل عدد من الأعداد:  
 $-\sqrt{3}$  ؛  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  ؛  $0$  ؛  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ؛  $\sqrt{3}$  بالدالة  $f$ .

3  $f$  هي الدالة "مكعب".  
أكمل الجدول التالي:

|        |         |         |       |      |        |        |
|--------|---------|---------|-------|------|--------|--------|
| $x$    | $-10^3$ | $-10^2$ | $-10$ | $10$ | $10^2$ | $10^3$ |
| $f(x)$ |         |         |       |      |        |        |

4 أكمل الجمل التالية:

- إذا كان  $x > 2$  فإن  $x^3$  .....  
 إذا كان  $x < -3$  فإن  $x^3$  .....  
 إذا كان  $1 \leq x \leq 3$  فإن  $x^3$  .....  
 إذا كان  $-1 < x$  فإن  $x^3$  .....

5 عين حصرا للعدد  $x^3$  في كل حالة من الحالات التالية:  $x \in [-2; 1]$  ؛  $x \in [2; \sqrt{5}]$  ؛  $x \in [-3,5; 2,8]$  ؛  $x \in [-1; -\frac{1}{2}]$ .

- 6 1. عين أصغر عدد طبيعي  $n$  حيث:  
إذا كان  $x \geq n$  فإن  $x^3 \geq 10^6$ .  
2. عين أصغر عدد طبيعي  $n$  حيث:  
إذا كان  $x \geq n$  فإن  $x^3 \geq -10^9$ .



7  $f$  هي الدالة "مكعب".

(1) أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

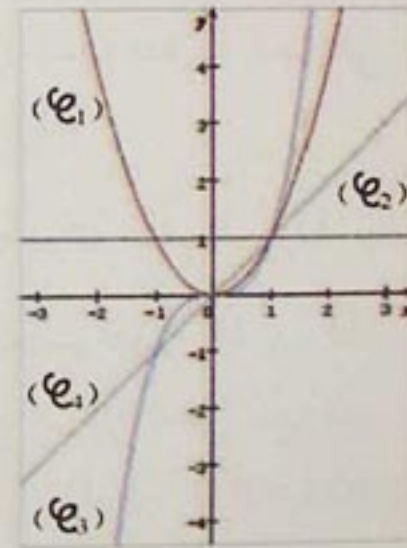
(2) حل بيانيا كل معادلة من المعادلات التالية:  $x^3 = 2$  ؛  $x^3 = -3$  ؛  $x^3 = 0$ .

8 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(وحدة الطول هي 1 cm)

$f$  ،  $g$  ،  $h$  ،  $t$  دوال معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 1$  ؛  $g(x) = x$  ؛  $h(x) = x^2$  ؛  $t(x) = x^3$ .

(1) لاحظ الشكل الموالي وأرفق بكل دالة المنحنى الممثل لها.



(2) استعمل المنحنيات  $(\mathcal{C}_1)$  ؛  $(\mathcal{C}_2)$  ؛

$(\mathcal{C}_3)$  و  $(\mathcal{C}_4)$  لترتيب الأعداد الحقيقية

$1$  ؛  $x$  ؛  $x^2$  ؛  $x^3$  في الحالتين التاليتين:

$x \in [0; 1]$  ؛  $x \in [1; +\infty[$ .

9  $f$  ،  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما

يلي:  $f(x) = x^3$  ؛  $g(x) = x^3 + 1$ .

$(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  المنحنيان الممثلان للدالتين

$f$  و  $g$  على الترتيب في مستوى منسوب

إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$  ؛  $\vec{j} \cdot \vec{j} = 2$

(1) باستعمال إتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  ؛

حدد إتجاه تغير الدالة  $g$ .

- انجز جدول تغيرات الدالة  $g$ .

(2) أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  في المعلم السابق.

(3) لتكن  $M(x; x^3)$  نقطة كيفية من المنحنى

$(\mathcal{C}_f)$  و  $M'(x; x^3 + 1)$  نقطة كيفية من

المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  ذات نفس الفاصلة  $x$ .

- أثبت أن  $\vec{MM}' = \vec{j}$ .

- بأي تحويل نقطي يُحوّل المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$

إلى المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  ؟

- ارسم المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  في المعلم السابق.

### العمليات على الدوال

10 عين صورة العدد الحقيقي  $x$  بكل دالة

من الدوال  $f+g$  ؛  $-g$  ؛  $f-g$  ؛  $f \cdot g$  ؛

$\frac{f}{g}$  ؛  $\frac{1}{g}$  في كل حالة مما يلي:

(1)  $f(x) = 3x - 2$  ؛  $g(x) = -x + 1$

(2)  $f(x) = x^2 - 2$  ؛  $g(x) = 2x + 3$

(3)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ؛  $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

(4)  $f(x) = x^2$  ؛  $g(x) = \frac{1}{x}$



11 - حدد مجموعة تعريف الدالة المحصل عليها في كل حالة.

11 أدرس إشارة الدالة  $f$  على المجموعة  $I$  في كل حالة مما يلي:

(1)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = 3x + \frac{1}{2}$

(2)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = -4x + 1$

(3)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = x^2 - 1$

(4)  $I = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x}$

12  $f, g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 + x - 2 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$

1. عين صورة العدد الحقيقي  $x$  بكل دالة من الدوال التالية:  $f+g \quad ; \quad -f \quad ; \quad f-g \quad ; \quad \frac{f}{g} \quad ; \quad \frac{1}{f} \quad ; \quad f \cdot g$

2. ماهي مجموعة تعريف كل من هذه الدوال؟

13 في الحالات من 1 إلى 6، عين الدالة  $gof$  المعرفة على  $I$  والمركبة من الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب.

(1)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = 5x - 1 \quad ; \quad f(x) = -2x + 3$

(2)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = 7x \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{7}$

(3)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = x + 1 \quad ; \quad f(x) = x^2$

(4)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = x^2 \quad ; \quad f(x) = 2x - 3$

(5)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{x-1}{2} \quad ; \quad f(x) = x^2 + 2$

(6)  $I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+3}{5}$

14 نفس سؤال التمرين رقم 13.

(1)  $I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = 4x + 5$

(2)  $I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2x+3}$

(3)  $I = ]-\infty; 0[ \quad ; \quad g(x) = -4x + 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{x}$

(4)  $I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad g(x) = x^2 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x}$

(5)  $I = ]-\infty; 0[ \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = x^2 + 3$

15  $f, g$  دالتان معرفتان كما يلي:

$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x+2}$

نضع  $h = gof$

(1) عين مجموعة التعريف  $D_h$  للدالة  $h$ .  
أحسب  $h(x)$ .

(2) لتكن  $t$  الدالة المعرفة كما يلي:

$t(x) = \frac{x+3}{3x+5}$

- عين مجموعة التعريف  $D_t$  للدالة  $t$ .

(3) قارن المجموعتين  $D_h$  و  $D_t$ .

- استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ينتمي إلى  $D_h \quad ; \quad h(x) = t(x)$ .

16  $f, g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$f(x) = 2x^2 - 1 \quad ; \quad g(x) = 4x^2 - 3x$

(1) أحسب  $(fog)(x)$  و  $(gof)(x)$

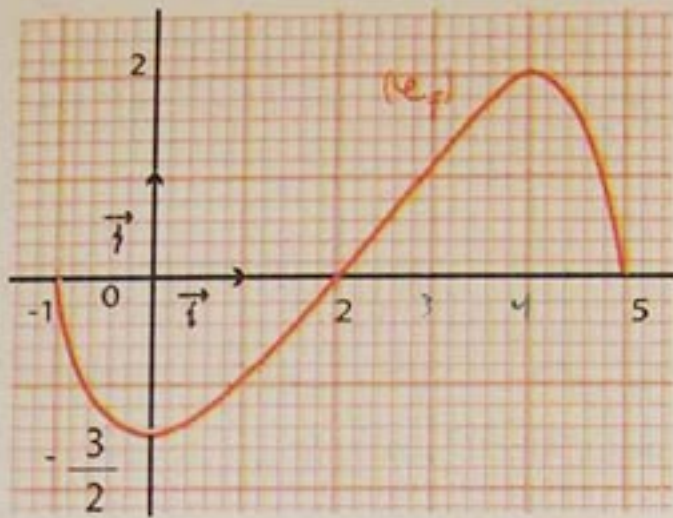
من أجل كل عدد حقيقي  $x$ .

(2) هل  $fog = gof$  ؟



**المنحنيات والتحويلات النقطية البسيطة**

**19** دالة معرفة على المجال  $[-1; 5]$  بتمثيلها البياني  $(\mathcal{C}_f)$  التالي. (الشكل).



(1) أعد رسم الشكل السابق.

(2)  $h$ ،  $g$  دالتان معرفتان كما يلي:

$$h(x) = f(x) + 2 \quad ; \quad g(x) = f(x + 2)$$

( $\mathcal{C}_h$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنيان الممثلتان لهما في المعلم السابق.

- باستعمال المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ )، أرسم المنحنيين ( $\mathcal{C}_h$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ).

- ماهو التحويل النقطي المطبق في كل حالة؟

(3) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين

$h$  و  $g$  ؟

**20** إليك المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ) الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل).

**17** بالإعتماد على الدالة "مربع" والدوال التآلفية، فكك كل دالة من الدوال التالية:

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = 3x^2 - 1 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = (2x - 1)^2 \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = x^2 + 4x + 4 \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = 9x^2 - 6x + 1 \quad (4)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = 2x^2 + 5x - 3 \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = -3x^2 + x + 2 \quad (6)$$

**18** بالإعتماد على الدوال المرجعية التالية:

$$x \mapsto \frac{1}{x} \quad ; \quad x \mapsto x^2$$

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad x \mapsto x^3 \quad \text{والدوال التآلفية،}$$

فكك كل دالة من الدوال التالية:

$$I = ]\frac{1}{3}; +\infty[ \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{3x - 1} \quad (1)$$

$$I = ]-\infty; -5[ \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 25} \quad (2)$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2 \quad (3)$$

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x^3 + 1} \quad (4)$$

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad h(x) = 2\sqrt{x} + 3 \quad (5)$$

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$



- انشئ في نفس المعلم السابق، المنحنى

$(\mathcal{C}_h)$  الممثل للدالة  $h$  المعرفة كما يلي:

$$h(x) = f(x) + 3$$

(3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

(4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين  $g$  و  $h$ ؟

**22**  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[0 ; 4]$

$$\text{كما يلي: } f(x) = \frac{1}{x}$$

(1) انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$(O ; \vec{i}, \vec{j})$$

(2) باستعمال المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، انشئ المنحنيين

$(\mathcal{C}_g)$  و  $(\mathcal{C}_h)$  الممثلين للدالتين  $g$  و  $h$

المعرفتين كما يلي:  $g(x) = f(x-4)$ ؛

$$h(x) = f(x) - 4$$

(3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في

كل حالة؟

(4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين

$g$  و  $h$ ؟

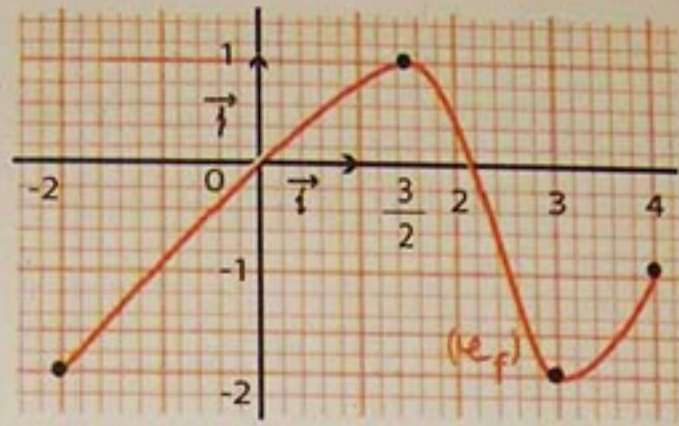
**23**  $f$  دالة معرفة على المجال  $[0 ; 5]$

$$\text{كما يلي: } f(x) = \sqrt{x}$$

(1) انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في

مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$(O ; \vec{i}, \vec{j})$$



(1) أعد رسم الشكل السابق.

(2) باستعمال المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، أرسم في المعلم

السابق المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  الممثل للدالة  $g$  المعرفة

كما يلي:  $g(x) = f(x-1)$ ، ثم المنحنى

$(\mathcal{C}_h)$  الممثل للدالة  $h$  المعرفة كما يلي:

$$h(x) = f(x) - 1$$

(3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في

كل حالة؟

(4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين

$g$  و  $h$ ؟

**21**  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال

$$[-2 ; 2] \text{ كما يلي: } f(x) = x^2$$

(1) انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في

مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$(O ; \vec{i}, \vec{j})$$

(2) باستعمال المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، انشئ المنحنى

$(\mathcal{C}_g)$  الممثل للدالة  $g$  المعرفة كما يلي:

$$g(x) = f(x+3)$$

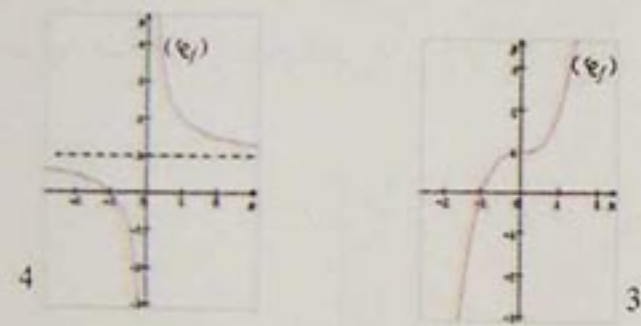
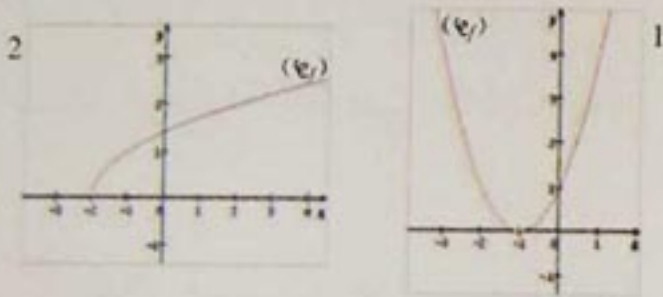


25 فيما يلي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

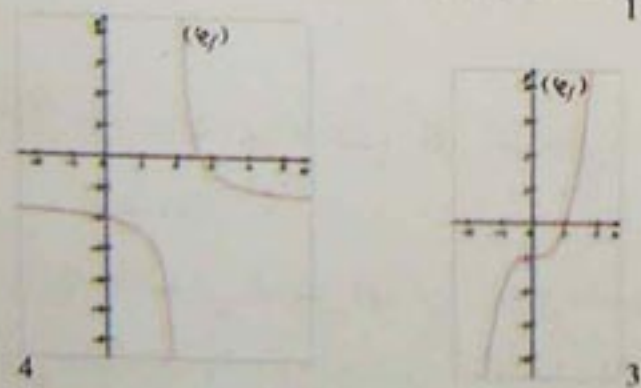
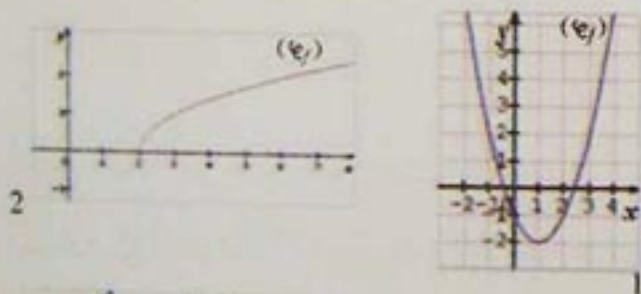
التمثيل البياني  $(\mathcal{C}_f)$  للدالة  $f$  يستنتج بواسطة إنسحاب من تمثيل بياني  $(\mathcal{C})$  للدالة من الدوال المرجعية  $x \mapsto x^2$  ؛  $x \mapsto \frac{1}{x}$

$x \mapsto \sqrt{x}$  ؛  $x \mapsto x^3$

- عين في كل حالة عبارة  $f(x)$  ثم حدد شعاع الإنسحاب.



26 نفس سؤال التمرين رقم 25.



(2) باستعمال المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  الممثل للدالة  $g$  المعرفة كما يلي:

$g(x) = f(x - 2)$ ، ثم انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_h)$  الممثل للدالة  $h$  المعرفة كما يلي:

$$h(x) = f(x) - 2$$

(3) بأي تحويل نقطي نتحصل على المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  انطلاقاً من المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ؟

نفس السؤال بالنسبة إلى المنحنى  $(\mathcal{C}_h)$ .

(4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين  $g$  و  $h$ ؟

24  $f$  دالة معرفة على المجال  $[-2; 2]$

كما يلي:  $f(x) = x^3$

(1) انشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة:  $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$  ؛

$\|\vec{j}\| = 0.5 \text{ cm}$ .)

(2) باستعمال المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ ، انشئ المنحنيين

$(\mathcal{C}_g)$  و  $(\mathcal{C}_h)$  الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب والمعرفتين كما يلي:

$$g(x) = f(x + 2) \quad ; \quad h(x) = f(x) + 2$$

(3) ماهو التحويل النقطي الذي طبقته في كل حالة؟

(4) ماهو مجال تعريف كل من الدالتين

$g$  و  $h$ ؟



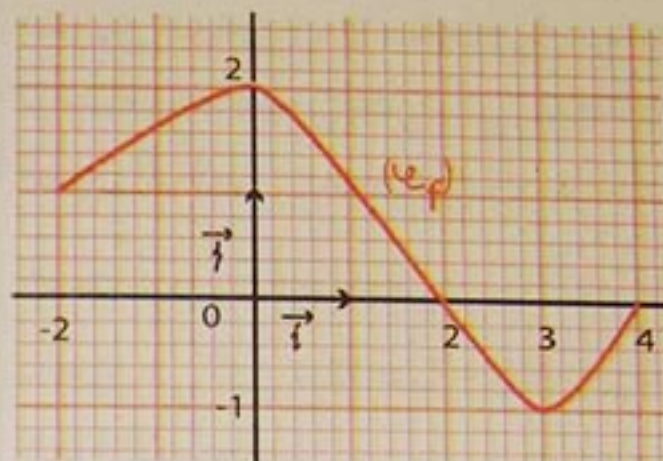
27 أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل لدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

28 أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  الممثل لدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

29 أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  الممثل لدالة  $g(x) = 0,5x^2$  في المعلم السابق.

30 أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$ .

27 إليك المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل لدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



أعد هذا الرسم ثم أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  للدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = 2f(x)$ .

30 1) دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \sqrt{x}$

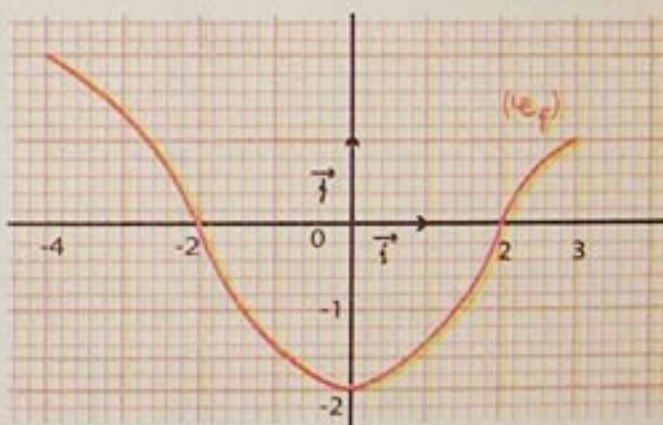
2) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

31 2) دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 0,5\sqrt{x}$

لها في المعلم السابق.

أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$ .

28 إليك المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل لدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



أعد هذا الرسم ثم أرسم المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  للدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ .

31 1) دالة معرفة على المجموعة  $[0; +\infty[ \cup ]-\infty; 0]$  كما يلي:

$f(x) = \frac{1}{x}$

2) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

2) دالتان معرفتان كما يلي:

$h(x) = -\frac{4}{x}$  ؛  $g(x) = \frac{2}{x}$

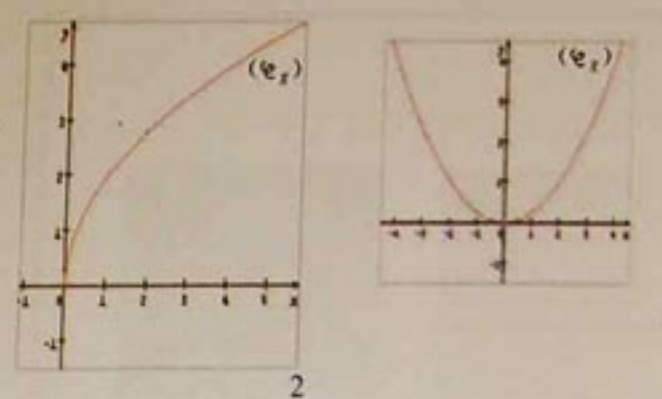
3) المنحنيان الممثلان للدالتين  $h$  و  $g$  في المعلم السابق.

أنشئ المنحنيين  $(\mathcal{C}_h)$  و  $(\mathcal{C}_g)$ .

29 1) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2$

2) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .





32 (1) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  
 $f(x) = x^3$

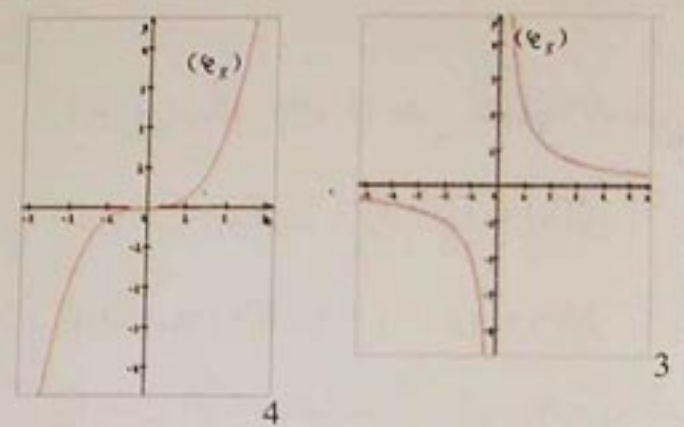
( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 - أنشئ المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ) في المعلم السابق.

(2) دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$h(x) = -2x^3$  ؛  $g(x) = 0,5x^3$

( $\mathcal{C}_h$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنيان الممثلان للدالتين  $h$  و  $g$  في المعلم السابق.

- انشئ المنحنيين ( $\mathcal{C}_h$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ).



33  $f$  هي دالة مرجعية من بين الدوال

التالية :  $x \mapsto x^2$  ؛  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ؛  
 $x \mapsto x^3$  ؛  $x \mapsto \sqrt{x}$

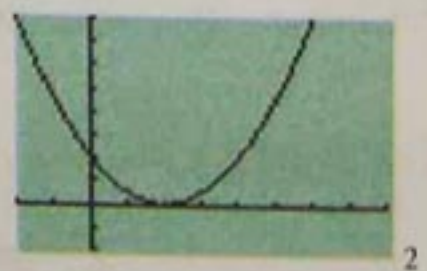
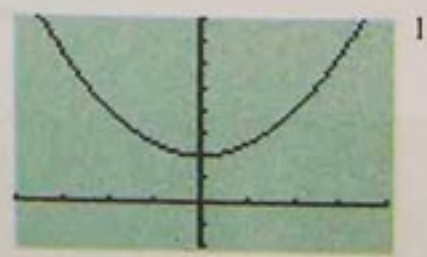
$g$  دالة معرفة كما يلي :

$g(x) = k.f(x)$  و ( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل).

- لاحظ كل شكل من الأشكال التالية ثم عين الدالة  $g$ .

- استنتج في كل حالة الدالة  $f$  و العدد الحقيقي  $k$ .

34 إليك منحنيات دوال معرفة على  $\mathbb{R}$ .



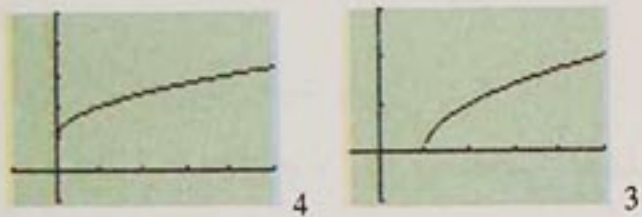
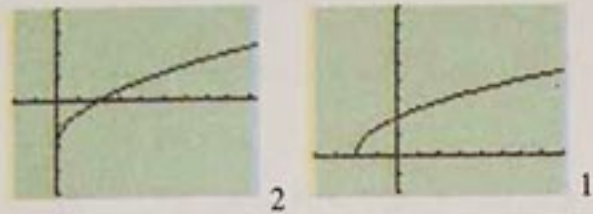


$$g(x) = \frac{1}{x+1} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$k(x) = \frac{1}{x-1} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x} + 1$$

(2) عين الإنسحاب الذي يحوّل التمثيل البياني (H) للدالة "مقلوب" إلى كل منحني من المنحنيات السابقة .

36 إليك تمثيلات بيانية لدوال معرفة على مجموعة E .

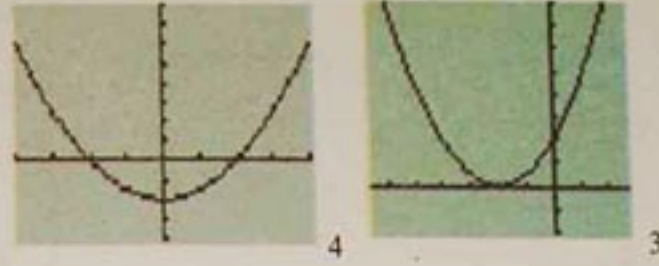


(1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

$$g(x) = \sqrt{x-1} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$k(x) = \sqrt{x} - 1 \quad ; \quad h(x) = 1 + \sqrt{x}$$

(2) عين الإنسحاب الذي يحوّل المنحني (ع) الممثل للدالة "الجذر التربيعي" إلى كل من التمثيلات البيانية السابقة .



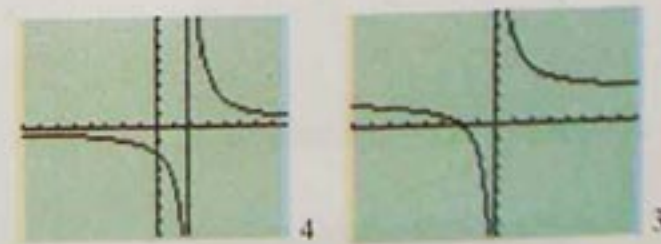
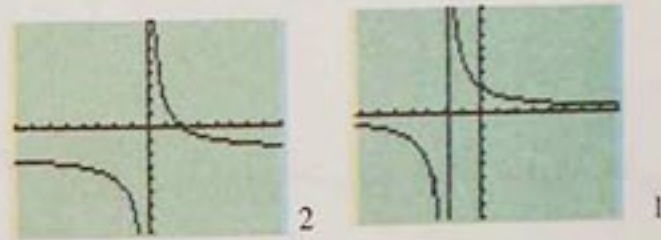
(1) أرفق بكل دالة مما يلي تمثيلها البياني .

$$g(x) = (x+1)^2 \quad ; \quad f(x) = x^2 - 1$$

$$k(x) = (x-1)^2 \quad ; \quad h(x) = x^2 + 1$$

(2) عين الإنسحاب الذي يحوّل التمثيل البياني (P) للدالة "مربع" إلى كل تمثيل من التمثيلات البيانية السابقة .

35 إليك تمثيلات بيانية لدوال معرفة على مجموعة E .



(1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

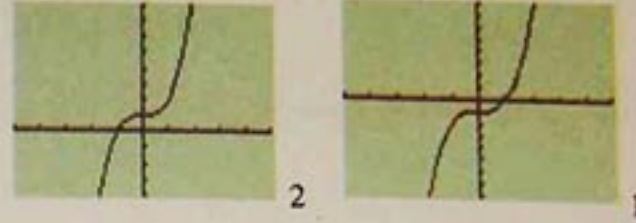


37 هذه منحنيات ممثلة لدوال معرفة على  $\mathbb{R}$  .

(1) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

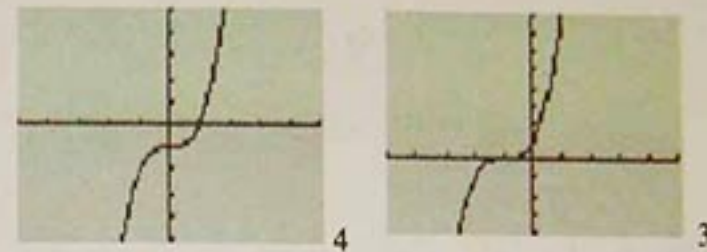
(2) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $x = 1$  هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .



39  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



(1) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛

$$f(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

(2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $x = \frac{2}{3}$  هو محور تناظر المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

40  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$$

( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين مجموعة التعريف D للدالة  $f$ .

(2) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2} \quad \text{من } D$$

(3) بين أن النقطة  $A(-2; 3)$  مركز تناظر المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

(1) أرفق بكل دالة من الدوال التالية، تمثيلها البياني .

$$g(x) = (x-1)^3 \quad ; \quad f(x) = (x+1)^3$$

$$k(x) = x^3 - 1 \quad ; \quad h(x) = x^3 + 1$$

(2) عين الإنسحاب الذي يحول المنحنى ( $\mathcal{C}$ ) الممثل للدالة "مكعب" إلى كل من المنحنيات السابقة .

### عناصر تناظر منحن

38  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



41  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{x-2}{3-x}$$

( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$ .

(2) عين العددين الحقيقيين  $a$ ،  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$ ؛

$$f(x) = b + \frac{a}{3-x}$$

(3) بين أن النقطة  $B(3; -1)$  مركز تناظر المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ).

42  $f$  دالة معرفة على المجموعة

$$]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[ \text{ كما يلي:}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

(1) عين العددين الحقيقيين  $a$ ،  $b$  حيث، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 2،

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2}$$

(2) أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

(3) ( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

– برهن أن النقطة  $A(2; 2)$  مركز تناظر المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ).

– انشئ المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ) في المعلم السابق.

(4) أدرس إشارة  $f(x)$  على المجموعة

$$]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

(5)  $g$  دالة معرفة على المجموعة

$$]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[ \text{ كما يلي:}$$

$$g(x) = |f(x)|$$

( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المعلم السابق.

– أشرح كيف نستنتج المنحنى ( $\mathcal{C}_g$ ) من المنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ).

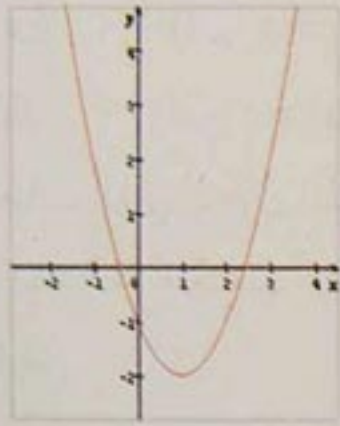
– انشئ المنحنى ( $\mathcal{C}_g$ ).

– انجز جدول تغيرات الدالة  $g$ .

43 المنحنى التالي هو التمثيل البياني

للدالة  $f$  المعرفة كما يلي:  $f(x) = x^2 - 2x - 1$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



(1) هذا المنحنى يسمح بتخمين محور تناظر له. ماهي معادلته؟

(2) أثبت صحة التخمين.

44 المنحنى التالي هو التمثيل البياني للدالة

$f$  المعرفة على المجموعة  $]-7; -1[ \cup ]-1; 7[$

كما يلي:  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



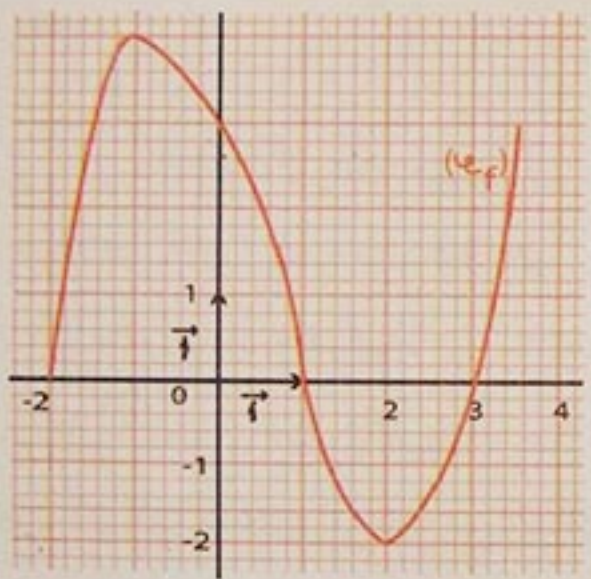
WINDOW  
Xmin=-6  
Xmax=6  
Xsc1=1  
Ymin=-6  
Ymax=6  
Ysc1=1  
Xres=1

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

- خَمِّن وجود محور تناظر للمنحنى.
- برهن صحة هذا التخمين.

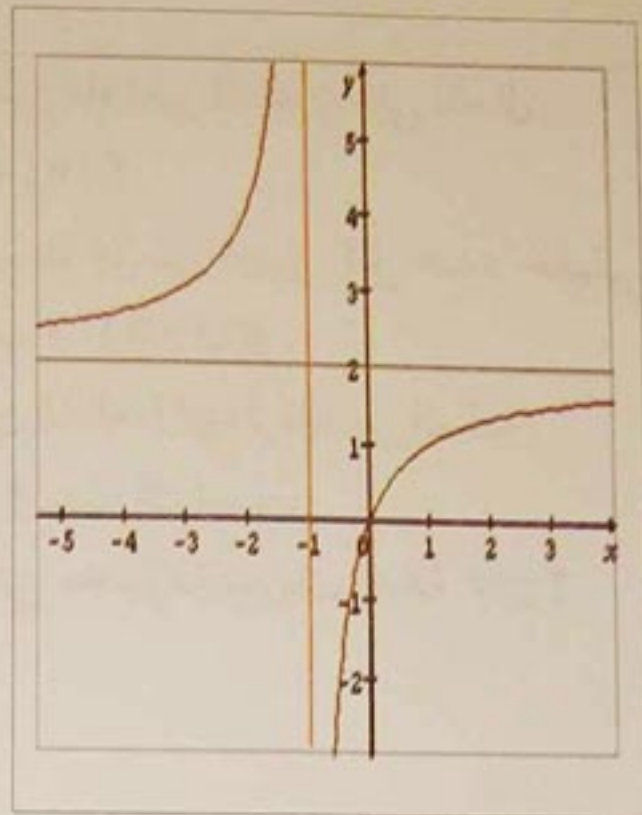
### مسائل

47 دالة معرفة على المجال  $[-2; \frac{7}{2}]$  و  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}, \vec{j}; O)$ . (الشكل).



استعمل المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  للإجابة على الأسئلة التالية.

1. ماهي صورة كل من الأعداد:  $-2$ ؛  $-1$ ؛  $2$ ؟
2. ماهي حلول المعادلة  $f(x) = 0$  في المجال  $[-2; \frac{7}{2}]$ ؟
3. ماهي مجموعة حلول المتراجحة  $f(x) \geq 0$  في المجال  $[-2; \frac{7}{2}]$ ؟



- 1) هذا المنحنى يسمح بتخمين وجود مركز تناظر له. ماهما إحداثياه؟
- 2) أثبت صحة التخمين.

45 أظهر على نافذة حاسبة بيانية المعلومات المقابلة.

WINDOW  
Xmin=-4  
Xmax=6  
Xsc1=1  
Ymin=-4  
Ymax=6  
Ysc1=1  
Xres=1

- أظهر المنحنى الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي:  
 $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$
- خَمِّن وجود مركز تناظر للمنحنى.
- برهن صحة هذا التخمين.

46 أظهر على نافذة حاسبة بيانية المعلومات المقابلة.

- أظهر المنحنى الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي:



- ماهو اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$  ؟  
 - أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  ؛  $g(x) \geq 0$  .  
 (3) عين الدالة  $g \circ f$  المركبة من الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب .  
 - ماهي مجموعة تعريف الدالة  $g \circ f$  ؟

(ب) نسمي سابقة عدد  $b$ ، كل عدد حقيقي  $a$  من مجال تعريف الدالة  $f$  حيث  $f(a) = b$  .  
 (1) ماهي سوابق العدد 0 ؟  
 (2) ماهو عدد سوابق العدد 3 ؟  
 أعط قيمة مضبوطة أو مقربة لكل منها.  
 - انجز نفس العمل بالنسبة إلى سوابق 4 ؟  
 (ج) هي الدالة المعرفة على المجال  $[-2; \frac{7}{2}]$  كما يلي :  $g(x) = |f(x)|$  .  
 ( $e_g$ ) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.  
 - أشرح كيفية رسم المنحنى ( $e_g$ ) ثم أرسمه.

48  $f$  ،  $g$  دالتان تآلفيتان حيث :

$$f(x) = ax + b ; g(x) = cx + d$$

$a, b, c, d$  أعداد حقيقية.

- (1) برهن أن الدالة  $f + g$  تآلفية.
- (2) أثبت أن الدالة  $g \circ f$  المركبة من الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب هي دالة تآلفية.
- (3) هل الدالة  $f \cdot g$  تآلفية ؟

49  $f$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = x^2 + 2x$$

(1) ماهو اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  ؟

- أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  ؛  $f(x) \geq 0$

(2)  $g$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :

$$g(x) = -1 + \sqrt{x+1}$$



# الباب 4 المعادلات والمترجمات من الدرجة الثانية

1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية
2. المعادلات من الدرجة الثانية
3. المترجمات من الدرجة الثانية
4. حلّ، بيانيا، معادلات ومترجمات من الدرجة الثانية

## الخوارزمي (850-788)

ولد أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي في خوارزم بأوزباكستان، وعاش في بغداد في عصر الخليفة المأمون وتوفي فيها. اشتهر الخوارزمي بكتابه " الجبر والمقابلة " الذي ألفه بطلب من الخليفة المأمون وبتشجيع منه، ويعالج الكتاب، كما يقول الخوارزمي، " ... ما يلزم الناس من الحاجة إليه في مواريتهم ووصاياهم وفي مقاسماتهم وأحكامهم وتجاريتهم وفي جميع ما يتعاملون به من مساحة الأرضين وكري الأنهار والهندسة ... ". وقد وجد الخوارزمي أنّ " الأعداد التي يحتاج إليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب لا إلى جذر ولا إلى مال ". وصنّف المعادلات في ستة أنواع هي " ...أموال تعدل جذورا، أو أموال تعدل عددا، أو جذور تعدل عددا، أو أموال وجذور تعدل عددا، أو أموال وعدد تعدل جذورا، أو جذور وعدد تعدل أموالا". وبالترميز الحالي، تكتب هذه الضروب على الترتيب كما يلي:



$$\begin{array}{l} ax = b \quad ; \quad ax^2 = b \quad ; \quad ax^2 = bx \\ bx + c = ax^2 \quad ; \quad ax^2 + c = bx \quad ; \quad ax^2 + bx = c \end{array}$$

الجذر هو ما نشير إليه حاليا بالرمز  $x$ ، والمال بالرمز  $x^2$  و  $a, b, c$  أعداد. ويقدم الخوارزمي كيفية حلّ الأجناس الثلاثة الأخيرة

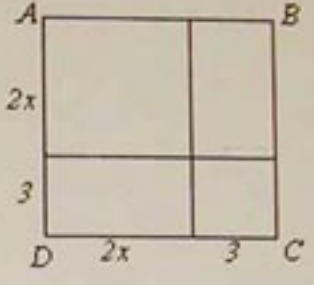
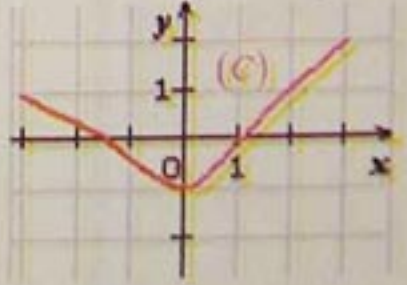
"مثل قولك مال وعشرة أجزاره يعدل تسعة وثلاثين درهما " وهي المعادلة  $x^2 + 10x = 39$ .

يقدم مراحل حلها خطوة بخطوة (الترميز غير موجود آنذاك) ويجد الحلّ (الموجب) وهو 3، ويبرّر الحلّ التحليلي بالإنشاءات الهندسية.



## استبيان متعدد الإجابات

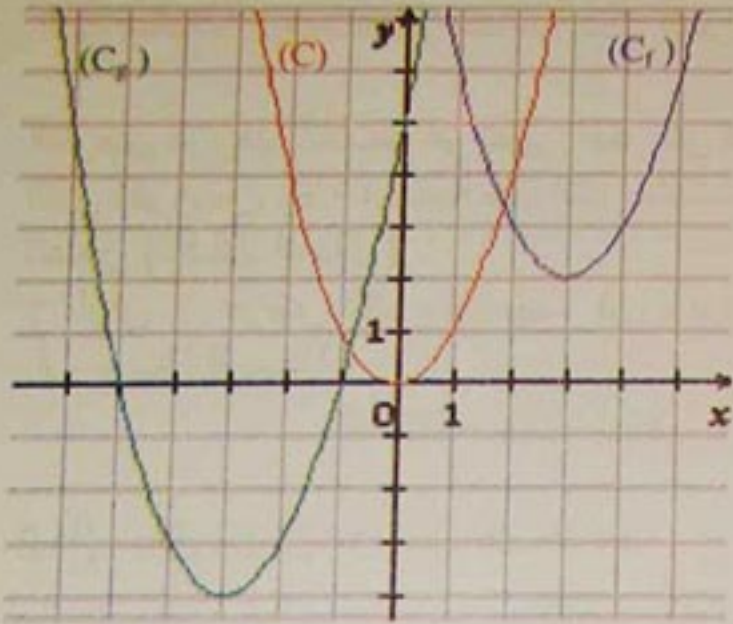
اختر الإجابة الصحيحة.

| السؤال   | إجابة 1      | إجابة 2                          | إجابة 3                        |
|--|--------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 1. مساحة المربع $ABCD$ هي:<br>  | $4x+6$       | $4x^2+9$                         | $4x^2+12x+9$                   |
| 2. $x$ عدد حقيقي.<br>الشكل المبسط والمرتب للعبارة<br>$5x(4x-3)-x^2$ هو:  | $4x^2$       | $19x^2-15x$                      | $20x^2-15x-x^2$                |
| 3. $x$ عدد حقيقي.<br>الشكل المحلل للعبارة هو:  | $(2x+7)^2$   | $(2x-7)^2$                       | $(2x-7)(2x+7)$                 |
| $4x^2-28x+49$ في معلم متعامد<br>ومتجانس، التمثيل البياني للدالة $f$<br>المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2$ هو:   | قطع مكافئ    | مستقيم                           | قطع زائد                       |
| 5. للمعادلة $x^2=9$  | حل واحد هو 3 | حل واحد هو -3                    | حلان هما 3، -3                 |
| 6. العدد $\frac{1}{2}$ حل للمترابحة  | $x-2 \geq 0$ | $(x+1)(x-2) > 0$                 | $3x+1 > -x+2$                  |
| 7. $(C)$ هو التمثيل البياني لدالة $f$<br>معرفة على المجال $[-3; 3]$ .<br> | $\{-1\}$     | $\left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$ | $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ |
| مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي:  |              |                                  |                                |



★ نشاط 1

صورة قطع مكافئ بانسحاب



في الشكل المقابل، (C) هو القطع المكافئ الممثل للدالة "مربع". (C<sub>f</sub>) و (C<sub>g</sub>) القطعان المكافئان الممثلان لدالتين ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f و g على الترتيب، حيث كل منهما هو صورة (C) بانسحاب.

1. عيّن الانسحاب الذي يسمح بالمرور من (C) إلى (C<sub>f</sub>) ومن (C) إلى (C<sub>g</sub>).
2. عيّن دستور كل من الدالتين f و g المرفقتين بالدالة "مربع".

★ نشاط 2

دراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية f المعرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5)$ .

■ دراسة اتجاه تغير f.

1. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f على كل من المجالين  $]-\infty; -3]$  و  $]-3; +\infty[$ .
2. أنقل جدول التغيرات الآتي ثم أكمله.

|      |           |    |           |
|------|-----------|----|-----------|
| x    | $-\infty$ | -3 | $+\infty$ |
| f(x) |           |    |           |

تحقق من أن f تقبل قيمة صغرى عند -3. يطلب تحديدها.

■ رسم المنحني الممثل للدالة f.

نسمي (P) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  للمستوي.

1. ليكن S ذروة (P). كيف يكون المماس للمنحني (P) عند S ؟
2. عيّن نقط تقاطع (P) مع المحورين الاحداثيين.
3. ارسم (P). ما هي جهة انفرجه ؟ اربط ذلك بإشارة معامل  $x^2$  في عبارة f(x).
4. تحقق أن (P) يقبل محور تناظر.

■ حل، بيانيا، معادلات أو متراجحات

1. باتتباع نفس الخطوات السابقة، ارسم المنحني الممثل للدالة g المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

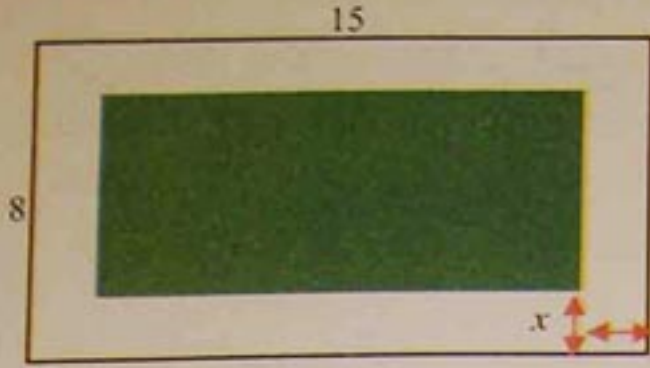
$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

2. حل بيانيا المعادلة  $g(x) = 0$  ثم المتراجحة  $g(x) \geq 0$ .



## نشاط 3

### حل مشكلة باستخدام معادلة من الدرجة الثانية



الغرض من هذا النشاط هو تعيين العرض الثابت للشريط الذي تكون من أجله مساحة هذا الشريط مساوية لمساحة المستطيل الملون (الشكل المقابل).

1. ليكن  $x$  عرض الشريط بحيث  $0 < x < 4$ ، تحقق من أن  $x$  حل للمعادلة:

$$2x^2 - 23x + 30 = 0$$

2. أ) تحقق من أن من أجل كل عدد  $x$ ،

$$2x^2 - 23x + 30 = 2 \left( x - \frac{23}{4} \right)^2 - \frac{289}{8}$$

ب) حل المعادلة  $2x^2 - 23x + 30 = 0$ . ماذا تستخلص؟

## نشاط 4

### الصيغ المختلفة لثلاثي الحدود

$P(x)$  ثلاثي حدود حيث:  $P(x) = (x+2)^2 - 36$ .

1. تحقق من أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$P(x) = (x+8)(x-4) \quad (\text{ب})$$

$$P(x) = x^2 + 4x - 32 \quad (\text{أ})$$

2. باختيار الصيغة الأنسب لثلاثي الحدود  $P(x)$ ، حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$P(x) = -32$$

$$P(x) = 13$$

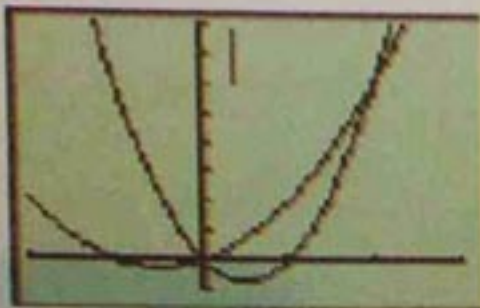
$$P(x) = 0$$

## نشاط 5: التحقق من حل معادلة بحاسبة بيانية

حل المعادلة  $3x^2 - 3x = x(x+1)$  في  $\mathbb{R}$ ، اقترح تلميذ الحل المقابل.

1. صحح إجابة التلميذ وفسر أخطائه.

$3(x-1) = x+1$  تكافئ  $3x^2 - 3x = x(x+1)$   
منه  $3x - x = 3 + 1$  وبالتالي  $x = 2$ .  
المعادلة تقبل حلا واحدا هو العدد الحقيقي 2.



2. للتحقق من النتيجة، استعمل التلميذ الحاسبة البيانية فتحصل على الشاشة المقابلة.

فسر النتائج المحصل عليها على الشاشة، ثم أعد حل المعادلة.



## 1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

### • الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

#### تعريف

نسمي دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية كل دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية و  $a \neq 0$

نسمي أيضا العبارة  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (مع  $a \neq 0$ ) ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

#### أمثلة

- كل من الدوال  $f: x \mapsto x^2$  ؛  $g: x \mapsto (x-1)(x+1)$  ؛  $h: x \mapsto x(x-2)$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  هي دوال ثلاثيات الحدود من الدرجة الثانية.
- الدالة  $k: x \mapsto (x-1)(x+1) - x^2$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ليست دالة ثلاثي الحدود (عند النشر والتبسيط، نحصل على  $k(x) = -1$ ).

### • الشكل النموذجي لثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

#### مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  مع  $a \neq 0$ .

نسمي الكتابة  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  الشكل النموذجي لثلاثي الحدود.

#### برهان

بما أن  $a \neq 0$ ، يمكن أن نكتب:  $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ .

نلاحظ أن  $x^2 + \frac{b}{a}x$  يظهر عند نشر العبارة  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  ومنه

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



# معارف

ملاحظة

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ نكتب } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ و } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ بوضع}$$

أمثلة

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4 \quad \blacksquare$$

$$-2x^2 - 4x + 5 = -2\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) = -2\left[(x + 1)^2 - 1 - \frac{5}{2}\right] = -2(x + 1)^2 + 7 \quad \blacksquare$$

تعريف

نسَمي مميز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية  $ax^2 + bx + c$  العدد الحقيقي  $\Delta$  حيث:  $\Delta = b^2 - 4ac$

• التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

مبرهنة

في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  للمستوي، التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية  $f$  حيث  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (مع  $a \neq 0$ ) هو **قطع مكافئ**، ذروته النقطة  $S$  ذات الإحداثيين

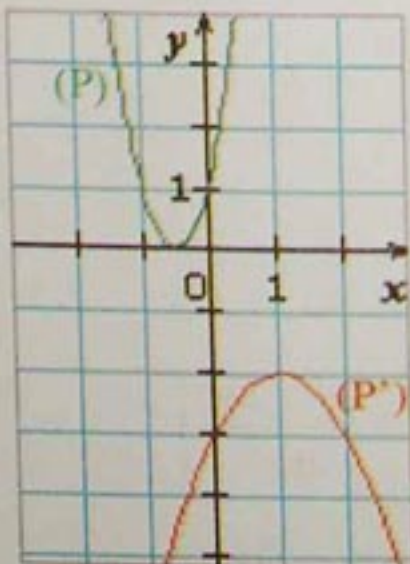
$$\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \text{ ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته هي: } x = -\frac{b}{2a}$$

جهة انفرج القطع المكافئ تتعلق بإشارة  $a$ :

- إذا كان  $a > 0$  فيكون القطع المكافئ منفرجا نحو الأعلى.
- إذا كان  $a < 0$  فيكون القطع المكافئ منفرجا نحو الأسفل.

★ ملاحظة

نحصل على القطع المكافئ الممثل للدالة  $f$  المعرفة بـ:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مع  $a \neq 0$  انطلاقا من القطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2$  بانسحاب شعاعه  $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ .



أمثلة

• التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = 4x^2 + 4x + 1 \text{ هو القطع المكافئ } (P) \text{ الذي ذروته } S\left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

وبما أن  $a$  موجب، فإن  $(P)$  منفرج نحو الأعلى.

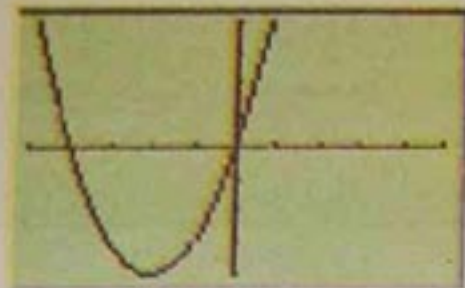
• التمثيل البياني للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 2x - 3 \text{ هو القطع المكافئ } (P') \text{ الذي ذروته } S'(1; -2).$$

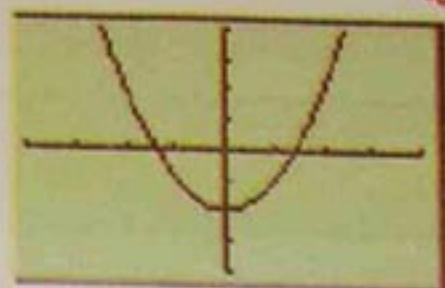
وبما أن  $a$  سالب، فإن  $(P')$  منفرج نحو الأسفل.



## حالات خاصة



- إذا كان  $a \neq 0$  و  $c = 0$ ، فيمكن دائما تحليل  $ax^2 + bx = x(ax + b)$  بحيث  $ax^2 + bx$  القطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2 + bx$  يشمل المبدأ.



- إذا كان  $a \neq 0$  و  $b = 0$ ، فإن ذروة القطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2 + c$  هي  $S(0; c)$ .

## • تغيرات دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

- دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية حيث  $f(x) = ax^2 + bx + c$  الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = 2ax + b$  تبعا لإشارة  $a$ ، نحصل على تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

مبرهنة

- إذا كان  $a > 0$ ، فإن  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$  و متزايدة على المجال  $]-\frac{b}{2a}; +\infty[$ .
- إذا كان  $a < 0$ ، فإن  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$  و متناقصة على المجال  $]-\frac{b}{2a}; +\infty[$ .

يمكن تلخيص النتائج السابقة كما يلي:

| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $f(x)$ |           | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |           |

$a < 0$  ■

| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$               | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $f(x)$ |           | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |           |

$a > 0$  ■

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  هي قيمة حدية للدالة  $f$  عند العدد  $-\frac{b}{2a}$ .

أمثلة

- الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  
 $g(x) = -x^2 + 8x - 12$   
نتحقق من أن  $g$  متزايدة على المجال  $]-\infty; 4]$  و متناقصة على المجال  $[4; +\infty[$ .

- الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  
 $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$   
نتحقق من أن  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; \frac{1}{3}]$  و متزايدة على المجال  $[\frac{1}{3}; +\infty[$ .



### تعريف

المعادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول  $x$ ، هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية مع  $a \neq 0$ .

### مبرهنة

$ax^2 + bx + c = 0$  (مع  $a \neq 0$ ) معادلة من الدرجة الثانية، مميّزها  $\Delta$  بحيث  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

▪ إذا كان  $\Delta < 0$  فإن المعادلة لا تقبل حلوًا ولا يمكن تحليل ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$ .

▪ إذا كان  $\Delta = 0$  فإن المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً هو:  $-\frac{b}{2a}$ .

ويكون من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

▪ إذا كان  $\Delta > 0$  فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$  بحيث:

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ويكون من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

### برهان

بفرض المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  (مع  $a \neq 0$ ).

هذه المعادلة تكتب أيضا على الشكل:  $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$

بوضع  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، نكتب:  $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$

بما أن  $a \neq 0$  فإن  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

▪ إذا كان  $\Delta < 0$  فإن  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$  موجب تماما وبالتالي لا يمكن أن يكون معدوماً.

فالمعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  لا تقبل حلوًا في  $\mathbb{R}$ .

▪ إذا كان  $\Delta = 0$  فإن المعادلة  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$  تصبح  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

$$\text{ومنّه } x = -\frac{b}{2a}$$

فالمعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  تقبل حلاً مضاعفاً في  $\mathbb{R}$  هو  $-\frac{b}{2a}$ .



▪ إذا كان  $\Delta > 0$  فإن المعادلة  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$  تكتب على الشكل  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$

الطرف الأول للمعادلة هو فرق مربعين، فنكتب:

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ومنهُ  $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$  أو  $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$  أي:  $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  أو  $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

فالمعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{R}$  هما:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

## ملاحظة

عندما يكون المعاملان  $a$  و  $c$  من إشارتين مختلفتين، يمكن أن نصرّح، دون حساب المميز، أنّ المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  (مع  $a \neq 0$ ) تقبل حلين مختلفين.

في هذه الحالة، يكون العدد  $ac$  سالبا تماما وبالتالي يكون  $(ac) -$  موجبا تماما ونستنتج أنّ  $\Delta = b^2 - 4ac$  موجب تماما.

## أمثلة

لنحلّ في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$(1) \quad 4x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (2) \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (3) \quad -x^2 + 4x + 5 = 0$$

▪ في المعادلة (1)، لدينا  $\Delta = -7$ .  
 $\Delta < 0$ . فالمعادلة ليس لها حلول.

▪ في المعادلة (2)، لدينا  $\Delta = 0$ .  
 $\Delta = 0$ . فالمعادلة تقبل حلا مضاعفاً هو  $\frac{1}{3}$ .

▪ في المعادلة (3)، لدينا  $\Delta = 36$ .  
 $\Delta > 0$ . فالمعادلة تقبل حلين مختلفين هما:  $x_1 = 5$  و  $x_2 = -1$ .

## ملاحظة

حلّ المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  (مع  $a \neq 0$ ) يسمّى أيضا **جذر** ثلاثي الحدود  $ax^2 + bx + c$ .

## مثال

بفرض  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

الأعداد الحقيقية  $-1$  و  $1$  و  $2$  هي جذور  $P(x)$  وهي أيضا حلول المعادلة  $P(x) = 0$ .



## 3. المتراجحات من الدرجة الثانية

مبرهنة

$ax^2+bx+c$  ثلاثي حدود من الدرجة الثانية،  $\Delta$  مميزه.  
 ■ إذا كان  $\Delta < 0$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ، إشارة  $ax^2+bx+c$  من إشارة  $a$ .  
 ■ إذا كان  $\Delta = 0$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{b}{2a}$  فإن إشارة  $ax^2+bx+c$  من إشارة  $a$ .  
 ■ إذا كان  $\Delta > 0$  فإن إشارة  $ax^2+bx+c$  من إشارة  $a$  من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$  ومن إشارة  $(-a)$  من أجل كل  $x$  من  $[x_1; x_2]$ ، حيث  $x_1$  و  $x_2$  جذرا  $ax^2+bx+c$  و  $x_1 < x_2$ .

برهان

■  $\Delta < 0$

$$\text{لدينا } ax^2+bx+c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\text{بما أن } -\Delta > 0 \text{ فإن } \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

إذن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ، تكون إشارة  $ax^2+bx+c$  من إشارة  $a$ .

■  $\Delta = 0$

$$\text{لدينا } ax^2+bx+c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

وبما أن المربع  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  يكون موجبا أو منعدما.

إذن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ ، إشارة  $ax^2+bx+c$  من إشارة  $a$ .

■  $\Delta > 0$

لدينا

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a \left( x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

بفرض  $x_1 < x_2$ ، نجد:

| $x$               | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$        | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|-------|--------------|-----------|
| $x-x_1$           | -         | 0     | +            | +         |
| $x-x_2$           | -         | -     | 0            | +         |
| $(x-x_1)(x-x_2)$  | +         | 0     | -            | +         |
| $a(x-x_1)(x-x_2)$ | إشارة $a$ | 0     | إشارة $(-a)$ | إشارة $a$ |



# معارف

يمكن تلخيص النتائج السابقة كما يلي:

$\Delta = 0$  •

|             |           |       |           |
|-------------|-----------|-------|-----------|
| $x$         | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
| $ax^2+bx+c$ | إشارة $a$ |       | إشارة $a$ |

$\Delta < 0$  •

|             |           |           |
|-------------|-----------|-----------|
| $x$         | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $ax^2+bx+c$ | إشارة $a$ |           |

$\Delta > 0$  •

|             |           |              |           |           |
|-------------|-----------|--------------|-----------|-----------|
| $x$         | $-\infty$ | $x_1$        | $x_2$     | $+\infty$ |
| $ax^2+bx+c$ | إشارة $a$ | إشارة $(-a)$ | إشارة $a$ | إشارة $a$ |

**مثال**

$P(x)$  ثلاثي حدود من الدرجة الثانية حيث  $P(x) = -2x^2 + 3x - 1$

لدينا  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 9 - 8 = 1$

$P(x)$  يقبل جذرين مختلفين هما:  $x_1 = \frac{1}{2}$  و  $x_2 = 1$

وبما أن  $a < 0$ ، فإن إشارة  $P(x)$  تكون كما في الجدول:

|        |           |               |     |           |   |
|--------|-----------|---------------|-----|-----------|---|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |   |
| $P(x)$ | -         | 0             | +   | 0         | - |

**تعريف**

نسمى متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول  $x$ ، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c < 0$  ؛  $ax^2+bx+c \leq 0$  ؛  $ax^2+bx+c > 0$  ؛  $ax^2+bx+c \geq 0$   
حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية مع  $a \neq 0$ .

**ملاحظة**

حل متراجحة من الدرجة الثانية، ذات المجهول  $x$ ، يؤول إلى دراسة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.



مثال

لنحلّ في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $3x^2 - 5x + 2 \geq 0$ .

من أجل  $3x^2 - 5x + 2$ ، لدينا  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$

بما أن  $\Delta > 0$  إذن  $3x^2 - 5x + 2$  يقبل جذرين هما:  $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$  و  $x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} = 1$

ومنه إشارة  $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$  كما في الجدول:

|        |           |               |     |           |     |
|--------|-----------|---------------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $P(x)$ | $+$       | $0$           | $-$ | $0$       | $+$ |

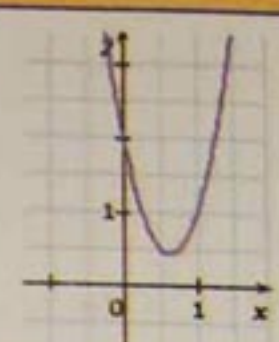
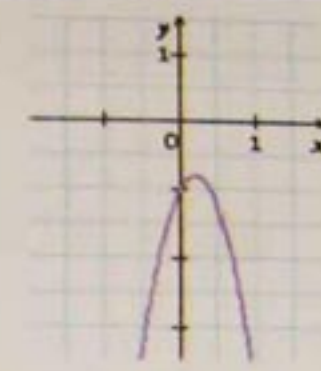
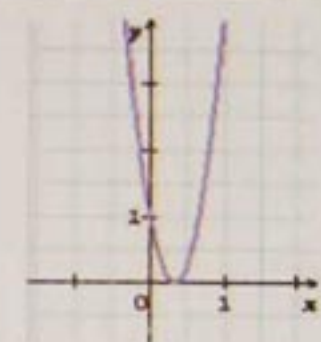
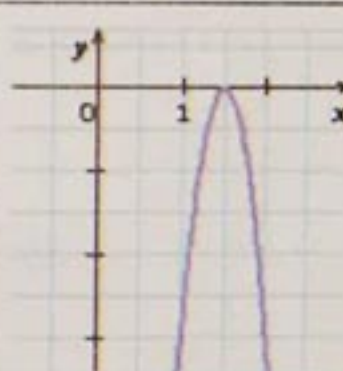
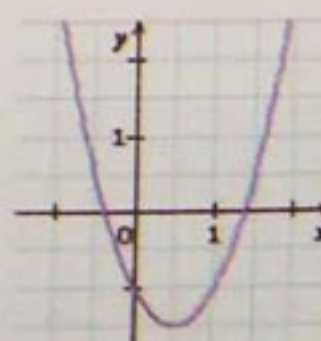
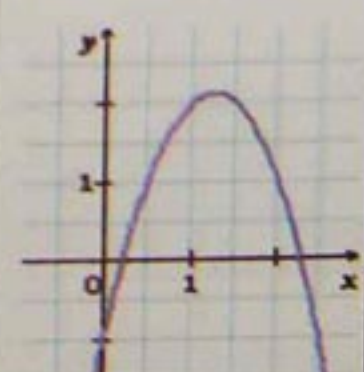
ونستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة هي:  $]-\infty; \frac{2}{3}] \cup [1; +\infty[$ .

#### 4. حلّ معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية بيانياً

لحلّ معادلة (أو متراجحة) من الدرجة الثانية، بيانياً، نعتمد على القطع المكافئ الممثل للدالة ثلاثي الحدود.

بفرض  $P(x) = ax^2 + bx + c$  مع  $a \neq 0$  ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية و  $\Delta$  مميزه. يمكن تلخيص الدراسة السابقة في الجدول التالي:



| نتائج   | الوضع النسبي   | القطع المكافئ (P)   | إشارة a | إشارة Δ      |
|---|--|---|---------|--------------|
| لا توجد جذور،<br>ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ،<br>$P(x) > 0$   | القطع المكافئ (P)<br>يقع فوق محور<br>الفواصل.  |    | $a > 0$ | $\Delta < 0$ |
| لا توجد جذور،<br>ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ،<br>$P(x) < 0$   | القطع المكافئ (P)<br>يقع تحت محور<br>الفواصل.  |   | $a < 0$ |              |
| يوجد جذر مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ،<br>ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{x_0\}$ ،<br>$P(x) > 0$  | القطع المكافئ (P)<br>يقع فوق محور<br>الفواصل ويمسه في<br>النقطة ذات الفاصلة<br>$x_0$ .               |  | $a > 0$ | $\Delta = 0$ |
| يوجد جذر مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ،<br>ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{x_0\}$ ،<br>$P(x) < 0$  | القطع المكافئ (P)<br>يقع تحت محور<br>الفواصل ويمسه في<br>النقطة ذات الفاصلة<br>$x_0$ .               |  | $a < 0$ |              |
| يوجد جذران مختلفان $x_1$ و $x_2$ ،<br>ومن أجل كل $x$ من<br>$]-\infty; x_1[ \cup ]x_2; +\infty[$ ،<br>$P(x) > 0$<br>ومن أجل كل $x$ من $]x_1; x_2[$ ،<br>$P(x) < 0$ | القطع المكافئ (P)<br>منفرج نحو الأعلى<br>ويقطع محور<br>الفواصل في نقطتين<br>فاصلتهما $x_1$ و $x_2$ . |  | $a > 0$ | $\Delta > 0$ |
| يوجد جذران مختلفان $x_1$ و $x_2$ ،<br>ومن أجل كل $x$ من<br>$]-\infty; x_1[ \cup ]x_2; +\infty[$ ،<br>$P(x) < 0$<br>ومن أجل كل $x$ من $]x_1; x_2[$ ،<br>$P(x) > 0$ | القطع المكافئ (P)<br>منفرج نحو الأسفل<br>ويقطع محور<br>الفواصل في نقطتين<br>فاصلتهما $x_1$ و $x_2$ . |  | $a < 0$ |              |



1. كتابة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية على الشكل النموذجي

طريقة

لكتابة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية  $P(x)$  حيث  $P(x) = ax^2 + bx + c$  (مع  $a \neq 0$ ) على الشكل النموذجي:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{نحسب}$$

$$\beta = P(\alpha) \quad \text{نعوض } x \text{ بالقيمة الناتجة في عبارة } P(x) \text{ للحصول على } b \text{ حيث}$$

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{نستخلص:}$$

تمرين

أكتب كلا من ثلاثي الحدود التاليين على الشكل النموذجي:

$$Q(x) = -x^2 + 2x + 15 \quad ; \quad P(x) = x^2 - 2x - 48$$

حل

$$\text{من أجل } P(x), \text{ لدينا } a = 1 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = -48.$$

$$\text{ونجد: } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \times 1} = 1$$

$$\beta = P(1) = (1)^2 - 2 \times 1 - 48 = -49$$

$$\text{منه فالشكل النموذجي لـ } P(x) \text{ هو: } P(x) = (x - 1)^2 - 49$$

$$\text{من أجل } Q(x), \text{ لدينا } a = -1 \text{ و } b = 2 \text{ و } c = 15.$$

$$\text{ونجد: } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$$

$$\beta = Q(1) = -(1)^2 + 2 \times 1 + 15 = 16$$

$$\text{منه فالشكل النموذجي لـ } Q(x) \text{ هو: } Q(x) = -(x - 1)^2 + 16$$

2. دراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

طريقة

لدراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية  $f$  حيث  $f(x) = ax^2 + bx + c$  على  $\mathbb{R}$ ، نتبع الخطوات التالية:

■ نتمعّن في  $a$  معامل  $x^2$ ، لاستنتاج اتجاه التغيرات وشكل القطع المكافئ (P):

- إذا كان  $a > 0$  يكون (P) منفرجا نحو الأعلى.

- إذا كان  $a < 0$  يكون (P) منفرجا نحو الأسفل.

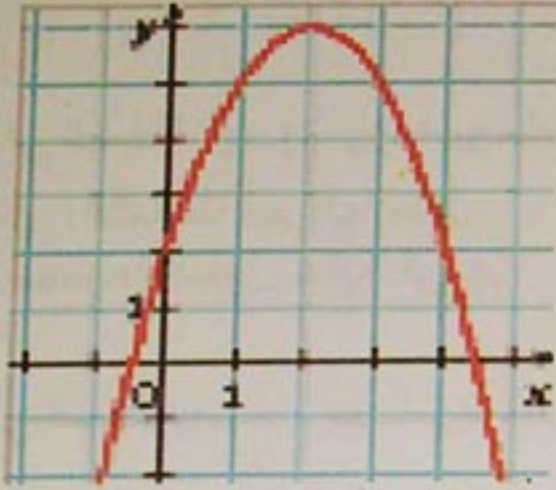
■ نحسب  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ، وهي قيمة  $x$  التي تغيّر عندها الدالة اتجاهها.

■ نعيّن إحداثيي الذروة S وهما  $(\alpha; f(\alpha))$ .



تمرين

أدرس تغيرات الدالة  $f(x) = -x^2 + 4x + 2$  حيث  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ثم ارسم تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.



حل

لدينا  $a = -1$  و  $(a < 0)$  و  $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$

يكون جدول تغيرات  $f$  كما يلي:

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $6$ |           |

$f(2) = -(2)^2 + 4 \times 2 + 2 = 6$

يكون انفرج (P) نحو الأسفل.

الذروة هي:  $S(2; 6)$ .

لرسم القطع المكافئ (P)، نستعين ببعض النقاط أو نستعمل حاسبة بيانية.

3. حلّ معادلة من الدرجة الثانية

طريقة

لحلّ معادلة من الشكل  $ax^2 + bx + c = 0$  (مع  $a \neq 0$ )، نختار إحدى الطريقتين التاليتين:

- نحلل، إن أمكن، الطرف الأول للمعادلة.
- نستعمل المميز.

تمرين

حلّ في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية:

(هـ)  $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

(ج)  $3x^2 - 2x + 1 = 0$

(أ)  $5x^2 + x = 0$

(د)  $6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$

(ب)  $x^2 - 10x + 25 = 0$

حل

(أ) المعادلة  $5x^2 + x = 0$  تكافئ  $x(5x + 1) = 0$ .

وبما أن جداء عددين حقيقيين يكون منعدماً إذا وفقط إذا كان أحد العاملين على الأقل منعدماً، إذن:

$x(5x + 1) = 0$  تكافئ  $x = 0$  أو  $5x + 1 = 0$ .

أي أن  $x = 0$  أو  $x = -\frac{1}{5}$ .

إذن مجموعة الحلول هي  $\left\{-\frac{1}{5}; 0\right\}$ .



(ب) المعادلة  $x^2 - 10x + 25 = 0$  تكافئ  $(x-5)^2 = 0$  (لأن  $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$ ).  
أي  $x = 5$ .

إن مجموعة الحلول هي  $\{5\}$ .

(ج) في المعادلة  $3x^2 - 2x + 1 = 0$  لدينا  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8$ ،  
 $\Delta < 0$ ، فالمعادلة ليس لها حلول.  
إن مجموعة الحلول خالية أي  $\emptyset$ .

(د) في المعادلة  $6x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 0$  لدينا  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times \frac{2}{3} = 0$ ،

$\Delta = 0$ ، فالمعادلة تقبل حلاً مضاعفاً  $x_0$  حيث  $x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 6} = \frac{1}{3}$

إن مجموعة الحلول هي  $\{\frac{1}{3}\}$ .

(هـ) في المعادلة  $-2x^2 + 7x - 3 = 0$  لدينا  $\Delta = (7)^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25$ ،  
 $\Delta > 0$ ، فالمعادلة تقبل حلين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$  حيث:

$$x_2 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = 3$$

إن مجموعة الحلول هي  $\{\frac{1}{2}; 3\}$ .

## 4. حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال حاسبة بيانية

طريقة

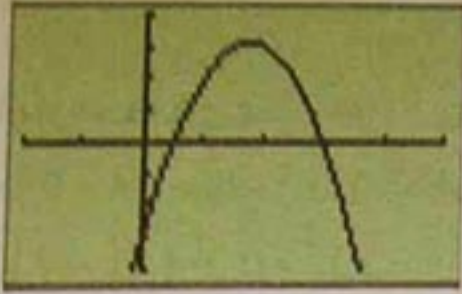
لحل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال حاسبة بيانية، نتبع الخطوات التالية:

- نحجز عبارة الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.
- نظهر التمثيل البياني للدالة على الشاشة بالضغط على اللمسة **TRACE**.
- نقرأ على الشاشة عدد نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة مع محور الفواصل، فواصل هذه النقط هي حلول المعادلة.
- عموماً، نعطي قيمة مقربة للحلول عند وجودها.

تمرين

حل، باستعمال حاسبة بيانية، المعادلة  $-2x^2 + 7x - 3 = 0$ .





حل

1. نحجز الدالة  $x \mapsto -2x^2 + 7x - 3$  وباختيار نافذة مناسبة، نحصل على المنحنى الممثل لها.

2. بقراءة مباشرة على الشاشة، نلاحظ أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطتين، فاصلتاها حلا للمعادلة.

بوضع الزايق على النقطتين، نقرأ الفاصلتين:  $x_1 \approx 0,53191489$  و  $x_2 \approx 2,9893617$  وهما قيمتان مقربتان للحلين المضبوطين  $x_1 = \frac{1}{2}$  و  $x_2 = 3$  للمعادلة  $-2x^2 + 7x - 3 = 0$ .

## 5. حل متراجحة من الدرجة الثانية

طريقة

لحل متراجحة من الدرجة الثانية، نتبع الخطوات التالية:

- نحل المعادلة المرفقة.
- نعين إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.
- نستنتج حلول المتراجحة.

تمرين

حل في  $\mathbb{R}$  كلا من المتراجحات الآتية:

$$(أ) \quad 25x^2 - 20x + 4 \leq 0$$

$$(ب) \quad 2x^2 + x - 3 \geq 0$$

$$(ج) \quad -x^2 + 2x - 3 < 0$$

حل

(أ) حل المتراجحة  $-x^2 + 2x - 3 < 0$ :

لدينا  $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = -8 < 0$ . إذن  $\Delta < 0$ .

فالمعادلة  $-x^2 + 2x - 3 = 0$  ليس لها حلول.

ومنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $-x^2 + 2x - 3$  لا يندم وهو من إشارة  $-1$  (أي سالب).

إذن مجموعة حلول المتراجحة  $-x^2 + 2x - 3 < 0$  هي  $\mathbb{R}$ .

(ب) حل المتراجحة  $2x^2 + x - 3 \geq 0$ :

لدينا  $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 > 0$ . إذن  $\Delta > 0$ .

فالمعادلة  $2x^2 + x - 3 = 0$  تقبل حلين مختلفين، هما  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 1$  و  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2}$ .

ومنه إشارة ثلاثي الحدود  $2x^2 + x - 3$  كما في الجدول:

|                |           |                |     |           |
|----------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $x$            | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
| $2x^2 + x - 3$ | $+$       | $0$            | $-$ | $+$       |

إذن مجموعة حلول المتراجحة  $2x^2 + x - 3 \geq 0$  هي  $]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [1; +\infty[$ .



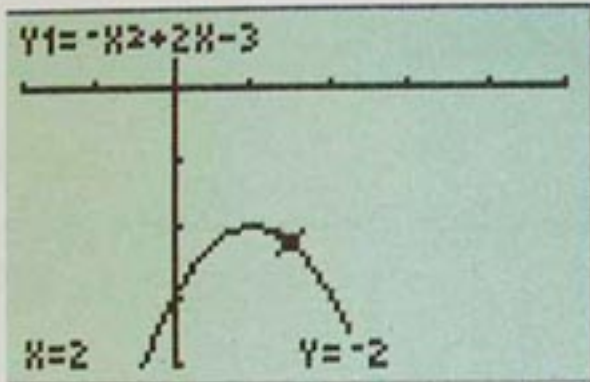
ج) حل المتراجحة  $25x^2 - 20x + 4 \leq 0$  :  
 المتراجحة  $25x^2 - 20x + 4 \leq 0$  تكافئ  $(5x - 2)^2 \leq 0$ .  
 أي  $(5x - 2)^2 < 0$  أو  $(5x - 2)^2 = 0$ .  
 أي  $5x - 2 = 0$  (لأن  $(5x - 2)^2$  لا يكون سالبا).  
 ومنه  $x = \frac{2}{5}$ .

إذن مجموعة حلول المتراجحة  $25x^2 - 20x + 4 \leq 0$  هي  $\left\{ \frac{2}{5} \right\}$ .

## ملاحظة

يمكن أن نتحقق من الحلول بيانيا، برسم المنحنى الممثل للدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وملاحظة الوضع النسبي له مع محور الفواصل.

في السؤال أ) مثلا، نرسم المنحنى الممثل للدالة:  $x \mapsto -x^2 + 2x + 3$  ونجد الشكل المقابل.



نلاحظ أن المنحنى يقع تحت محور الفواصل ولا يقطعه.  
 هذا ما يؤكد النتائج المحصل عليها بالحساب.

## 6. حل مشكلات باستعمال معادلات (أو متراجحات) من الدرجة الثانية طريقة

لحل مشكلة باستعمال معادلة (أو متراجحة)، نتبع الخطوات التالية:

- نختار مجهولا.
- نترجم المشكلة بمعادلة (أو متراجحة).
- نحل المعادلة (أو المتراجحة).
- نتحقق من انسجام الإجابة مع معطيات المشكلة.

## تمرين 1

عين أطوال أضلاع مثلث قائم، علما أن أطوال هذه الأضلاع أعداد طبيعية متتابة.

## حل

▪ نفرض أن أطوال أضلاع المثلث هي  $x-1$  و  $x$  و  $x+1$  حيث  $x$  عدد طبيعي أكبر من 1.  
 الضلع الأكبر في المثلث القائم هو الوتر، فيكون  $x+1$  طول الوتر و  $x-1$  و  $x$  طول الضلعي الزاوية القائمة.

▪ وحسب نظرية فيثاغورس، يكون المثلث قائما إذا وفقط إذا كان  $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2$ .

المعادلة  $(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2$  تكافئ  $x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1$  أي  $x^2 - 4x = 0$ .

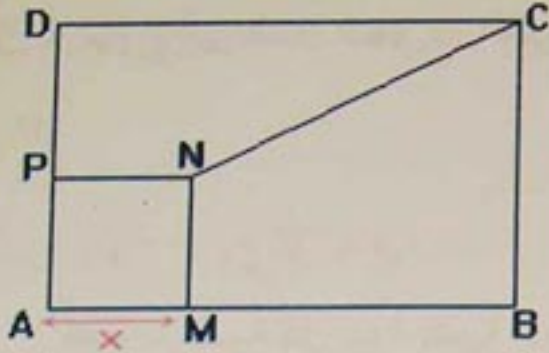


- المعادلة  $x^2 - 4x = 0$  من الدرجة الثانية ولحلها نكتب:  
 $x(x - 4) = 0$  يكافئ  $x^2 - 4x = 0$   
 وبما أن  $x \neq 0$ ، إذن  $x(x - 4) = 0$  يكافئ  $x - 4 = 0$ .  
 أي أن  $x = 4$ .  
 الحل  $x = 4$  يسمح بإيجاد مثلث قائم أطوال أضلاعه 3، 4، 5.

## تمرين 2

ABCD مستطيل طوله 10cm وعرضه 6cm.

ننشئ مربعا AMNP، بحيث تكون M على [AB] و P على [AD]. نضع  $AM = x$ .



- احسب  $a(x)$  مساحة شبه المنحرف MNCB بدلالة  $x$ .
- عَيِّن قيمة  $x$  التي من أجلها تكون المساحة  $a(x)$  أعظمية (أكبر ما يمكن). احسب  $a(x)$  في هذه الحالة.
- هل توجد قيمة للعدد  $x$  تكون من أجلها مساحتا MNCB و PNCD متساويتين؟
- هل توجد قيم للعدد  $x$  تكون من أجلها المساحة  $a(x)$  أصغر من مساحة المربع AMNP؟

## حل

1. حساب مساحة شبه المنحرف MNCB:

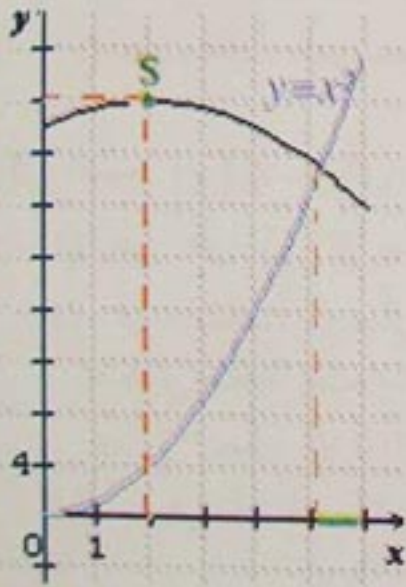
$$\text{لدينا } a(x) = \frac{(x+6)(10-x)}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 60) \text{ و } 0 < x < 6.$$

2. نعلم أن المنحني الممثل للدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$a(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 60)$$

قطع مكافئ، ذروته النقطة  $S(2; 32)$  (الشكل المقابل).

في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.



- على المجال  $]0; 6[$ ، تكون المساحة  $a(x)$  أعظمية من أجل  $x = 2$ ، عندئذ  $a(x) = 32 \text{ cm}^2$ .

3. لتكن  $a'(x)$  مساحة شبه المنحرف PNCD، لدينا:

$$a'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x - 60)$$

نبحث عن وجود قيمة لـ  $x$  في المجال  $]0; 6[$ ، بحيث  $a(x) = a'(x)$ .

$$a(x) = a'(x) \text{ يعني } -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 60) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x - 60) \text{، وهذا يعني } -x = x$$

منه  $2x = 0$  وبالتالي  $x = 0$ .

لكن،  $x \in ]0; 6[$  وبالتالي لا توجد قيمة لـ  $x$  بحيث  $a(x) = a'(x)$ .

4. لتكن  $a''(x)$  مساحة المربع AMNP، لدينا  $a''(x) = x^2$

نبحث عن وجود قيم لـ  $x$  في المجال  $]0; 6[$ ، بحيث  $a(x) < a''(x)$ .



لكن  $a(x) < a''(x)$  يعني  $-\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 60) < x^2$

فالمطلوب عندئذ، هو البحث عن قيم  $x$  في المجال  $]0; 6[$  التي من أجلها يكون المنحني الممثل للدالة  $a(x) \rightarrow x$  تحت المنحني الممثل للدالة  $x^2 \rightarrow x$  كما هو مبين في الشكل. وهو ما يعني حلّ، بيانياً، المتراجحة  $a(x) < a''(x)$ .

**ملاحظة**

يمكن الرجوع إلى الحلّ الجبري للمتراجحة  $a(x) < a''(x)$  أي  $\frac{3}{2}x^2 - 2x - 30 > 0$  في المجال  $]0; 6[$ .

**★ تمرين 3: الربح الأعظمي**

تنتج مؤسسة كل سنة كمية قدرها  $x$  من مادة معينة لتبيعها. نضع  $C(x)$  الكلفة الإجمالية بالدنانير لإنتاج الكمية  $x$ . نفرض أنه من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; 9\ 000]$ ، يكون:

$$C(x) = \frac{1}{50}x^2 + 20x + 150\ 000$$

1. احسب الكلفة الإجمالية للإنتاج من أجل  $x = 100$ ؛  $x = 1\ 000$ ؛  $x = 5\ 000$ ؛  $x = 7\ 500$ .

2. لتكن  $R(x)$  الحصيلة بالدنانير الناتجة عن بيع الوحدة بسعر 190 ديناراً.

(أ) احسب الحصيلة  $R(x)$  بدلالة  $x$  ثم من أجل  $x = 100$ ؛  $x = 1\ 000$ ؛  $x = 5\ 000$ ؛  $x = 7\ 500$ .  
(ب) هل حققت المؤسسة ربحاً من أجل هذه الكميات المنتجة والمبيعة؟

3. نضع  $B(x) = R(x) - C(x)$  من أجل  $x$  من المجال  $[0; 9\ 000]$ .

(أ) عبّر عن  $B(x)$  بدلالة  $x$ .

(ب) عيّن، بيانياً، المجال الذي ينبغي أن ينتمي إليه  $x$  حتى تكون المؤسسة رابحة.

(نختار معلماً متعامداً ومتجانساً. على محور الفواصل  $1\text{cm}$  يمثل  $1000$  وعلى محور الترتيب  $1\text{cm}$  يمثل  $50000$ ).

(ج) ما هي قيمة  $x$  التي يكون من أجلها الربح أعظماً؟ ما هو هذا الربح؟

**حل**

1) للإجابة على السؤال 1 ولإجراء الحسابات المطلوبة، نستعمل مجداول اكسال كما هو مبين على الشكل المقابل.

|   | A    | B       | C       | D       |
|---|------|---------|---------|---------|
| 1 | x    | C(x)    | R(x)    | B(x)    |
| 2 | 100  | 152200  | 19000   | -133200 |
| 3 | 1000 | 190000  | 190000  | 0       |
| 4 | 5000 | 750000  | 950000  | 200000  |
| 5 | 7500 | 1425000 | 1425000 | 0       |
| 6 |      |         |         |         |

وبقراءة مباشرة للعمود D، نستنتج أن المؤسسة تخسر 133 200 ديناراً عندما تنتج وتبيع كمية  $x = 100$  وتحقق ربحاً قدره 200 000 ديناراً

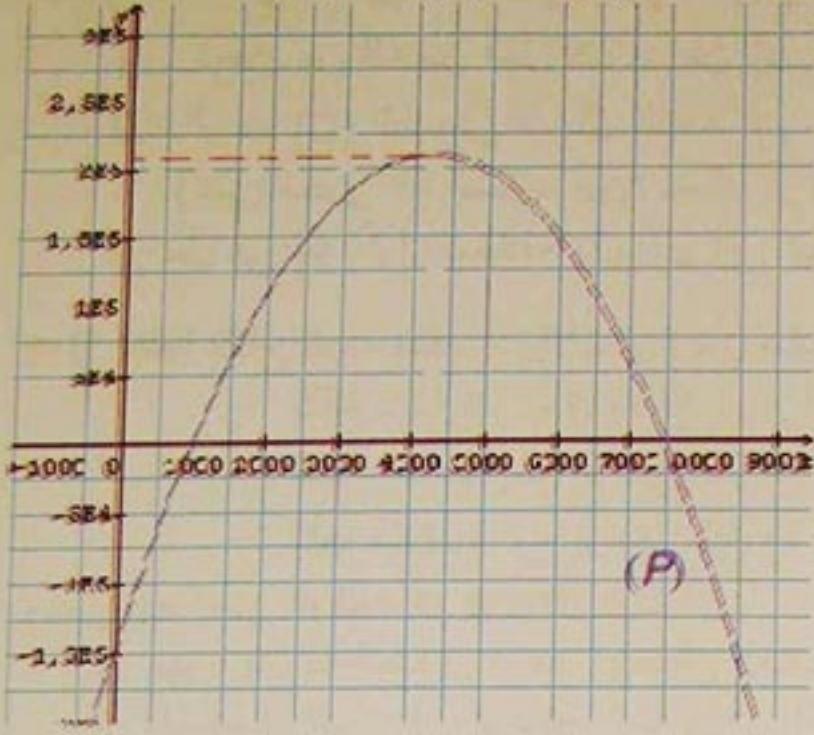
من أجل  $x = 5\ 000$ . بينما من أجل الكميتين  $x = 1\ 000$  و  $x = 7\ 500$  فهي تحقق التوازن بين  $R(x)$  و  $C(x)$ .



(2)  $R(x) = 190x$  حيث  $x$  من المجال  $[0 ; 9\ 000]$ .

3. أ) عبارة  $B(x)$  بدلالة  $x$ :  $B(x) = R(x) - C(x) = 190x - \frac{1}{50}x^2 - 20x - 150\ 000$

أي أن  $B(x) = -\frac{1}{50}x^2 + 170x - 150\ 000$



•  $B$  هي دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية للمتغير  $x$ .

ندرس هذه الدالة ونمثلها في معلم متعامد ومتجانس حسب المقياس المعطى ونجد:

ب) تكون المؤسسة رابحة من أجل  $x \in ]1000 ; 7\ 500[$ .

ج) يكون الربح أعظميا من أجل  $x = 4\ 250$

وهو  $B(4250) = 211\ 250$ .

أي يبلغ هذا الربح 211250 دينارا.



# مسألة محلولة

مسألة

1. دالة معرفة على المجال  $[1; 9]$  كما يلي:  $f(x) = -5000(x^2 - 10x + 16)$ .
1. تحقق من أنه من أجل كل  $x$  من  $[1; 9]$ ،  $f(x) = -5000(x - 5)^2 + 45000$ .
2. أرسم (C) المنحني الممثل للدالة  $f$ .  
(على محور الفواصل،  $1\text{ cm}$  يمثل  $1$  وعلى محور الترتيب،  $1\text{ cm}$  يمثل  $10000$ ).
3. حل في  $[1; 9]$  المعادلة  $f(x) = 0$ . استنتج إشارة  $f(x)$  عندما يتغير  $x$  في  $[1; 9]$ .
- ★ II. كلفة إنتاج كمية (مقدرة بالأطنان) من مادة معينة من طرف مؤسسة هي كما يلي:
- كلفة ثابتة قدرها  $80\,000$  ديناراً.
  - كلفة متناسبة مع الإنتاج قدرها  $45000$  ديناراً للطن الواحد.
  - كلفة متناسبة مع مربع الإنتاج، معامل التناسبية هو  $5000$ .
- وتمن بيع الطن الواحد هو  $95000$  ديناراً.
1. عبّر، بدلالة العدد  $x$  (عدد الأطنان المنتجة) عن ربح المؤسسة.
2. باستعمال الجزء I، استنتج قيمة  $x$  من  $[1; 9]$  التي من أجلها يكون ربح المؤسسة أعظمية. احسب هذا الربح. تحقق من النتيجة بالحساب.

حل

إذن مجموعة حلول المعادلة هي  $\{2; 8\}$ .

باستعمال المنحني (C) نستنتج إشارة  $f$ :

| $x$    | 1 | 2 | 8 | 9 |
|--------|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | 0 | + | 0 |

II. الكلفة الإجمالية للإنتاج  $C(x)$  هي:

$$C(x) = 5\,000x^2 + 45\,000x + 80\,000$$

نضع  $R(x)$  و  $B(x)$  دخل و ربح المؤسسة على الترتيب، لدينا  $B(x) = R(x) - C(x)$  ونجد:

$$B(x) = 95000x - (5000x^2 + 45000x + 80000)$$

أي أن:  $B(x) = -5000(x^2 - 10x + 16)$ .

حسب نتائج الجزء I، يكون الربح أعظمية عندما تباع المؤسسة منتوج 5 أطنان ونجد بقراءة بيانية:

$$B(5) = 45000$$

$$B(x) = -5000(x - 5)^2 + 45000$$

$$B(x) = 5000[9 - (x - 5)^2]$$

بما أن  $(x - 5)^2 \geq 0$  من أجل كل عدد  $x$ ،

$$B(x) \leq 45000 \text{ وبالتالي } 9 - (x - 5)^2 \leq 9$$

فالدالة  $B$  تبلغ قيمتها الكبرى عندما يكون

$$(x - 5)^2 = 0 \text{ أي } x = 5$$

1. من أجل كل  $x$  من  $[1; 9]$ ،

$$f(x) = -5000(x - 5)^2 + 45000$$

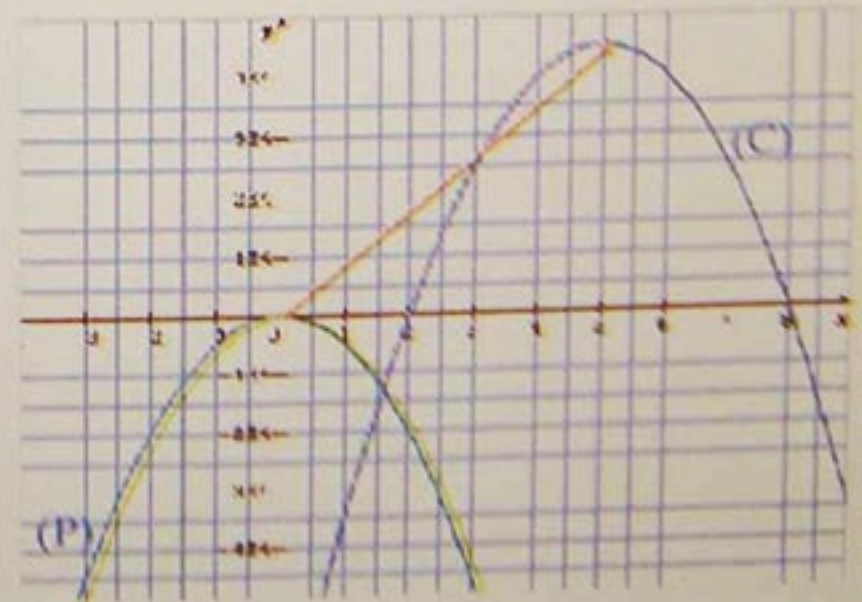
$$= -5000(x^2 - 10x + 25) + 45000$$

$$= -5000(x^2 - 10x + 25 - 9)$$

$$= -5000(x^2 - 10x + 16)$$

2 المنحني (C) الممثل للدالة  $f$  هو صورة

المنحني الممثل للدالة  $-5000x^2 - 5000x + 50000$  بالانسحاب الذي شعاعه  $5\vec{i} + 45000\vec{j}$



3 المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما هما حلا المعادلة  $f(x) = 0$  في  $[1; 9]$ .



1. صحيح أو خاطئ

(أ) الشكل النموذجي لثلاثي الحدود  $-x^2+2x-4$  هو  $-(x-1)^2+3$

(ب) التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = x(x+1)$  يشمل مبدأ المعلم.

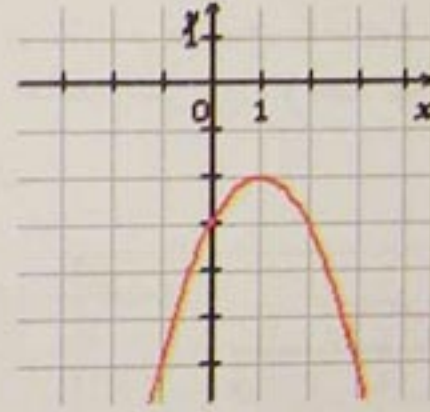
(ج) القطع المكافئ الذي معادلته  $y = 4x^2+7x+4$  يقطع محور الفواصل في نقطتين.

(د) المعادلة  $3x^2-3x = x(x+1)$  تكافئ  $3(x-1) = x+1$ .

(هـ) مميز المعادلة  $x^2+5x = -4$  هو  $\Delta = 41$ .

(و) من أجل ثلاثي الحدود  $-3x^2+4x-2$ ، لدينا  $\Delta = -8$  و  $a < 0$ .

(ز) إذا كان  $\Delta > 0$  و  $a < 0$ ، فإن للقطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2+bx+c$  الشكل الآتي:



(ي) مجموعة حلول المتراجحة  $-x^2+2x-3 \leq 0$  هي  $\mathbb{R}$ .

الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

2. نريد تعيين الشكل النموذجي لثلاثي الحدود  $x^2-6x+2$  (أ) انشر  $(x-3)^2$ .

(ب) أكمل ما يلي:

$$x^2-6x = (x-3)^2 - \dots$$

(د) ماذا تستخلص؟

3. عيّن الشكل النموذجي لكلّ ثلاثي حدود مما يلي:

(أ)  $x^2+4x+3$  (ب)  $x^2-5x-1$   
(د)  $-3x^2+x+1$  (د)  $4x^2-x+1$

4. نفس السؤال السابق.

(أ)  $x^2-6x+2$  (ب)  $-3x^2+3x+1$   
(د)  $x^2+2x$

5.  $P(x)$  ثلاثي الحدود، حيث:

$$P(x) = -3x^2-5x+1$$

(أ) اكتب  $P(x)$  على الشكل النموذجي.

(ب) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،

$$P(x) \leq \frac{37}{12}$$

6. عيّن، في حالة وجودها، جذور كلّ ثلاثي حدود مما يلي ثمّ حلّه.

(أ)  $x^2-10x+21$  (ب)  $x^2-0,49$   
(د)  $-x^2-5x-60$  (د)  $4x^2-4\sqrt{3}x+3$

7. حل بسط ومقام كلّ من العبارتين الناطقتين التاليتين ثمّ اختزل عند الإمكان.

(أ)  $\frac{x^2+x-2}{x^2+1}$  (ب)  $\frac{2x^2+5x+2}{4x^2-1}$

8. بفرض  $P(x) = -x^2+2x+15$

(1) تحقّق من أنّ  $P(x) = -(x-1)^2+16$  استنتج تحليلاً لـ  $P(x)$ .

(2) باستعمال العبارة المناسبة:

(أ) احسب  $P(0)$  و  $P(1)$ .

(ب) بيّن أنّ  $P(x)$  يقبل قيمة حدية يطلب تعيينها

(ج) حلّ في  $\mathbb{R}$  المعادلتين  $P(x) = 0$

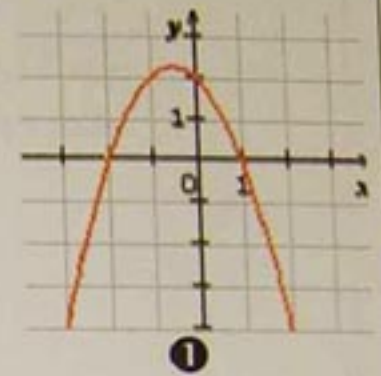
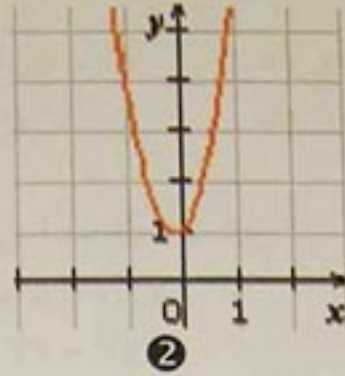
و  $P(x) = 15$



الدالة ثلاثي الحدود

9. أرفق كل دالة بتمثيلها البياني.

(أ)  $x \xrightarrow{f} -x^2 - x + 2$   
 (ب)  $x \xrightarrow{g} 4x^2 + x + 1$



10. ادرس تغيّرات كل دالة مما يلي ثم ارسم

تمثيلها البياني في معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(أ)  $x \xrightarrow{f} x^2 - 4x + 5$   
 (ب)  $x \xrightarrow{g} -2x^2 - x + 6$

11. أ) عيّن دالة ثلاثي حدود  $f$  ذات جدول التغيّرات أسفله.

|        |                                 |               |           |
|--------|---------------------------------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$                       | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\nearrow \frac{9}{2} \searrow$ |               |           |

(ب) نفس السؤال السابق من أجل الجدول أسفله.

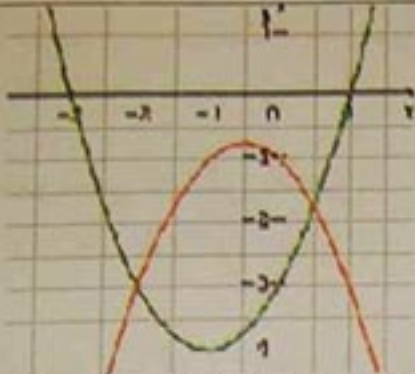
|        |                        |     |           |
|--------|------------------------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$              | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\searrow -1 \nearrow$ |     |           |

12.  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$f(x) = ax^2 - x - 1$

$g(x) = x^2 + 2x - c$

تمثيلاهما البيانيان كما في الشكل.



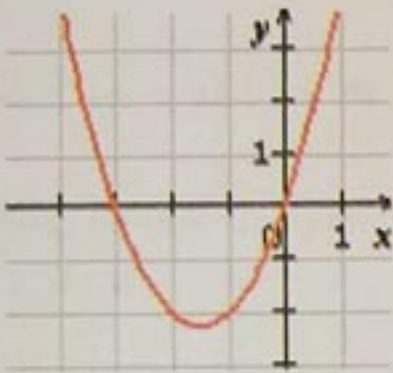
أرفق كل دالة بتمثيلها البياني ثم عيّن  $a$  و  $c$ .

13. نعتبر الدالتين المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$f(x) = 3x^2 - x - 1$

$g(x) = x^2 + 5x$

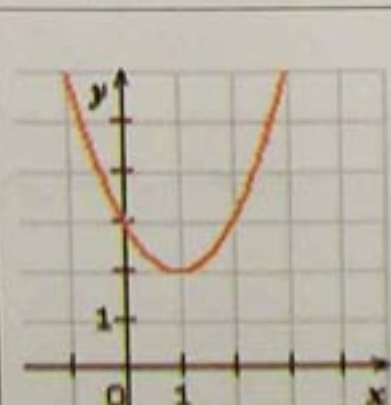
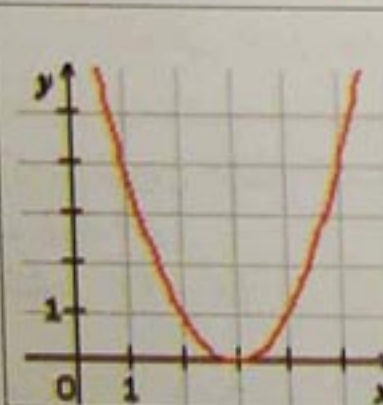
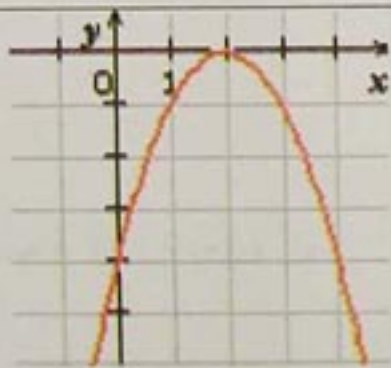
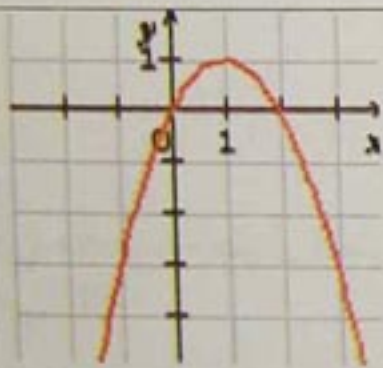
من بين هاتين الدالتين، ما هي الدالة الممثلة كما يلي؟ برّر إجابتك.



14. إليك التمثيلات البيانية لأربع دوال من الشكل

$x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$  (مع  $a \neq 0$ ).

عيّن، في كل حالة، إشارة  $a$  وعدد جذور  $f(x)$  وإشارة المميّز.





**15. (1)** أظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  حيث:  
 $x \mapsto x^2 + 6x + 3$  و  $x \mapsto 13x - 12$   
 (2) هل يتقاطع المنحنيان؟  
 (3) تحقق من ذلك حسابيا.

المعادلات من الدرجة الثانية

**16.** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية دون استعمال المميز.  
 (أ)  $x^2 + 1 = 0$  (ب)  $x^2 = 2$   
 (ج)  $x^2 - 3x = 0$  (د)  $(x - 1)^2 - (2 - 3x)^2 = 0$

**17.** حل باستعمال متطابقة شهيرة أو بأخذ عامل مشترك ثم حل المعادلات في  $\mathbb{R}$ .  
 (أ)  $x^2 + 4x + 4 = 0$   
 (ب)  $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 2x$   
 (ج)  $-3x^2 + 6x - 3 = 0$   
 (د)  $25x^2 - 10x + 1 = 0$   
 (هـ)  $(2x + 3)^2 = (4x^2 - 9)$

**18.** اكتب  $P(x)$  على الشكل النموذجي ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $P(x) = 0$ .  
 (أ)  $P(x) = 4x^2 - 7x - 11$   
 (ب)  $P(x) = 3x^2 - 7x + 4$   
 (ج)  $P(x) = -2x^2 + 3x + 1$

**19.** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:  
 (أ)  $3x^2 + 5x - 12 = 0$   
 (ب)  $6x^2 - 11x + 4 = 0$   
 (ج)  $2x^2 + \sqrt{3}x - 3 = 0$   
 (د)  $25x^2 - 10x + 1 = 0$   
 (هـ)  $x^2 + 1.5x = 1$

**20.** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:  
 (أ)  $(2x + 1)^2 = -2x + 5$   
 (ب)  $x^3 + x^2 - x = 0$   
 (ج)  $(x + 2)(x^2 - 3) = (2x + 3)(x^2 + x - 2)$

**21.** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

(أ)  $x - 1 = \frac{x}{x + 1}$   
 (ب)  $\frac{3x + 1}{x - 2} = \frac{x + 2}{3x + 1}$

**22.** نسمي معادلة مُضعفة التربيع ذات المجهول  $x$  كل معادلة من الشكل  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  مع  $a \neq 0$ . ولحل مثل هذه المعادلة، نضع  $y = x^2$  ...  
**تطبيق:** حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ .

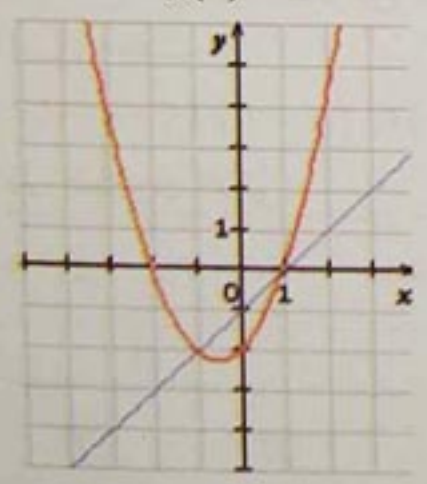
**23.** بتطبيق الطريقة السابقة، حل في  $\mathbb{R}$  المعادلتين:  
 (أ)  $-2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$   
 (ب)  $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

إشارة ثلاثي الحدود

**24.** ادرس إشارة كل ثلاثي حدود مما يلي:  
 (أ)  $x^2 + 3x - 40$  (ب)  $x^2 + x - 6$   
 (ج)  $-x^2 + 2x + 48$  (د)  $-2x^2 - x + 3$

**25.** حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات الآتية:  
 (أ)  $x^2 - 7x + 10 < 0$  (ب)  $2x^2 - x + 5 \leq 0$   
 (ج)  $6x^2 + 8x - \frac{8}{3} \geq 0$  (د)  $9x^2 + 6x + 1 \geq 0$

**26.** يُعطى في الشكل الموالي التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  
 $g(x) = x - 1$  ؛  $f(x) = x^2 + x - 2$



1. عيّن حسابيا:

(أ) نقط تقاطع القطع المكافئ مع محور الفواصل.  
 (ب) نقط تقاطع القطع المكافئ مع محور الترتيب.

موقع عيون البصائر التعليمي

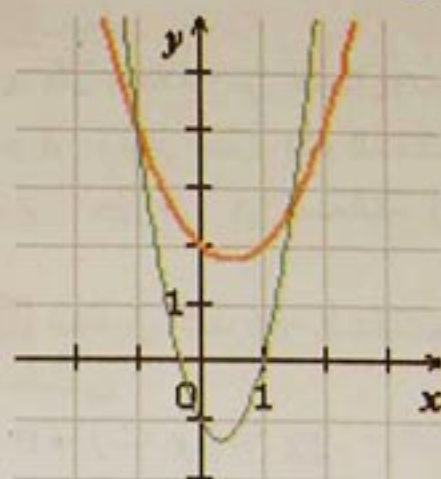
elbassair.net



د) نقط تقاطع القطع المكافئ مع المستقيم الذي معادلته  $y = x - 1$ .

2. تحقق بيانيا من النتائج.

27. حدد بيانيا نقط تقاطع المنحنيين الممثلين



للدالتين  $f$  و  $g$

المعرفتين على  $\mathbb{R}$

كما يلي:

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

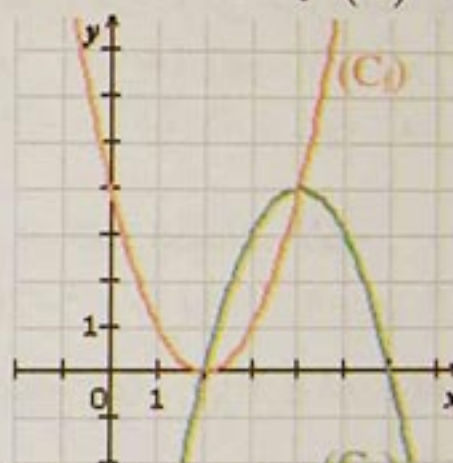
$$g(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

ثم تحقق من ذلك حسابيا.

28. يعطي في الشكل الموالي التمثيلان البيانيان

للدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 8x - 12 ; f(x) = x^2 - 4x + 4$$



حل بيانيا المتراجحة  $f(x) \leq g(x)$  وتحقق من ذلك حسابيا.

29. الغرض من هذا التمرين هو دراسة

إشارة  $f(x)$  حيث

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 2)$$

أ) أكمل الجدول الآتي:

|                 |           |                |     |     |           |
|-----------------|-----------|----------------|-----|-----|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $x-1$           |           |                | $0$ |     |           |
| $2x^2 - 3x - 2$ |           | $0$            |     | $0$ |           |
| $f(x)$          |           | $0$            | $0$ | $0$ |           |

ب) استنتج حلول المتراجحة  $f(x) < 0$  في  $\mathbb{R}$ .

30. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحتين:

$$(-6x^2 + x + 2)(x + 2) \geq 0 \quad (أ)$$

$$3x^2 - x - 10 \geq 0 \quad (ب)$$

31. عين دون استعمال المميز جذور ثلاثي

الحدود الوارد في الطرف الأول لكل متراجحة ثم

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة:

$$(x+1)(x-4) \geq 0 \quad (أ)$$

$$-5x^2 + 2x \leq 0 \quad (ب)$$

$$1 - 3x^2 < 0 \quad (ج)$$

32. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحتين:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 2x} < 0 \quad (أ)$$

$$\frac{x^2 + 5}{x - 1} > 3 \quad (ب)$$

33. نفس السؤال السابق.

$$\frac{3x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 3} \leq 0 \quad (أ)$$

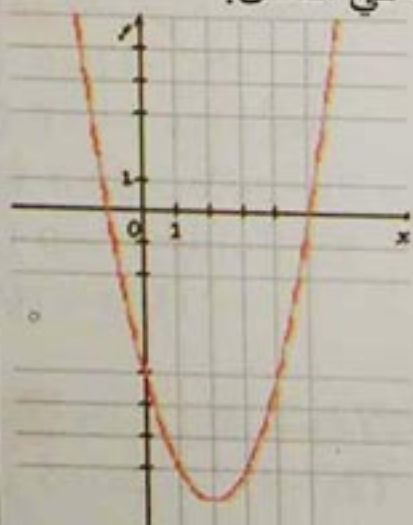
$$\frac{(x-1)(2x+3)}{x^2+1} < 0 \quad (ب)$$

حل معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية بيانيا.

34. دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

وتمثيلها البياني معطى كما في الشكل.

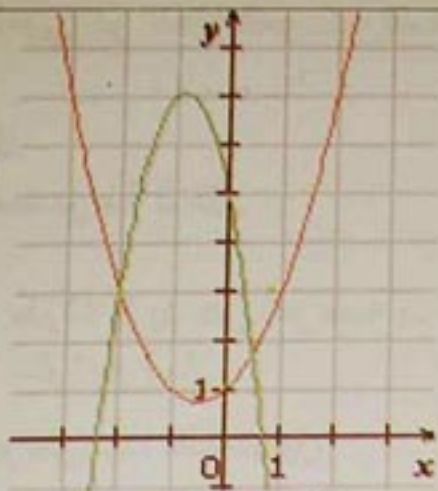


أ) احسب السوابق الممكنة لكل من الأعداد 0

و -5 و -9 و -10 بالدالة  $f$ .

ب) تحقق من النتائج بيانيا.

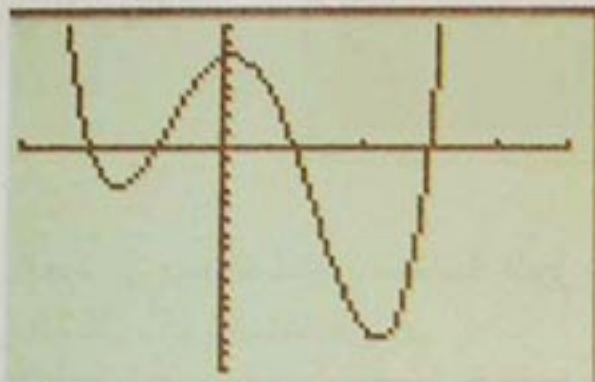




عين القيم المضبوطة لإحداثيات نقط تقاطع المنحنيين.

41. بفرض (C) المنحني الممثل للدالة f المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 4x + 3)$$



- (أ) ما هو عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$  ؟  
 (ب) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .  
 (ج) باستعمال (C)، مثل حلول المتراجحة  $f(x) < 0$ .  
 (د) حل المتراجحة  $f(x) < 0$ .

### مسائل

42. عين عددين طبيعيين متعاقبين بحيث يكون جداؤهما مساويا 341 640.

43. هل توجد أعداد صحيحة نسبية x بحيث  $x^2 = x + 1$  ؟  $x^2 = x - 1$  ؟

44. عين أطوال أضلاع مثلث قائم علما أن هذه الأطوال أعداد زوجية متعاقبة.

45. مثلث قائم وتره 47 ومحيطه 108. عين أطوال أضلاعه.

35. f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$

- (أ) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .  
 (ب) أظهر المنحني الممثل للدالة f على شاشة حاسوبية بيانية ثم تحقق من النتائج المحصل عليها في السؤال (أ).

36. f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:

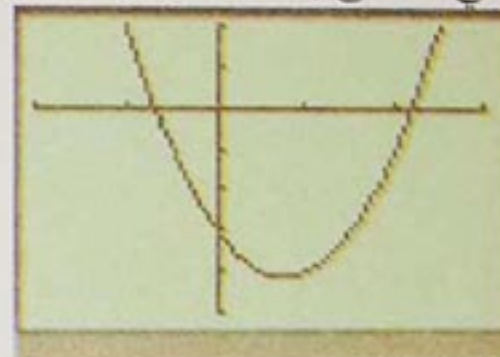
$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

- (أ) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $f(x) < 0$ .  
 (ب) تحقق من النتائج باستعمال حاسوبية بيانية.

37. f دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 3$$

تمثيلها البياني معطى بحاسوبية بيانية كما يلي:



هل يمكن القول إن:

- (أ) المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$ .  
 (ب) من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ ،  $f(x) \geq 0$ .

38. عين إحداثيات النقط المشتركة للقطعين

المكافئين اللذين معادلتاهما:

$$y = -2x^2 \text{ و } y = x^2 - 2x - 8$$

تحقق بحاسوبية بيانية.

39. (1) مثل باستعمال حاسوبية بيانية الدالتين

المعرفتين كما يلي:

$$x \xrightarrow{f} x^2 + x - 2 \text{ و } x \xrightarrow{g} x + 2$$

- (2) بقراءة بيانية، حل المتراجحة  $g(x) \leq f(x)$ .  
 (3) تحقق من النتائج حسابيا.

40. الدالتان الممثلتان كما في الشكل معرفتان كما

يلي:

$$g(x) = -3x^2 - 5x + 5 ; f(x) = x^2 + x + 1$$



46. العدد الذهبي هو الحل الموجب للمعادلة:

$$x^2 = x + 1$$

ونرمز إليه  $\Phi$ .

أعط القيمة المضبوطة لـ  $\Phi$ .

47. مستطيل طوله يزيد عن عرضه بـ 7 أمتار

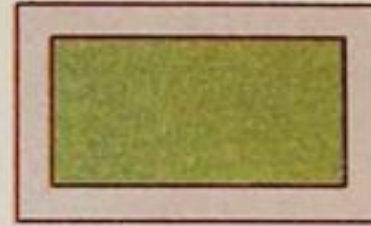
ومساحته 60 متراً مربعاً.

عَيِّن طول وعرض هذا المستطيل.

48. حديقة مستطيلة محيطها 280m. خصَّص

منها صاحبها ممراً عرضه 2m (كما في الشكل)،

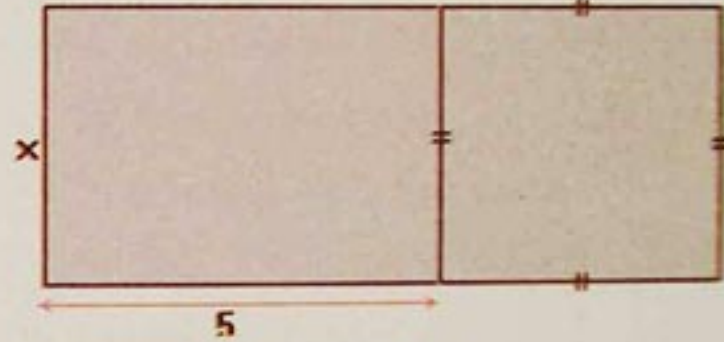
فبقيت مساحة قدرها 4 256m<sup>2</sup> صالحة للزراعة.



عَيِّن بُعدي الحديقة.

49. عَيِّن العدد  $x$  بحيث تكون مساحة الجزء

المظلل في الشكل أكبر تماماً من 6.



50. وضع شخص 250 000 ديناراً في البنك

بكيفيتين:

• جزء A بفائدة قدرها %  $t$ .

• الجزء الآخر B بفائدة قدرها %  $(t+1)$ .

عند نهاية السنة، جلب المبلغ A فائدة قدرها 4000

ديناراً وجلب المبلغ B فائدة قدرها 7500 ديناراً.

(أ) بيِّن أن  $t$  حل للمعادلة:  $\frac{40}{t} + \frac{75}{t+1} = 25$

(ب) احسب  $t$  ثم A و B.

51. تعطى كلفة إنتاج مادة بالعبارة:

$$C(x) = \frac{x^3}{27} - 10 \frac{x^2}{3} + 150x$$

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} \quad \text{الكلفة المتوسطة هي:}$$

(مع  $x > 0$ ).

1. عبّر عن  $C_M(x)$  بدلالة  $x$ .

2. احسب  $C_M(9)$  ثم حل المعادلة

$$C_M(x) = C_M(9)$$

3. عَيِّن الكمية  $x$  التي ينبغي أن تنتجها هذه المؤسسة حتى تكون الكلفة المتوسطة للإنتاج أصغرية.



- 1 • العدد المشتق
- 2 • معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه
- 3 • الدوال المشتقة
- 4 • العمليات على الدوال المشتقة
- 5 • الدالة المشتقة واتجاه التغير
- 6 • القيم الحدية لدالة ★
- 7 • التقريب التآلفي المماسي لدالة ★

يقول «ديكارت» حول مماسات منحن :

«إنني لا أتوانى عن القول أن هذا الموضوع هو الأجدى والأعم حسب إعتقادي. إنه الشيء الذي لم أتوقع أنني سأبحث فيه في يوم ما في ميدان الهندسة.»

إن الأبحاث المنجزة في القرن السابع عشر في ميادين متنوعة مثل: الميكانيك، علم الفلك، الضوء... أدت بالعلماء إلى طرح العديد من المشاكل حول مماسات منحن، كتعيين مماس منحن عند نقطة منه، وتعيين مماس منحن يوازي مستقيما معلوما،... ثم حلها.



أدت هذه الأعمال بالكثير من العلماء مثل: ديكارت، نيوتن، ليبنيز، أولر، لاغرانج، كوشي،... إلى إستنباط مفهوم المشتق المستعمل في يومنا هذا في الرياضيات والعلوم الفيزيائية والعلوم الإقتصادية.

ديكارت ( 1569 - 1650 )



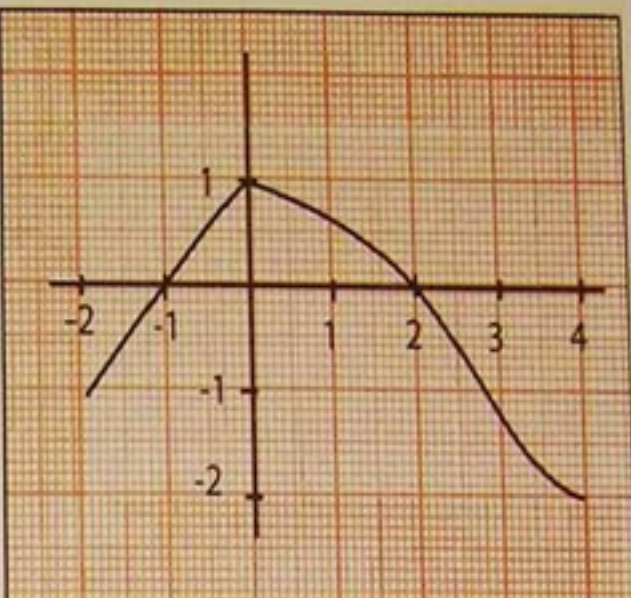
# استبتيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

| السؤال   | إجابة 1                 | إجابة 2                 | إجابة 3                             |
|--|-------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 1) المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ مستقيم معادلته $y = 3x - 5$ . معامل توجيه المستقيم $(D)$ هو ...  | 3                       | - 5                     | $\frac{5}{3}$                       |
| 2) المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ من نقطتان $B(x_1; y_1)$ ، $A(x_0; y_0)$ من المستوي حيث $x_1 \neq x_0$ . معامل توجيه المستقيم $(AB)$ هو ... | $y_1 - y_0$             | $x_1 - x_0$             | $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$       |
| 3) المستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . مستقيم معادلته $y = -2x + 1$ . للمستقيم $(D)$ شعاع توجيه مثل ...   | $\vec{u}(-\frac{1}{2})$ | $\vec{u}(-\frac{2}{1})$ | $\vec{u}(-\frac{2}{1})$             |
| 4) دالة معرفة على مجال $I$ يشمل العددين $x_0$ و $x_1$ حيث $x_1 \neq x_0$ . تزايد الصورة بين $x_0$ و $x_1$ هو ..  | $f(x_1) - f(x_0)$       | $x_1 - x_0$             | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |
| 5) دالة معرفة على مجال $I$ يشمل العددين $x_0$ ، $x_1$ حيث $x_1 \neq x_0$ . نسبة تزايد الدالة $f$ بين $x_0$ و $x_1$ هي ...                                    | $f(x_1) - f(x_0)$       | $x_1 - x_0$             | $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ |

موقع عيون البصائر التعليمي



|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| <p>متزايد على المجال<br/>.<math>[-2;0]</math></p> <p>ومتناقص على المجال<br/>.<math>[0;4]</math></p> | <p>متناقصة على المجال<br/>.<math>[-2;4]</math></p> | <p>متزايدة على المجال<br/>.<math>[-2;4]</math></p> | <p>(6) دالة معرفة على المجال<br/><math>[-2;4]</math> بتمثيلها البياني التالي:</p>  <p>الدالة <math>f</math> ...</p> |
| <p>لا تقبل قيمة حدية<br/>على <math>\mathbb{R}</math>.</p>   | <p>القيمة الصغرى<br/>عند العدد 0.</p>              | <p>القيمة الكبرى<br/>عند العدد 0.</p>              | <p>(7) دالة معرفة على <math>\mathbb{R}</math> كما يلي:<br/><math>f(x) = x^2 - 1</math><br/>الدالة <math>f</math> تقبل ...</p>  |
| <p>لا تقبل قيمة حدية<br/>على <math>\mathbb{R}</math>.</p>   | <p>القيمة الصغرى 1<br/>عند العدد 0.</p>            | <p>القيمة الكبرى 1<br/>عند العدد 0.</p>            | <p>(8) دالة معرفة على <math>\mathbb{R}</math> كما يلي:<br/><math>f(x) = -x^2 + 1</math><br/>الدالة <math>f</math> تقبل ...</p>   |

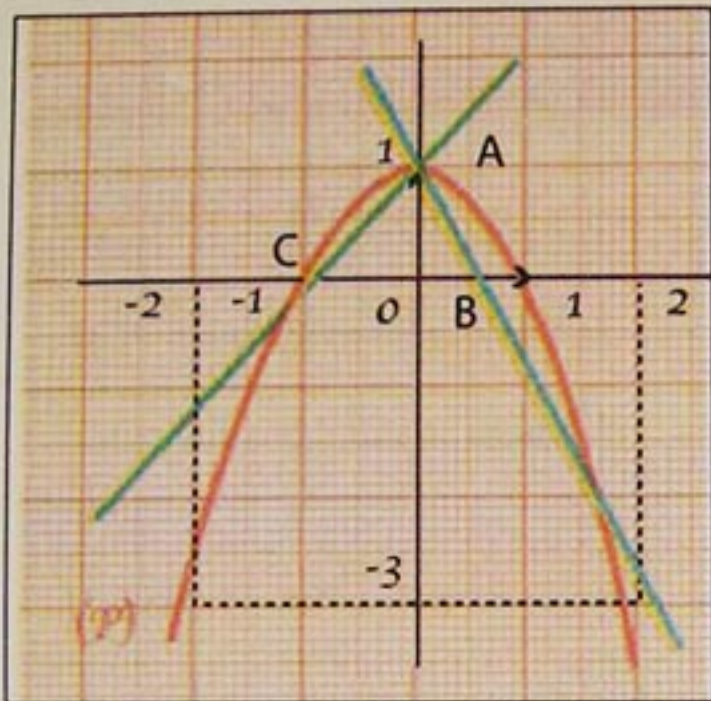


# انشطة تمهيدية

نشاط 3 : مستقيمت قاطعة لمنحن تشمل نقطة

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = -x^2 + 1$

(P) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد



ومتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$

الهدف هو دراسة معامل توجيه

كل مستقيم يقطع (P) في النقطة A.

(1) أحسب معامل توجيه كل من

المستقيمين (AC) و (AB).

(2) عدد حقيقي غير منعدم و M النقطة من

(P) التي فاصلتها  $1+h$ .

(أ) بين أن معامل توجيه القاطع (AM) للمنحنى (P) هو  $m = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

ثم عبّر عن  $m$  بدلالة  $h$ .

(ب) أكمل الجدول التالي:

|     |      |       |        |       |      |     |
|-----|------|-------|--------|-------|------|-----|
| $h$ | -0,1 | -0,01 | -0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 |
| $m$ |      |       |        |       |      |     |

كيف تصبح قيم  $m$  عندما يأخذ  $h$  قيما «أقرب فأقرب» من العدد 0؟



## نشاط 4 : مفهوم السرعة اللحظية

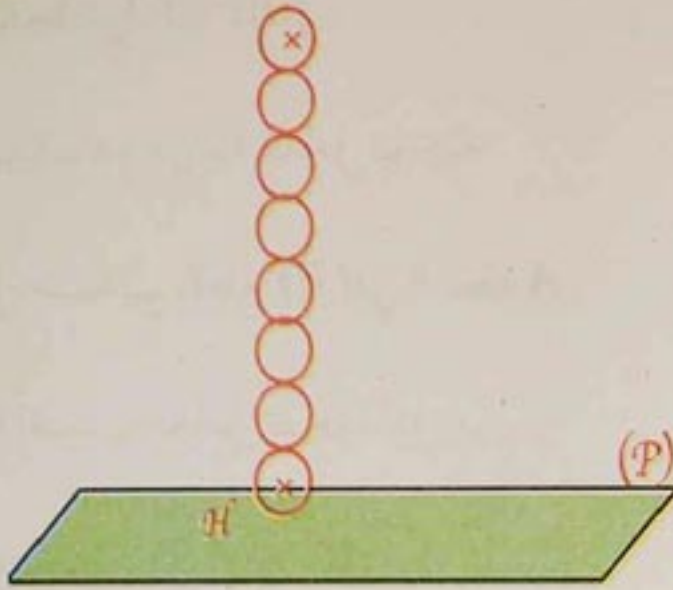
تُطلق كرية من نقطة 0 واقعة على ارتفاع 10m من السطح (P)،  
تعطي المسافة  $d(t)$  التي تقطعها الكرية عند اللحظة  $t$   
بالدستور:  $d(t) = 5t^2$  حيث تقدر  $t$  بالثواني و  $d(t)$  بالأمتار.

يرمز  $v(t)$  إلى سرعة الكرية في اللحظة  $t$ .

في اللحظة  $t = 2$ ، تكون

سرعة الكرية المتحركة هي  $v(2)$ .

كيف تحسب هذه السرعة اللحظية؟



( يمكن إستعمال السرعة المتوسطة بين

اللحظتين 2 و  $2 + h$  عندما يكون  $h$  قريبا

من العدد 0).

1 - تحقق أن السرعة المتوسطة للكزية بين اللحظتين 2 و  $2 + h$  هي  $5h + 20$ .

(نذكر أن السرعة المتوسطة بين  $t$  و  $t + h$  حيث  $h \neq 0$  تحسب بالدستور التالي:

$$v(t) = \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$$

2 - احسب قيم هذه السرعة المتوسطة الموافقة لقيم  $h$  التالية:

0,1 ; -0,05 ; 0,05 ; 0,01 ; 0,0001.



## 1 - العدد المشتق

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  ؛  $a$  عنصر من  $I$ .

( $\gamma$ ) المنحنى الممثل لها في المستوي

المنسوب إلى معلم  $(0; i^{\rightarrow}, j^{\rightarrow})$ . (الشكل)

$M$  و  $A$  نقطتان من المنحنى ( $\gamma$ )، إحداثيا هما

$(a; f(a))$  ؛  $(x; f(x))$  بهذا الترتيب.

عندما يأخذ  $x$  قيما أقرب فأقرب من  $a$

يأخذ  $f(x)$  قيما أقرب فأقرب من  $f(a)$ .

وبالتالي  $M$  تقترب أكثر فأكثر من النقطة

الثابتة  $A$ .

**أ - النهاية عند 0**

نقبل أن:

إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد 0 فإن حساب نهاية  $f$  عند 0 يؤدي إلى حساب  $f(0)$ .

نكتب:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

ونقرأ: نهاية  $f(x)$  عندما يؤدي  $x$  إلى 0 تساوي  $f(0)$ .

**مثال**

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  وبالتالي  $f$  معرفة عند العدد 0 و  $f(0) = 3$ .

عندما يؤدي  $x$  إلى العدد 0 فإن  $f(x)$  يؤدي إلى  $f(0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 3) = 3 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \quad \text{أي}$$



ب - نسبة تزايد دالة بين عددين حقيقيين

تعريف

$a$  ،  $b$  عددان حقيقيان مختلفان من المجال  $I$ . نسبة تزايد الدالة بين  $a$  و  $b$  هي النسبة  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

التفسير البياني

النسبة  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  هي معامل توجيه المستقيم  $(AB)$  القاطع للمنحنى  $(\gamma)$

حيث  $A(a; f(a))$  و  $B(b; f(b))$  نقطتان من المنحنى  $(\gamma)$ .

بوضع  $b = a + h$  ، يكون  $b - a = h$  ونسبة

تزايد  $f$  بين  $a$  و  $b$  تكتب  $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

- يرمز عادة لهذه النسبة بالرمز  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

مثال 1

$f$  هي الدالة «مربع». من أجل  $a = 2$

تكون نسبة تزايد الدالة  $f$  بين  $2$  و  $2 + h$  هي:

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{2 + h - 2} = \frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

إذن: عندما يؤول  $h$  إلى  $0$  فإن  $2 + h$  يؤول إلى  $2$

والعدد  $h + 4$  يؤول إلى  $4$ .

وبالتالي:  $\lim (h + 4) = 4$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4 \text{ أو أيضا } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 4$$

مثال 2

الكلفة الهامشية لوحدة منتجة. إذا كانت  $C(x)$  هي الكلفة الإجمالية لإنتاج  $x$  وحدة

فإن الكلفة الهامشية  $C_m(x)$  المتعلقة بالوحدة المنتجة ذات الرقم  $x$  هي تزايد الكلفة عند

إنتاج هذه الوحدة رقم  $x$ . حيث  $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$ .



ج) العدد المشتق عند  $a$   
مبرهنة وتعريف

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  .  $a$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$  .  
إذا كانت نهاية الدالة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  عند  $h \rightarrow 0$  عددا حقيقيا  
عندما يؤول  $h$  إلى  $0$  فإن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند  $a$  .

نهاية هذه الدالة، إن وجدت، تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  ونرمز لها بالرمز  $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ونكتب}$$

**ملاحظة:** إذا كان نهاية الدالة  $f'(a)$  عند  $h \rightarrow 0$  غير منتهية

(أي  $+\infty$  أو  $-\infty$ ) فإن الدالة  $f$  غير قابلة للإشتقاق عند  $a$  .

**مثال**

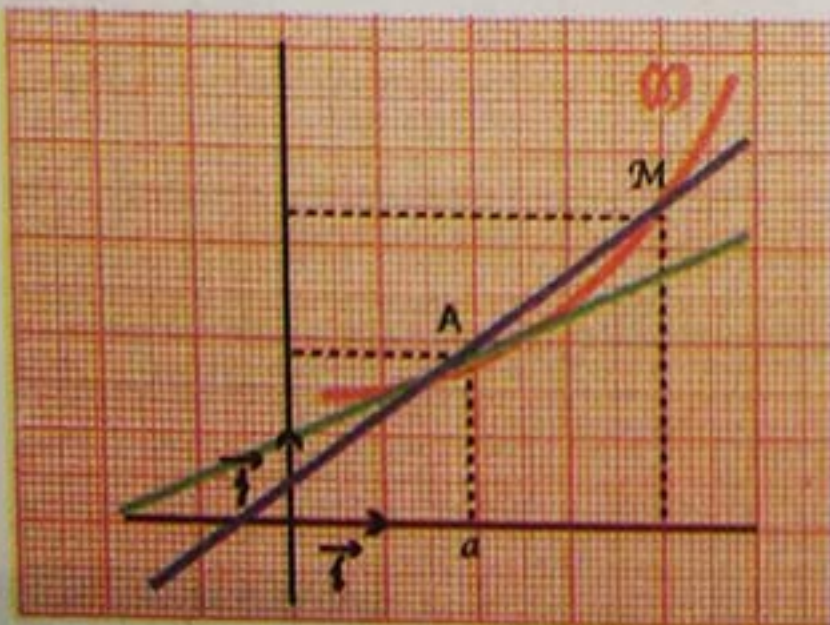
$f$  هي الدالة « مربع » .

- الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند  $2$  (لأن  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  هي عدد حقيقي).

- العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $2$  هو  $f'(2)$  حيث  $f'(2) = 4$  .

**التفسير البياني**

$f$  دالة قابلة للإشتقاق عند  $a$  .



( $\gamma$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم  $(\vec{i}, \vec{j}, 0)$ . (الشكل).  
 $A$  نقطة من ( $\gamma$ ) فاصلتها  $a$  وترتيبها  $f(a)$ .  
 $M$  نقطة متغيرة على ( $\gamma$ ) فاصلتها  $a+h$  وترتيبها  $f(a+h)$  ;  $h$  عدد حقيقي قريب من العدد  $0$  .



عندما يؤول  $h$  إلى 0 فإن  $a+h$  يؤول إلى  $a$  وبالتالي فالنقطة  $M$  تقترب من النقطة  $A$ .

إذن النسبة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  تؤول إلى العدد  $f'(a)$ .

والقاطع  $(AM)$  للمنحني  $(\gamma)$  يقترب من وضعية المستقيم  $(T)$ . (الشكل)

وهي الوضعية "النهائية" للقاطع  $(AM)$

2 - معادلة المماس لمنحن عند نقطة

$f$  دالة معرفة على مجال مفتوح  $I$ .

$(\gamma)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

تعريف

نسمي مماسا للمنحني  $(\gamma)$  عند نقطة  $A$ ، فاصلتها  $a$ ، المستقيم الذي يشمل  $A$  ومعامل توجيهه العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$ .

- المعادلة المختصرة لهذا المماس هي:  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

ملاحظة

إذا كان  $f'(a) = 0$  فإن معادلة المماس  $(T)$  تكتب  $y = f(a)$ .

في هذه الحالة، المماس  $(T)$  يوازي محور الفواصل.

مثال:  $f$  هي الدالة «مربع» و  $(P)$  المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

- الدالة «مربع» قابلة للاشتقاق عند 2 و  $f'(2) = 4$ .

- معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(P)$  عند النقطة ذات الفاصلة 2 هي:

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$



لدينا  $f(2) = 4$  . إذن المعادلة المختصرة للمماس ( $T$ ) للمنحنى ( $\gamma$ ) عند النقطة التي فاصلتها 2 هي :  $y = 4x - 4$  .

## 3- الدوال المشتقة

أ- قابلية للإشتقاق لدالة على مجال  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  جزئي من  $\mathbb{R}$  .

### مبرهنة

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $I$  إذا وفقط إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  .

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $I$  فإن العدد المشتق للدالة  $f$  عند كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  موجود .

### ب - الدالة المشتقة لدالة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  جزئي من  $\mathbb{R}$  .

### مبرهنة

الدالة  $f'$  المعرفة على  $I$  والتي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ، العدد المشتق  $f'(x)$  للدالة  $f$  عند  $x$  تسمى الدالة المشتقة للدالة  $f$  .

نكتب :  $f' : x \mapsto f'(x)$

ملاحظة : نذكر أن  $f'(x)$  معرف كما يلي :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad h: \text{ عدد حقيقي غير منعدم} .$$

مثال  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 3x - 5$  .

$x$  عدد حقيقي . العدد المشتق لدالة  $f$  عند  $x$  هو  $f'(x)$

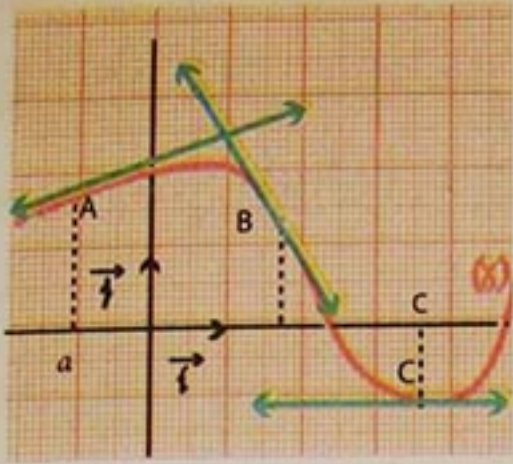
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{حيث}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = 3$$

إذن الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f'(x) = 3$  .



التفسير البياني



( $\gamma$ ) هو التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

إذا كانت  $f$  قابلة للإشتقاق على مجال  $I$  فإن تمثيلها البياني ( $\gamma$ ) يقبل مماسا عند كل نقطة منه، ومعامل توجيه هذا المماس هو  $f'(x)$  حيث

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- يمكن دراسة الوضع النسبي للمنحنى ( $\gamma$ ) بالنسبة إلى المماس.

ج- الدوال المشتقة لدوال مألوفة

1- الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث  $f(x) = k$

$k$  عدد حقيقي.  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = k$ .

الدالة  $f$  هي دالة ثابتة.

$x$  عدد حقيقي و  $h$  عدد حقيقي غير منعدم.

$$\text{لدينا: } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\text{إذن: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ؛  $f'(x) = 0$ .

مبرهنة

$k$  عدد حقيقي. الدالة  $f$  حيث  $f(x) = k$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = 0$ .

نقول إن الدالة المشتقة لدالة ثابتة هي الدالة المنعدمة.



## 2 - الدالة المشتقة لدالة تآلفية

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = ax + b$ ؛  $a, b$  عددان حقيقيان. الدالة  $f$  هي دالة تآلفية.

$x$  عدد حقيقي و  $h$  عدد حقيقي غير منعدم.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(a(x+h) + b) - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

$$\text{إذن } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \text{ أي } f'(x) = a$$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = a$ .

### مبرهنة

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = ax + b$ ؛  $a, b$  عددان حقيقيان، قابلة للإشتقاق

على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = a$ .

**حالة خاصة:** الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x$

هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = 1$ .

**مثال:** الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = -5x + 1$

هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = -5$ .

## 3 - الدالة المشتقة للدالة «مربع»

$f$  هي الدالة «مربع» المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2$

$x$  عدد حقيقي و  $h$  عدد حقيقي غير منعدم.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = 2x$ .



## مبرهنة

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = 2x$ .

## 4 - الدالة المشتقة للدالة «مكعب»

فهي الدالة «مكعب» المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3$   
 $x$  عدد حقيقي و  $h$  عدد حقيقي غير منعدم.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \quad \text{إذن}$$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = 3x^2$ .

## مبرهنة

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^3$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = 3x^2$ .

## 5 - الدالة المشتقة للدالة $f$ حيث $f(x) = x^n$ ؛ $n$ عدد طبيعي أكبر تماما من 1

فهي الدالة «قوة» المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^n$ ،  $n$  عدد طبيعي أكبر تماما من 1.  
 نقبل بدون برهان المبرهنة التالية:

## مبرهنة

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^n$ ؛  $n$  عدد طبيعي أكبر تماما من 1، قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = nx^{n-1}$ .



مثال

الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^4$  هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = 4x^3$ .

6 - الدالة المشتقة للدالة «مقلوب»

$f$  هي الدالة «مقلوب»، معرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  و  $x$  و  $h$  عددان حقيقيان غير منعدمين.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

لدينا

$$= -\frac{1}{x^2 + xh}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}$$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم،  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

مبرهنة

الدالة  $f$  المعرفة كما يلي  $f(x) = \frac{1}{x}$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

7 - الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ؛  $n$  عدد طبيعي غير منعدم

الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ . نقبل بدون برهان المبرهنة التالية:

مبرهنة

الدالة  $f$  المعرفة كما يلي  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ؛  $n$  عدد طبيعي غير منعدم قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ .



مثال

$f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

- الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  وقابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$ .

- الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي الدالة  $f'$  المعرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  كما يلي:  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ .

### 8 - الدالة المشتقة للدالة «الجذر التربيعي»

الدالة  $f$  هي الدالة «الجذر التربيعي»، معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

$x$  و  $h$  عدنان حقيقيان موجبان تماما.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ينتج أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

مبرهنة

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \sqrt{x}$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .



الجدول التالي يلخص الدوال المشتقة للدوال المألوفة .

| الدالة $f$ حيث                                    | معرفة على                            | قابلة للإشتقاق على                        | ودالتها المشتقة $f'$<br>معرفة كما يلي: |
|---|--------------------------------------|---|--|
| $k \in \mathbb{R}, f(x) = k$                      | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = 0$                            |
| $f(x) = x$  | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = 1$                            |
| $f(x) = ax + b$<br>$a, b$ عدنان حقيقيان           | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = a$                            |
| $f(x) = x^2$                                      | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = 2x$                           |
| $f(x) = x^3$                                      | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = 3x^2$                         |
| $f(x) = x^n$<br>$n > 1, n \in \mathbb{N}$         | $\mathbb{R}$                         | $\mathbb{R}$                              | $f'(x) = nx^{n-1}$                     |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                              | $] - \infty; 0[ \cup ] 0; + \infty[$ | $] - \infty; 0[$<br>و<br>$] 0; + \infty[$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$               |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$<br>$n$ عدد طبيعي غير منعدم | $] - \infty; 0[ \cup ] 0; + \infty[$ | $] - \infty; 0[$<br>و<br>$] 0; + \infty[$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$           |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$                            | $] - \infty; 0[ \cup ] 0; + \infty[$ | $] - \infty; 0[$<br>و<br>$] 0; + \infty[$ | $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$               |
| $f(x) = \sqrt{x}$                                 | $] 0; + \infty[$                     | $] 0; + \infty[$                          | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$          |



4 - عمليات على الدوال المشتقة

$f, g$  دالتان معرفتان على نفس المجال المفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  ،  $k$  عدد حقيقي .

أ- الدالة المشتقة لمجموع دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان  $f$  و  $g$  قابلتين للإشتقاق على المجال  $I$  فإن الدالة  $f + g$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها المشتقة  $(f + g)'$  معرفة كما يلي :  
من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  ،  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  .

نكتب :  $(f + g)' = f' + g'$

البرهان :  $h$  عدد حقيقي غير منعدم و  $x$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$  حيث  $x+h$  ينتمي إلى  $I$  .

$$R(x) = \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

نعلم أن  $f$  و  $g$  قابلتان للإشتقاق على  $I$  .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(x) = f'(x) + g'(x) = (f' + g')(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(x) = (f + g)'(x)$$

$$\text{فإن } (f + g)'(x) = (f' + g')(x) .$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  .



مثال

•  $f$ ،  $g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$   
 - الدالة  $f + g$  معرفة على المجال  $0; +\infty[$  كما يلي:  $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$   
 - الدالة  $f + g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $0; +\infty[$  ودالتها المشتقة  $(f + g)'$   
 معرفة كما يلي:  $(f + g)'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

حالات خاصة:

(1) إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $I$ ، فإن الدالة  $-f$  قابلة للإشتقاق على  $I$   
 ودالتها المشتقة  $(-f)'$  معرفة كما يلي:  $(-f)'(x) = -f'(x)$   
 (2) إذا كانت الدالتان  $f$  و  $g$  قابلتين للإشتقاق على المجال  $I$  فإن الدالة  $f - g$  قابلة للإشتقاق  
 على المجال  $I$  ودالتها المشتقة  $(f - g)'$  معرفة على  $I$  كما يلي:  
 $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

ب - الدالة المشتقة لجداء دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان  $f$  و  $g$  قابلتين للإشتقاق على المجال  $I$  فإن الدالة  $f.g$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها المشتقة معرفة على  $I$  كما يلي:  
 $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

**برهان:**  $f$  عدد حقيقي غير منعدم  $x$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$  حيث  $x + h$  ينتمي إلى  $I$ .

$$\text{النسبة } R(x) = \frac{(f.g)(x+h) - (f.g)(x)}{h} \text{ يمكن أن تكتب:}$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{(f.g)(x+h) - (f.g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + [g(x+h) - g(x)]f(x)}{h} \end{aligned}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} g(x+h) = f'(x)g(x) \text{ لدينا:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} f(x) = g'(x)f(x) \text{ و}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (f'g + g'f)(x) \text{ إذن}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(x) = (f'g + g'f)(x) \text{ إذن } (fg)'(x) = (f'g + g'f)(x) \text{ نعلم أن}$$

مثال

$p$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $p(x) = x^2(3x - 1)$ .

$f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 3x - 1$ .

– الدالتان  $f$  و  $g$  قابلتان للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

وبالتالي الدالة  $p$  حيث  $p = f \cdot g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

– الدالة المشتقة  $p'$  للدالة  $p$  معرفة كما يلي:

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ؛  $p'(x) = 2x(3x - 1) + x^2 \times 3$ ؛

أي الدالة  $p'$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $p'(x) = 9x^2 - 2x$ .

حالات خاصة

(1) نضع، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$ ،  $(f^2)(x) = (f \cdot f)(x)$ .

$$= f(x) f(x)$$

إذا كانت  $f$  قابلة للإشتقاق على  $I$  فإن الدالة  $f^2$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها المشتقة

$$(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x) \text{ كما يلي}$$

(2) إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $I$  فإن الدالة  $kf$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها

المشتقة  $(kf)'$  معرفة كما يلي:  $(kf)'(x) = kf'(x)$ ، (حيث  $k$  عدد حقيقي).



1)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (3x - 1)^2$ .  
 $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = 2 \cdot (3x - 1) \cdot 3$   
 أي:  $f'(x) = 18x - 6$

2)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 5(x^2 - 1)$   
 $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $g'$  معرفة كما يلي:  $g'(x) = 5 \times 2x$   
 أي:  $g'(x) = 10x$

## ج) الدالة المشتقة لمقلوب دالة مبرهنة

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على المجال  $I$  حيث، من أجل كل

$$عدد  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \neq 0$$$

فإن الدالة  $\frac{1}{f}$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها المشتقة  $\left(\frac{1}{f}\right)'$  معرفة كما يلي:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad f(x) \neq 0 \text{ حيث } x \text{ من } I$$

## برهان

$h$  عدد حقيقي غير منعدم.

$x$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$  حيث  $x + h$  ينتمي إلى  $I$  و  $f(x) \neq 0$ .

عندما يتحول  $h$  إلى العدد 0 فإن  $x+h$  يتحول إلى  $x$ . وبالتالي:  $f(x+h)$  يتحول إلى  $f(x)$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) \text{ أي}$$

نفرض أن  $f$  قابلة للإشتقاق على  $I$ .

$$النسبة  $R(x) = \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h}$  يمكن أن تكتب:$$

$$R(x) = \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$$



$$R(x) = \frac{f(x) - f(x+h)}{h \cdot f(x) \cdot f(x+h)} = -\frac{1}{f(x) \cdot f(x+h)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

لدينا  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{f(x) \cdot f(x+h)} = -\frac{1}{[f(x)]^2}$

إذن  $\lim_{h \rightarrow 0} R(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

بما أن  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} R(x)$  فإن  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  حيث  $x+h$  ينتمي إلى  $I$  و  $f(x) \neq 0$ ،

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال

$g$  هي الدالة المعرفة على  $\left] \frac{2}{5}; +\infty \right[$  كما يلي:  $g(x) = \frac{1}{5x-2}$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال ودالتها المشتقة  $g'$  معرفة على

كما يلي:  $g'(x) = \frac{-5}{(5x-2)^2}$

**حالة خاصة:**  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.  $\left] \frac{2}{5}; +\infty \right[$

الدالة  $f$  المعرفة على  $\left] -\infty; 0 \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$  كما يلي  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  قابلة للاشتقاق على

$\left] -\infty; 0 \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة على  $\left] -\infty; 0 \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$

كما يلي:  $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

مثال

فهي الدالة المعرفة على  $\left] -\infty; 0 \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $\left] -\infty; 0 \right[$  و  $\left] 0; +\infty \right[$  ودالتها المشتقة  $f'$

معرفة على  $\left] -\infty; 0 \right[ \cup \left] 0; +\infty \right[$  كما يلي:  $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$



## د - الدالة المشتقة لحاصل قسمة دالتين

مبرهنة

إذا كانت الدالتان  $f$  و  $g$  قابلتين للإشتقاق على المجال  $I$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $g(x) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{f}{g}$  قابلة للإشتقاق على  $I$  ودالتها المشتقة  $\left(\frac{f}{g}\right)'$  معرفة كما يلي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

لإثبات صحة هذه المبرهنة، نضع  $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ ، ثم نطبق المبرهنتين المتعلقتين بالدالة المشتقة لجداء دالتين والدالة المشتقة لمقلوب دالة.

مثال

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+1}{4x+6}$$

و  $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة على  $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$  كما يلي:

$$f'(x) = \frac{8}{(4x+6)^2}$$

## هـ - الدالة المشتقة للدالة كثير الحدود

$f$  هي الدالة كثير الحدود المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث  $n$  عدد طبيعي و  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  أعداد حقيقية و  $a_n \neq 0$ .

مبرهنة

الدالة كثير الحدود  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:

$$f'(x) = n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots + 2a_1 x + a_1$$

لإثبات صحة هذه المبرهنة، نطبق المبرهنتات المتعلقة بالدوال المشتقة للدالة  $x \rightarrow x^n$  والدالة  $x \rightarrow kf(x)$  و لمجموع دالتين.

مثال:  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f'(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$

$f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:  $f'(x) = 12x^2 - 4x$



و - الدالة المشتقة للدالة التناظرية

الدالة التناظرية هي الدالة  $f$  المعرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  حيث  $d, c, b, a$  أعداد حقيقية و  $c \neq 0$  و  $ad - bc \neq 0$ .

$f$  دالة ناطقة (أي حاصل قسمة دالتين كثيري الحدود).

$f$  معرفة على المجموعة  $]-\infty; -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}; +\infty[$  وقابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]-\infty; -\frac{d}{c}[$  و  $]-\frac{d}{c}; +\infty[$ .

مبرهنة

الدالة المشتقة  $f'$  للدالة التناظرية  $f$  المعرفة على المجموعة  $]-\infty; -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}; +\infty[$  هي الدالة المعرفة على  $]-\infty; -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}; +\infty[$  كما يلي:  $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ .

برهان

بوضع  $h(x) = cx + d$  و  $g(x) = ax + b$

لدينا  $g'(x) = a$  و  $h'(x) = c$

نعلم أن  $f'(x) = \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{[h(x)]^2}$

أي  $f'(x) = \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

وبالتالي:  $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

مثال

فهي الدالة المعرفة على  $]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$  كما يلي  $f(x) = \frac{x + 1}{4x - 2}$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]-\infty; \frac{1}{2}[$  و  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  ودالتها المشتقة  $f'$  معرفة

كما يلي:  $f'(x) = \frac{-6}{(4x - 2)^2}$



الجدول التالي يلخص العمليات على الدوال المشتقة.

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للإشتقاق على المجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  ؛  $k$  عدد حقيقي.

| الدالة   | قابلة للإشتقاق على                                     | ودالتها المشتقة هي   |
|--|--|--|
| $f + g$  | $I$  | $f' + g'$  |
| $-f$   | $I$  | $-f'$  |
| $f - g$  | $I$  | $f' - g'$  |
| $k.f$  | $I$  | $k.f'$   |
| $f^2$  | $I$  | $2ff'$   |
| $\frac{1}{f}$  | $I$ باستثناء قيم $x$ حيث $f(x) = 0$                    | $-\frac{f'}{f^2}$  |
| $\frac{f}{g}$  | $I$ باستثناء قيم $x$ حيث $g(x) = 0$                    | $\frac{f'g - g'f}{g^2}$  |
| $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ | $\mathbb{R}$   | $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$ |
| $c \neq 0; f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$                           | $]-\infty; -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}; +\infty[$ | $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$                                 |



## 5 - الدالة المشتقة وإتجاه التغير

$f$  دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال  $I$ .  
نقبل بدون برهان المبرهنة التالية:

### مبرهنة

- (أ) إذا كان؛ من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$  فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .  
(ب) إذا كان؛ من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) < 0$  فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .  
(ج) إذا كان؛ من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .

### ملاحظة

يبقى النصان (أ) - (ب) في المبرهنة السابقة صحيحين عندما ينعدم  $f'(x)$  من أجل عدد منته من قيم  $x$ .

### مثال

- $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3 - 3x$   
•  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد  $x$ ،  $f'(x) = 3x^2 - 3$   
• إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل.

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | +         |

- $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $]-\infty; -1]$  و  $[1; +\infty[$ .  
•  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-1; 1[$ .

## الدالة الرتيبة - الدالة الرتيبة تماما على مجال

### مبرهنة

- الدالة  $f$  رتيبة على المجال  $I$  إذا وفقط إذا كانت متزايدة أو متناقصة على  $I$ .  
- الدالة  $f$  رتيبة تماما على  $I$  إذا وفقط إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على  $I$ .



## 6 - القيم الحدية لدالة

$f$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$ ؛  $x_0$  عنصر من  $[a; b]$ .

### مبرهنة

إذا إنعدم  $f'(x)$  عند  $x_0$  وغير إشارته فإن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عند  $x_0$ .

### ملاحظة

عموماً، تقبل دالة  $f$  قيمة حدية «محلية» عند  $x_0$  إذا وجد مجال  $I$  يشمل  $x_0$  حيث تكون هذه القيمة حدية للدالة  $f$  على  $I$ .

الجدولان التاليان يوضحان طبيعة القيمة الحدية حسب إتجاه تغير الدالة  $f$ .

|         |     |       |     |
|---------|-----|-------|-----|
| $x$     | $a$ | $x_0$ | $b$ |
| $f'(x)$ | +   | 0     | -   |
| $f(x)$  |     |       |     |

|         |     |       |     |
|---------|-----|-------|-----|
| $x$     | $a$ | $x_0$ | $b$ |
| $f'(x)$ | -   | 0     | +   |
| $f(x)$  |     |       |     |

$f(x_0)$  هي القيمة الكبرى  
للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ .

$f(x_0)$  هي القيمة الصغرى  
للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ .

### مثال

- $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - 2x$ .
- الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = 2x - 2$ .
- إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R}$  ملخصة في الجدول التالي:

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |

- الدالة  $f$  تقبل القيمة الصغرى عند 1 وهي  $f(1) = -1$  حيث  $f(1) = -1$ .



## ملاحظة

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3 - 3x$

•  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .

• إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول:

|         |           |      |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | +         |

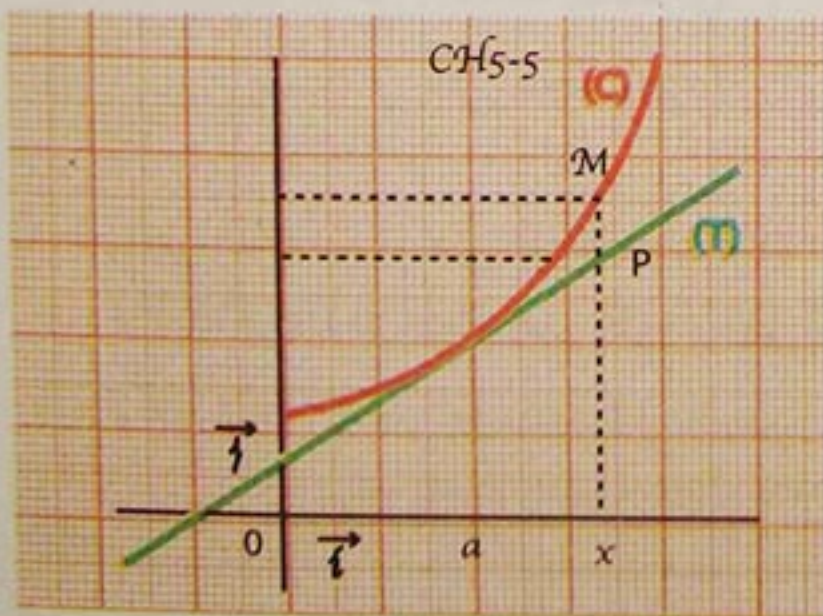
•  $f(1) = -2$  و  $f(-1) = 2$

• نلاحظ أن  $f'(x)$  تنعدم وتغير الإشارة عند  $-1$  و  $1$  ومع هذا فإن  $f(-1)$  و  $f(1)$  ليستا قيمتين حديتين للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

لكن على المجال  $]-\infty; 1]$ ؛  $f(-1)$  هي القيمة الكبرى للدالة  $f$  وعلى المجال  $[-1; +\infty[$ ؛  $f(1)$  هي القيمة الصغرى للدالة  $f$ .

## 7- التقريب التآلفي المماسي لدالة

$f$  دالة معرفة على المجال  $I$  يشمل العدد الحقيقي  $a$ ، وتقبل الإشتقاق عند  $a$ .



(c) التمثيل البياني لها في معلم  $(0; i, j)$ .  
 A نقطة فاصلتها  $a$ . (T) مماس  
 المنحني (c) عند النقطة A، معادلته  

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
  
 هذا المماس هو التمثيل البياني للدالة التآلفية  $g$   

$$g(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$



كلما اقترب  $x$  من  $a$ ، اقترب العدد  $f(x)$  من العدد  $f'(a)(x - a) + f(a)$ .

نقول إن الدالة التآلفية  $g$  هي التقريب التآلفي المناسب للدالة  $f$  عند  $a$ .

نكتب عادة:  $f(x) \simeq f'(a)(x - a) + f(a)$ .

مثال

$f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

( $\gamma$ ) التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; i^*, j^*)$ .

معادلة مماس ( $\gamma$ ) عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $-1$  هي:

$$y = -10x - 2 \quad \text{أي} \quad y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

إذن التقريب التآلفي المناسب للدالة  $f$  حيث  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$  عند العدد  $-1$

هو الدالة التآلفية  $g$  حيث  $g(x) = -10x - 2$ .

نكتب  $3x^2 - 4x + 1 \simeq -10x - 2$  من أجل  $x$  قريب من  $-1$ .

$$\text{مثال: } f\left(-\frac{5}{7}\right) \simeq \frac{36}{7}$$

ملاحظات

• يمكن لدالة تآلفية يشمل المستقيم الممثل لها النقطة  $A$ ، ذات الفاصلة  $a$ ، أن تكون تقريبا تآلفيا لدالة  $f$  عند العدد  $a$ . نقبل أن أفضل تقريب تآلفي للدالة  $f$  عند  $a$  هي الدالة التآلفية الممثلة بمماس منحنى الدالة  $f$  عند النقطة  $A$  والذي يسمى التقريب التآلفي المناسب للدالة  $f$  عند  $a$ .

•  $h$  عدد حقيقي غير منعدم، حيث  $a + h$  ينتمي إلى  $I$ . بوضع  $x = a + h$  يكون

$$f(a + h) \simeq hf'(a) + f(a)$$



## ب - تقريب // زيادة متتابة

• حالة زيادتين متتابعين

نفرض أن منتوجا معيناً يخضع إلى زيادتين متتابعين قدرهما 1% . ليكن الثمن الأولي  $P_0$  ،  
الثمن بعد الزيادة الأولى  $P_1$  والثمن بعد الزيادة الثانية للمنتوج  $P_2$  .

$$\text{لدينا: } P_1 = (1 + 0,01)P_0 \text{ و } P_2 = (1 + 0,01)P_1$$

$$\text{إذن: } P_2 = (1 + 0,01)^2 P_0$$

ليكن  $P'_2$  ثمن المنتوج إذا خضع إلى زيادة قدرها 2% من  $P_0$  .

$$\text{لدينا } P'_2 = (1 + 0,02)P_0$$

• حساب:  $P_2 - P'_2$

$$P_2 - P'_2 = (1 + 0,01)^2 P_0 - (1 + 0,02)P_0 = 10^{-4} P_0$$

يمكن القول أن  $P'_2$  قريب من  $P_2$  .

## خاصية

من أجل قيمة  $t$  صغيرة، تكون زيادتان متتابعان، قدر كل منها  $t$  % قريبتين من  
زيادة قدرها  $(2t)$  % .

## ملاحظة

نتحصل على نفس النتيجة في حالة تخفيضين متتابعين .

• حالة // زيادة متتابة قدر كل واحدة منها  $t$  %

## خاصية

من أجل قيمة  $t$  صغيرة، تكون  $n$  زيادة متتابة قدر كل واحدة منها  $t$  % قريبة من  
زيادة قدرها  $(nt)$  % .

## مثال

تم إيداع مبلغ قدره 10000 دينار بنسبة شهرية قدرها 0,25 % .

• بعد سنة، يزداد هذا المبلغ بنسبة قدرها 3 % (أي  $12 \times 0,25$ ) .

• معامل الزيادة خلال شهر واحد هو 1,0025 (أي  $1 + 0,25\%$ ) .



• معامل الضرب الإجمالي ( خلال سنة كاملة ) هو  $C_{M_0}$  حيث

$$C_{M_0} = 1,0025 \times 1,0025 \times \dots \times 1,0025$$

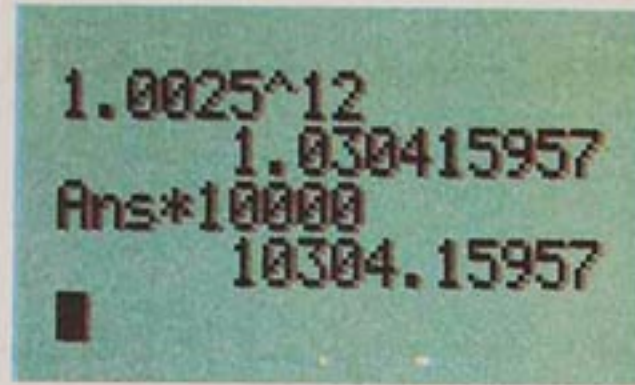
$$= (1,0025)^{12} \simeq 1,0304\dots$$

• بعد سنة، يصبح المبلغ المدخر مساويا  $10000 \times 1,0304$  أي 10304 دينار.

• باستعمال حاسبة علمية، نلاحظ أنه من أجل 10000 دينار

مدخرة يكون الفارق هو 0,16 وهو مدور العدد 10304,15957

إلى  $10^{-2}$  بالزيادة ( أي 10304,16 - 10304 ).



```

1.0025^12
1.030415957
Ans*10000
10304.15957
    
```



## ① حساب نسبة تزايد دالة

## طريقة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I : a, b$  عدنان حقيقيان مختلفان من  $I$ .

لحساب نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $a$  و  $b$ ، نحسب العدد الحقيقي  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## ملاحظات

(1) نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $a$  و  $b$  تسمى أيضا التزايد المتوسط للدالة  $f$  بين  $a$  و  $b$ .

(2) نعبر، هندسيا، عن تساوي تزايدين متوسطين بين قيمتين بقطعتي مستقيم حاملهما متوازيان.

## تمرين 1

$f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $[-2; 2]$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - x$ .  
عين نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $-1$  و  $1$  ثم بين العددين  $0$  و  $2$ .

## حل

نسبة تزايد الدالة بين العددين  $-1$  و  $1$  هي  $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f(-1) = 2$

$$\text{إذن } \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

وبالتالي: نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $-1$  و  $1$  هي  $-1$ .

• نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $0$  و  $2$  هي  $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$

لدينا  $f(2) = 2$  و  $f(0) = 0$

$$\text{إذن } \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

وبالتالي: نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين  $0$  و  $2$  هي  $1$ .



تمرين 2

الكمية التي تنتجها آلة في مصنع، بدلالة مدة تشغيلها ممثلة في الجدول التالي:

|                            |   |     |     |     |     |     |     |     |   |     |     |
|----------------------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----|-----|
| $x$ (مدة التشغيل بالساعات) | 0 | 0,5 | 1   | 1,5 | 2   | 2,5 | 3   | 3,5 | 4 | 4,5 | 5   |
| $p(x)$ (الإنتاج بالأطنان)  | 0 | 1   | 1,8 | 2,2 | 3,6 | 4,3 | 4,8 | 5,5 | 7 | 7,5 | 8,2 |

- بين أن التزايد المتوسط بين المديتين 0 و 2 يساوي التزايد المتوسط بين المديتين 3 و 4,5.
- تحقق، هندسيا، من صحة هذه النتيجة.

حل: 1) التزايد المتوسط بين المديتين 0 و 2 هو  $\frac{p(2) - p(0)}{2 - 0}$

لدينا  $p(0) = 0$  و  $p(2) = 3,6$

$$\text{إذن } \frac{p(2) - p(0)}{2 - 0} = \frac{3,6 - 0}{2} = 1,8$$

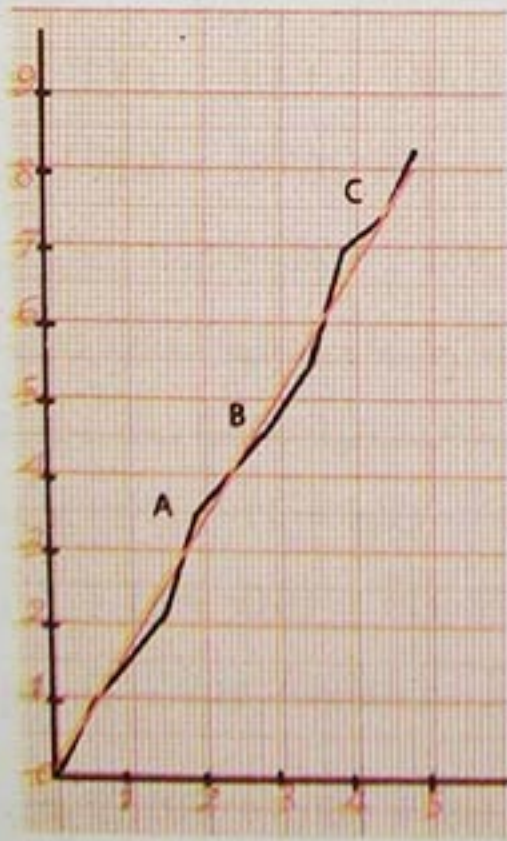
• التزايد المتوسط بين المديتين 3 و 4,5 هو  $\frac{p(4,5) - p(3)}{4,5 - 3}$

لدينا  $p(3) = 4,8$  و  $p(4,5) = 7,5$

$$\text{إذن } \frac{p(4,5) - p(3)}{4,5 - 3} = \frac{7,5 - 4,8}{1,5} = 1,8$$

$$\text{ينتج أن: } \frac{p(2) - p(0)}{2 - 0} = \frac{p(4,5) - p(3)}{4,5 - 3}$$

أي أن التزايد المتوسط بين المديتين 0 و 2 تساوي التزايد المتوسط بين المديتين 3 و 4,5.



2) التحقق هندسيا من صحة هذه النتيجة نمثل بيانيا الإنتاج  $P(x)$  (بالأطنان)، بدلالة المدة  $x$  (بالساعات).

للمستقيمين  $(OA)$  و  $(BC)$  نفس معامل التوجيه وهو 1,8.

إذن  $(OA)$  يوازي  $(BC)$  وبالتالي: حاملتا القطعتين

$(OA)$  و  $(BC)$  متوازيان.



② حساب الكلفة الهامشية للوحدة الإضافية المنتجة ذات الرتبة  $x + 1$ 

## طريقة

يرمز  $C(x)$  إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج كمية ذات  $x$  وحدة.  
الكلفة الهامشية لإنتاج وحدة إضافية هي  $C_m(x)$ ، تحسب بالدستور التالي:  
 $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

**ملاحظة:** نذكر أن الربح الهامشي  $B_m(x)$  والدخل الهامشي  $R_m(x)$  المتعلقين بالوحدة الإضافية ذات الرتبة  $x + 1$  تحسب بالدستورين التاليين:

$$B_m(x) = B(x+1) - B(x)$$

$$R_m(x) = R(x+1) - R(x)$$

حيث  $B(x)$  و  $R(x)$  هما الربح الإجمالي والدخل الإجمالي لإنتاج  $x$  وحدة.

**تمرين:** الكلفة الإجمالية لإنتاج  $x$  ثلاجة هي دالة  $C$  معرفة بالدستور التالي:

$$C(x) = 100x^2 + 10x + 1, \quad x \text{ ينتمي إلى المجال } [0; 10].$$

1 - احسب الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة.

2 - احسب الكلفة الهامشية لصنع ثلاجة إضافية مرتبتها  $x + 1$ .

**حل:** 1 - حساب الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة.

$$\text{لدينا } C_m(x) = 100x^2 + 10x + 1 \text{ و } C_m(x) = C(x+1) - C(x)$$

$$\text{إذن } C_m(2) = C(3) - C(2)$$

$$\text{لدينا } C(3) = 931 \text{ و } C(2) = 421.$$

$$\text{ينتج أن: } C_m(2) = 931 - 421 = 510$$

أي أن الكلفة الهامشية لصنع الثلاجة الثالثة هي 570 ديناراً.

2 - حساب الكلفة الهامشية لصنع ثلاجة إضافية ذات الرتبة  $x + 1$ .

$$\text{لدينا } C_m(x) = C(x+1) - C(x)$$

$$\text{و } C(x+1) = 100(x+1)^2 + 10(x+1) + 1$$

$$\text{إذن } C_m(x) = [100(x+1)^2 + 10(x+1) + 1] - [100x^2 + 10x + 1]$$

$$\text{ينتج أن } C_m(x) = 200x + 110.$$



### ③ حساب نهاية دالة عند العدد 0 طريقة

لحساب نهاية دالة  $f$  عند العدد 0، نعتمد على ما يلي:

1- إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد 0 فإن  $f(0)$  هو عدد حقيقي ويكون:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

2- إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على مجال  $I$  بإستثناء العدد 0، نبسط عبارة  $f(x)$  بوضع الشرط  $x \neq 0$  ثم نحسب نهاية الدالة  $f$  عند العدد 0 باستعمال الدستور المبسط للدالة  $f$ .

#### ملاحظة

تدرس الحالات الأخرى المتعلقة بحساب النهايات في باب « السلوك التقاربي لمنحن ».

#### تمرين

$f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

(1) احسب نهاية الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى 0.

(2) عدد حقيقي غير منعدم. احسب نهاية الدالة  $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  عندما يؤول  $h$  إلى 0.

#### حل

(1) حساب نهاية الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى 0.

الدالة  $f$  معرفة عند العدد 0 و  $f(0) = 2$ .

وبالتالي:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

(2) حساب نهاية الدالة  $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  عندما يؤول  $h$  إلى 0.



$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{h}{2h(2+h)} \text{ لدينا}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{1}{2(2+h)} \text{ بما أن } h \neq 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -\frac{1}{4} \text{ وبالتالي:}$$

④ حساب العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $a$

طريقة 1

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $a$ .

$h$  عدد حقيقي غير منعدم حيث  $a + h$  ينتمي إلى  $I$ .

لحساب العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$ :

• نحسب النسبة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  ونبسطها.

• نحسب نهاية الدالة  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  عندما يؤول إلى  $h$  إلى  $0$

ويكون  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

تصريح

$f$  دالة معرفة على المجال  $[-5;5]$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - 3x$ .  
احسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد 3.

حل

الدالة معرفة عند العدد 3 و  $f(3) = 9 - 9 = 0$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3(3+h) - 0}{h} = \frac{3h + h^2}{h} = \frac{(3+h)h}{h} \text{ لدينا}$$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 3 + h \text{ بما أن } h \neq 0 \text{ فإن}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3+h) = 3$$

وبالتالي  $f'(3) = 3$  ينتج أن  $f'(3) = 3$ .

### طريقة 2

$f$  دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $f'$  دالتها المشتقة.

لحساب العدد المشتق  $f'(a)$  للدالة  $f$  عند العدد  $a$  من  $I$

$$f'(x)$$

ويكون  $f'(a)$  هو العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$ .

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ .

احسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند كل من العددين 1 و -1.

**حل:** الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة كثير الحدود).

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = 3x^2 + 6x$ .

لدينا  $f'(-1) = -3$  أي  $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = 3 - 6 = -3$

و  $f'(1) = 9$  أي  $f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) = 3 + 6 = 9$ .

### 5 حساب العدد المشتق لدالة $f$ عند $a$ باستعمال حاسبة بيانية

#### طريقة

لحساب العدد المشتق لدالة  $f$  عند  $a$  ، بحاسبة بيانية، نتبع البرنامج التالي (من اليسار إلى اليمين):





تمرين:  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3 + 2x$ .  
أحسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $-1$  - باستعمال حاسبة بيانية.

Deriv(Y1, X, -1)  
5.00000

حل: بعد تنفيذ البرنامج السابق، نجد  $f'(-1) = 5$ .

### 6) تعيين معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه

#### طريقة

$f$  دالة معرفة على مجال مفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  وقابلة للإشتقاق عند العدد  $a$  من  $I$ .

$(\gamma)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; i^*, j^*)$ .

لتعيين معادلة المماس للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $a$

• نحسب  $f(a)$  و  $f'(a)$  ونعوضهما في المعادلة

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

• نكتب المعادلة السابقة على الشكل  $y = mx + p$ .

وتكون هذه المعادلة هي معادلة المماس للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $a$ .

#### تمرين

$f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-2; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ .

$(\gamma)$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; i^*, j^*)$ .

1 - عين معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة التي فاصلتها  $0$ .

2 - أظهر على شاشة حاسبة بيانية، المنحنى  $(\gamma)$  والمماس  $(T)$ .

#### حل

1) تعيين معادلة المماس  $(T)$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق عند العدد  $0$ .

إذن المنحنى  $(\gamma)$  يقبل مماسا  $(T)$  عند النقطة التي فاصلتها  $0$ .

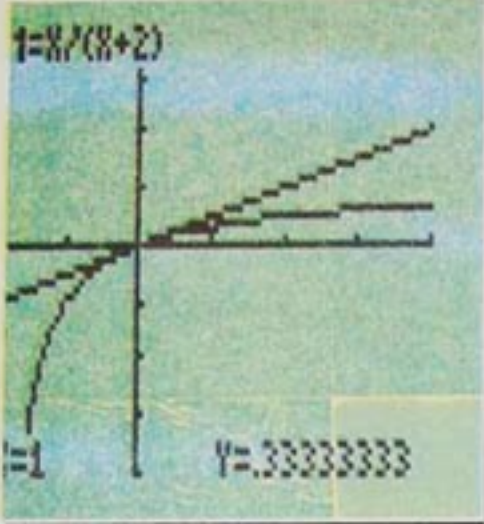
من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]-2; +\infty[$ ؛  $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$ ؛

إذن  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .



لدينا أيضا:  $f(0) = 0$ . إذن معادلة  $(T)$  هي  $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0$ . أي:  $(T): y = \frac{1}{2}x$ .

2) رسم  $(\gamma)$  و  $(T)$  على شاشة حاسبة بيانية. بعد تنفيذ برنامج صب  $f(x)$  و  $\frac{1}{2}x$  في الحاسبة، نختار نافذة لإظهار  $(\gamma)$  و  $(T)$  ثم نظهر على شاشة حاسبة  $(\gamma)$  و  $(T)$  بواسطة اللمسة GRAPH.



مثلا:  
WINDOW  
Xmin=-2  
Xmax=4  
Xscl=1  
Ymin=-4  
Ymax=4  
Yscl=1  
Xres=1

7) دراسة إتجاه تغير دالة

طريقة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .  
لدراسة إتجاه تغير للدالة  $f$  على مجال  $I$   
- ندرس قابلية إشتقاق الدالة  $f$  على  $I$   
- نحسب  $f'(x)$  من أجل كل عدد  $x$  من  $I$   
- ندرس إشارة  $f'(x)$   
ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة  $f$  على  $I$ .

تمرين 1

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$ .  
أدرس إتجاه تغير الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

حل

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأنها دالة كثير الحدود).



من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = x^2 + 2x + 1$   
 • نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $f'(x) = (x + 1)^2$   
 ينتج أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  $f'(x) \geq 0$   
 وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

**تمرين 2:**  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  كما يلي :  $g(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$   
 ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

**حل**

• الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]-\infty; 2[$  و  $]2; +\infty[$   
 و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 2 ،  $g'(x) = \frac{-7}{(x - 2)^2}$   
 • نلاحظ ان من اجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 2 ،  $g'(x) < 0$   
 ينتج أن الدالة  $g$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 2[$  و على المجال  $]2; +\infty[$ .

### ③ - تعيين القيم الحدية لدالة

**طريقة**

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$   
 لتعيين القيم الحدية للدالة  $f$  على مجالات جزئية من  $I$  ،  
 - نحسب  $f'(x)$  من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  .  
 - ندرس إشارة  $f'(x)$  .  
 وتكون صور الأعداد  $x$  من  $I$  (أو على المجالات الجزئية) التي ينعدم من أجلها  
 $f'(x)$  و يغير إشارته، هي القيم الحدية للدالة  $f$  على  $I$  (أو على المجالات  
 الجزئية من  $I$ ).

**ملاحظة:** تحدد طبيعة القيم الحدية (صغرى أو كبرى) للدالة  $f$  ، إن وجدت، بتحديد  
 اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $I$  .

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على المجال  $]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[$  كما يلي :  $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$   
 عين القيم الحدية للدالة  $f$  .



حل

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  و دالتها المشتقة  $f'$  معرفة كما يلي:

$$f'(x) = 9x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 3x(3x - 4) \text{ أي}$$

إشارة  $f'(x)$  و تغيرات الدالة  $f$  ملخصة في الجدول.

|         |                |   |                |                |
|---------|----------------|---|----------------|----------------|
| $x$     | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{4}{3}$  | $\frac{3}{2}$  |
| $f'(x)$ | +              | 0 | - 0            | +              |
| $f(x)$  | $\frac{25}{8}$ | 5 | $\frac{13}{9}$ | $\frac{13}{8}$ |

من هذا الجدول، ينتج أن  $f$  تقبل قيمة كبرى عند العدد (على مجال  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$ ) و هي 5 و تقبل قيمة صغرى عند  $\frac{4}{3}$  و هي  $\frac{13}{9}$  (على مجال  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ ).

### ⑨ إيجاد التقريب التآلفي المماسي للدالة

طريقة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل  $a$ .

( $\gamma$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد  $a$  فإن التقريب التآلفي المماسي للدالة  $f$

$$\text{عند العدد } a \text{ هو } f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

نكتب:  $f(x) \approx f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$  ، ( $x$  قريب من  $a$ ).

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ .

1) عيّن التقريب التآلفي المماسي للدالة  $f$  عند العدد 2.

2) احسب قيمة مقربة للعدد  $f(1.99)$ .



حل: (1) • الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

•  $f$  قابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$

ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم؛  $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ .

• لدينا  $f(2) = \frac{17}{2}$  و  $f'(2) = \frac{47}{4}$ .

إذن التقريب التآلفي المماسي للدالة  $f$  عند 2 هو  $f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

أي  $\frac{47}{4}x - 15$

نكتب  $x^3 + \frac{1}{x} \simeq \frac{47}{4}x - 15$

(2) حساب قيمة مقربة للعدد  $f(1,99)$ .

لدينا  $f(1,99) \simeq \frac{47}{4} \times 1,99 - 15$

أي  $f(1,99) \simeq 8,3825$

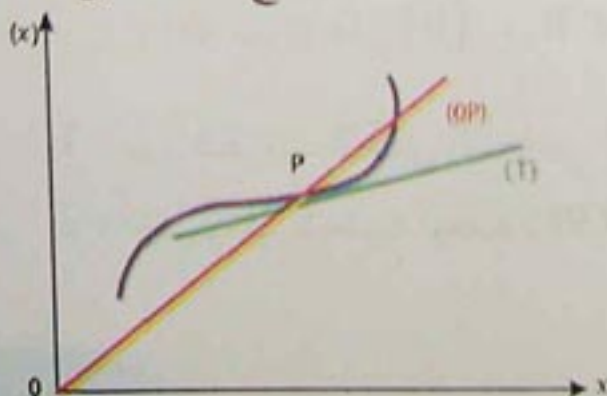
### ⑩ العلاقة بين الكلفة المتوسطة والكلفة الهامشية

طريقة

• الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  لكمية إنتاج  $x$  تحسب بالدستور التالي:  
 $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$  حيث  $C(x)$  هي الكلفة الإجمالية لإنتاج كمية من منتج قدرها  $x$ .  
 • الكلفة الهامشية  $C_m(x)$  لإنتاج الوحدة ذات المرتبة  $x+1$  تحسب، عمليا، بالدستور التالي:  $C_m(x) = C'(x)$ . حيث  $C'(x)$  هي عبارة الدالة المشتقة للدالة التي ترفق بكل كمية  $x$  الكلفة الإجمالية  $C(x)$ .

**التفسير البياني:** الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  هي معامل توجيه (أو ميل) المستقيم

القاطع  $(OP)$  للمنحنى الممثل للدالة  $C(x) \rightarrow x$  عندما تمسح  $P$  منحنى هذه الدالة.



- الكلفة الهامشية هي معامل توجيه

(أو ميل) المماس للمنحنى الممثل للدالة

$C(x) \rightarrow x$  عند النقطة  $P$  من المنحنى

الممثل لدالة الكلفة الإجمالية.



تمرين

$C(x)$  هي الكلفة الإجمالية (بالدينير) لإنتاج كمية قدرها  $x$  (بالأطنان) معرفة على المجال  $[0; 20]$  كما يلي:  $C(x) = x^2 + 10x + 100$ .

- 1 - احسب الكلفة المتوسطة والكلفة الهامشية للكمية  $x$ .
- 2 - انجز جدول تغيرات الدالة  $C_M(x) \rightarrow x$  على المجال  $[0; 20]$ .
- 3 - تحقق أنه عندما تكون الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  أصغر ما يمكن، تكون الكلفة المتوسطة تساوي الكلفة الهامشية  $C_m(x)$ .

حل

1) حساب الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  من أجل  $x \neq 0$ .

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 10x + 100}{x}$$

$$C_M(x) = x + 10 + \frac{100}{x}$$

حساب الكلفة الهامشية  $C_m(x)$ .

$$C_m(x) = C'(x)$$

$$C'(x) = 2x + 10$$

$$C_m(x) = 2x + 10$$

2) الدالة المشتقة للدالة «الكلفة المتوسطة» على المجال  $[0; 20]$  هي الدالة

$$C'_M(x) = 1 - \frac{100}{x^2} \text{ حيث } x \rightarrow C'_M(x)$$

دراسة إشارة الدالة  $C'_M(x) \rightarrow x$  على المجال  $[0; 20]$ .

$$C'_M(x) = \frac{x^2 - 100}{x^2} \text{ من أجل كل عدد من المجال } [0; 20]$$



إشارة  $C'_M(x)$  ملخصة في الجدول التالي:

|           |   |    |    |
|-----------|---|----|----|
| $x$       | 0 | 10 | 20 |
| $C'_M(x)$ |   | -  | 0  |
|           |   |    | +  |

يلخص إتجاه تغير الدالة  $C'_M$  في الجدول التالي:

|           |   |    |    |
|-----------|---|----|----|
| $x$       | 0 | 10 | 20 |
| $C'_M(x)$ |   | -  | 0  |
|           |   |    | +  |
| $C_M(x)$  |   | 30 | 35 |

$$C_M(10) = 10 + 10 + \frac{100}{10} = 30$$

- تأخذ الكلفة المتوسطة قيمة صغرى من أجل  $x = 10$  وهي الكلفة المقدرة في هذه الحالة بمبلغ 30 ديناراً على الكيلو غرام الواحد أو 30000 دينار على الطن الواحد من المنتج. في هذه الحالة، الكلفة الهامشية هي  $C_m(10)$  ومقدرة بالمبلغ  $C_m(10) = 2 \times 10 + 10 = 30$  أي 30 ديناراً على الكيلو غرام الواحد أو 30000 دينار على الطن الواحد من المنتج.

إذن: عندما تكون الكلفة المتوسطة  $C_M(x)$  أصغر ما يمكن تكون الكلفة المتوسطة مساوية للكلفة الهامشية  $C_m(x)$ .



## مسألة 1

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ .  
 $(\gamma)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1 - أدرس تغيرات الدالة  $f$ .
- 2 - انجز جدول تغيراتها.
- 3 - عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى  $(\gamma)$  مع محوري الإحداثيات.
- 4 - أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(\gamma)$  عند كل نقطة من هذه النقط.
- 5 - أظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنى  $(\gamma)$  وهذه المماسات.

**حل**

1 : دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

- الدالة  $f$  معرفة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ؛  
 $f'(x) = 2x + 2$  ( لحساب  $f'(x)$ ، نطبق النظرية المتعلقة بالدالة المشتقة لجداء دالتين ).

• إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول التالي

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +         |

- الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $[-1; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $] -\infty; -1 ]$ .

2) جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي :

|         |           |      |           |
|---------|-----------|------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0    | +         |
| $f(x)$  |           | -4   |           |

$$f(-1) = -4$$



3) تعيين إحداثيات نقط تقاطع  $(\gamma)$  مع محوري الإحداثيات .

• تقاطع  $(\gamma)$  مع محور الفواصل :

نحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$  .

لدينا  $f(x) = 0$  يعني  $(x-1)(x+3) = 0$  .

يعني  $x-1 = 0$  أو  $x+3 = 0$  .

ينتج أن:  $x = 1$  أو  $x = -3$  .

إذن  $(\gamma)$  يقطع محور الفواصل في النقطتين  $A(1;0)$  و  $B(-3;0)$  .

• تقاطع  $(\gamma)$  مع محور الترتيب :

لدينا  $f(0) = -3$  .

إذن  $(\gamma)$  يقطع محور الترتيب في النقطة  $C(0; -3)$  .

4) كتابة معادلة المماس عند كل من النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

• معادلة المماس  $(T_A)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة  $A$  .

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = 4$  .

إذن  $(T_A): y = 4x - 4$  .

• معادلة المماس  $(T_B)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة  $B$  .

لدينا  $f(-3) = 0$  و  $f'(-3) = -4$  .

إذن  $(T_B): y = -4x - 12$  .

• معادلة المماس  $(T_C)$  للمنحنى  $(\gamma)$  .

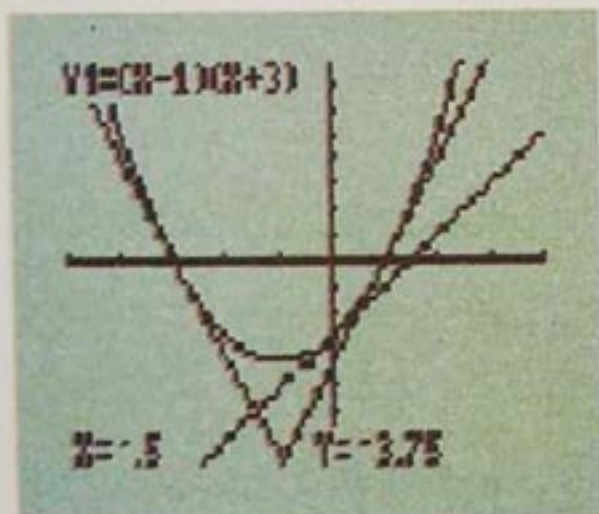
لدينا  $f(0) = -3$  و  $f'(0) = 2$  .

إذن  $(T_C): y = 2x - 3$  .

• إظهار  $(\gamma)$  ،  $(T_A)$  ،  $(T_B)$  و  $(T_C)$  على شاشة حاسبة بيانية .

باختيار نافذة مناسبة، مثلا (النافذة المقابلة)

نظهر المنحنى  $(\gamma)$  و المماسات  $(T_A)$  ،  $(T_B)$  و  $(T_C)$  .



```
WINDOW
Xmin=-5
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-8
Ymax=8
Yscl=1
Xres=1
```



# مسألة محلولة

## مسألة 2: «الكلفة الهامشية»

ينتج مصنع أجهزة متماثلة، يتراوح عددها بين 0 و 40. كلفة إنتاج  $x$  وحدة بالدنانير هي

$$C(x) = \frac{10}{3}x^3 - 15x^2 + 250x$$

الكلفة الهامشية هي المصاريف الناتجة عن إنتاج وحدة إضافية.

$$C_m(x) = C'(x)$$

1) احسب الكلفة الهامشية لإنتاج وحدة إضافية.

2) ما هي الكلفة الهامشية لإنتاج 10 وحدات؟ 30 وحدة؟

**حل**

1 - حساب الكلفة الهامشية  $C_m(x)$  لإنتاج وحدة إضافية.

$$\text{لدينا } C'(x) = 10x^2 - 30x + 250$$

$$\text{بما أن } C_m(x) = C'(x)$$

$$\text{إذن } C_m(x) = 10x^2 - 30x + 250$$

2 - حساب  $C_m(10)$  و  $C_m(30)$ .

$$\text{لدينا: } C_m(10) = 10 \times 100 - 10 \times 30 + 250 = 950$$

$$C_m(30) = 10 \times 900 - 30 \times 30 + 250 = 8350$$

إذن الكلفة الهامشية لإنتاج 10 وحدات هي 950 دينار والكلفة الهامشية لإنتاج 30 وحدة

هي 8350 دينار.



**1 - صحيح أو خاطيء**

1 - نسبة تزايد دالة  $f$  بين عددين حقيقيين  $x_1$  و  $x_0$  من مجال  $I$  هي  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  حيث  $x_1 \neq x_0$ .

2 - إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي  $a$  فإن العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  هو  $f'(a)$ .

3 - إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي  $a$  فإن المنحنى الممثل لها يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة  $a$ .

4 - إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق عند العدد  $0$  فإن معادلة المماس للمنحنى الممثل لها عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  هي  $y = f'(0).x + f(0)$ .

5 - معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0$  هو  $f'(x_0)$ .

6 - إذا كان  $f'(x_0) = 0$  فإن المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  يوازي محور الترتيب.

7 - إذا كانت الدالة موجبة على المجال  $I$  فإنها متزايدة على  $I$ .

8 - إذا كانت الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  موجبة على المجال  $I$  فإن الدالة  $f$  متزايدة على  $I$ .

9 - إذا إنعدمت الدالة  $f'$  و غيرت إشارتها عند العدد الحقيقي  $x_0$  من المجال  $I$  فإن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية  $f(x_0)$  عند العدد  $x_0$ .

**نسبة تزايد دالة - النهاية عند 0**

2  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  
 $f(x) = 3x + 5$

$h$  عدد حقيقي غير منعدم .

- احسب  $f(1+h)$  ؛  $f(1-h)$  ؛  
 $f(-2+h)$  .

- احسب و بسط النسب التالية :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad ; \quad \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \quad ; \quad \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

3  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

كما يلي :  $h$  عدد حقيقي غير منعدم .

- احسب و بسط النسب التالية :

$$\frac{f(3-h) - f(3)}{h} \quad ; \quad \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \quad ; \quad \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

4  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$g(x) = 2x^2 - 3$$

كما يلي :  $h$  عدد حقيقي غير منعدم .

- عين مجموعة تعريف الدالة  $g$  .

- احسب و بسط النسبتين التاليتين :

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} \quad ; \quad \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$$



5 هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$h$  عدد حقيقي غير منعدم .

- عين مجموعة تعريف الدالة  $g$  .

- احسب و بسط النسبتين التاليتين :

$$\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} \quad ; \quad \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

6 هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = -2x + \frac{1}{3}$$

(1) احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

(2)  $h$  عدد حقيقي غير منعدم .

$$\text{- احسب النسبة } \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

- احسب نهاية هذه النسبة لما يؤول  $h$  إلى 0.

7 هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

(1) احسب نهاية الدالة عندما يؤول  $x$  إلى 0.

(2)  $h$  عدد حقيقي غير منعدم .

- احسب النسبة

$$\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$$

- استنتج نهاية هذه النسبة لما يؤول  $h$  إلى 0.

8 هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$

(2) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3)  $h$  عدد حقيقي غير منعدم .  
احسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

9 احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-4x + 2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2}x + 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x(-x^2 + 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)(x+1)+1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$$

### التزايد المتوسط

10 \* انتجت شركة 41 000 جهاز تلفاز خلال سنة 2001 و 64 300 جهاز خلال سنة 2005 .

- احسب التزايد المتوسط السنوي للإنتاج

( تدور النتيجة إلى العشرة ) .

- إذا فرضنا أن هذا التزايد مستقر، ما هو

عدد الأجهزة التي ستنتج في سنة 2008 ؟

### الكلفة الهامشية

11 \*  $C(x)$  هي الكلفة الإجمالية (بالدنانير)

لمنتوج حيث:  $C(x) = x^2 + x + 30$

$x$  يتغير في المجال  $[0; 20]$

احسب الكلفة الهامشية للوحدة الثالثة

المنتجة ثم الكلفة الهامشية للوحدة العاشرة

المنتجة .



15 نفس السؤال السابق :

$$a=1 ; f(x) = x^2 - x - 1 \quad (1)$$

$$a=0 ; f(x) = \frac{2}{x+1} \quad (2)$$

$$a=-1 ; f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad (3)$$

$$a=1 ; f(x) = \frac{-3x}{2x+3} \quad (4)$$

16 في كل حالة من الحالات التالية،

احسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $a$ .

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} ; f(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$a \in \mathbb{R} ; f(x) = x^3 \quad (2)$$

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} ; f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (3)$$

$$a \in ]0; +\infty[ ; f(x) = \sqrt{x} \quad (4)$$

17  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 170$$

1 - احسب تزايد الصورة بين العددين

$-1,5$  و  $-1$ .

2 - احسب نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين

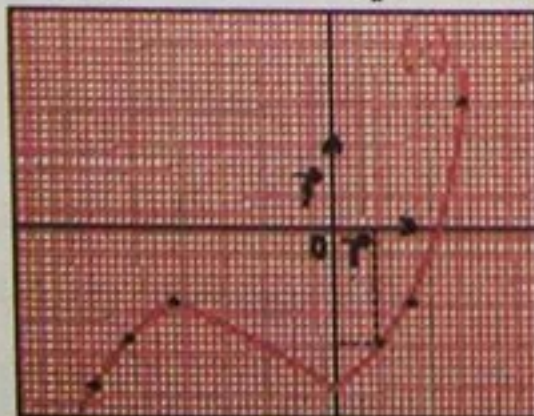
$a$  و  $a+h$ ،  $a$  و  $h$  عددان حقيقيان حيث

$$h \neq 0$$

3 - استنتج قيمة  $f'(a)$ .

18  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بتمثيلها

البياني ( $\gamma$ ) التالي: (الشكل)



- عبر بدلالة  $x$  عن الكلفة الهامشية للوحدة من المرتبة  $x$  المنتجة، عندما يتغير  $x$  في المجال  $[0; 20]$ .

12 \* ينتج مصنع أجهزة للتدفئة.

الكلفة الإجمالية  $C(x)$  (بالدينانير)

ل  $x$  جهازا مماثلا منتجا معرفة كما يلي:

$$C(x) = 2x^3 + x^2 + 1000$$

- احسب الكلفة الهامشية للوحدة الرابعة المنتجة.

- احسب الكلفة الهامشية للوحدة التاسعة المنتجة.

- عبر بدلالة  $x$  عن الكلفة الهامشية للوحدة

من المرتبة  $x$  المنتجة.

العدد المشتق

13  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$ .

عين العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $a$  في

كل حالة من الحالات التالية :

$$a=0 ; f(x) = 3x - 1 \quad (1)$$

$$a=1 ; f(x) = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{8} \quad (2)$$

$$a=-1 ; f(x) = -x^2 + x \quad (3)$$

$$a=2 ; f(x) = 3x^2 - 3 \quad (4)$$

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين

مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم احسب العدد

المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $a$ .

$$a=0 ; f(x) = x^3 + 2 \quad (1)$$

$$a=-1 ; f(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad (2)$$

$$a=1 ; f(x) = 2x + \sqrt{x} \quad (3)$$

$$a=2 ; f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad (4)$$

$$a=-1 ; f(x) = \sqrt{x+3} \quad (5)$$

$$a=-2 ; f(x) = (x+1)(2x-3) \quad (6)$$



21  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad ]0; +\infty[$$

(H) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 - احسب العدد المشتق للدالة  $g$  عند

العدد 1.

2 - اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى

(H) عند النقطة B التي فاصلتها 1.

3 - اظهر على شاشة حاسبة بيانية (H)

و (T) باختيار نافذة مناسبة.

22  $f$  و  $g$  هما الدالتان المعرفتان كما يلي:

$$g(x) = 2 + \sqrt{x} \quad ; \quad f(x) = -x^2 + 1$$

( $\gamma_f$ ) و ( $\gamma_g$ ) هما التمثيلان البيانيان

للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب في المستوى

المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 - عين مجموعة تعريف كل من الدالتين

$f$  و  $g$ .

2 - احسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد 1.

3 - احسب العدد المشتق للدالة  $g$  عند

العدد 4.

4 - اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى

( $\gamma_f$ ) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

5 - اكتب معادلة للمماس (T') للمنحنى

( $\gamma_g$ ) عند النقطة B التي فاصلتها 4.

1 - احسب تزايد الصورة بين العددين 0 و 1.

2 - عين نسبة تزايد الدالة  $f$  بين العددين 0 و 1.

3 - عين معامل توجيه القاطع (D) للمنحنى

( $\gamma$ ) الذي يشمل النقطتين A و B ذات

الفاصلتين 0 و 1 على الترتيب.

4 - عين العدد المشتق للدالة  $f$  عند كل من

العددين 0 و 1.

19 في كل حالة من الحالات التالية.

- احسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند

العدد  $a$  بدون استعمال حاسبة.

- تحقق من النتائج باستعمال حاسبة.

$$a = -1 \quad ; \quad f(x) = 3x^4 + \sqrt{3}x^2 - 1 \quad (1)$$

$$a = 2 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \quad (2)$$

$$a = 1 \quad ; \quad f(x) = x\sqrt{x} \quad (3)$$

### معادلة المماس

20  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x^2$$

(P) هو تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 - عين العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد 1.

2 - اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى

(P) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

3 - اظهر على شاشة حاسبة بيانية

(P) و (T) باختيار نافذة مناسبة.



1 - اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة فاصلتها 2.

2 - تحقق أن هذا المماس يشمل مبدأ المعلم.

27  $f$  و  $g$  هما الدالتان المعرفتان على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = x^2 + 3x$

و  $g(x) = -x^2 - x + 2$

$(\gamma_f)$  و  $(\gamma_g)$  المنحنيان الممثلان للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 - عين العدد المشتق لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  عند العدد 1.

2 - اكتب معادلة كل من المماسين  $(T)$  و  $(T')$  للمنحنيين  $(\gamma_f)$

و  $(\gamma_g)$  على الترتيب في نفس النقطة  $A$  التي فاصلتها 1.

3 - هل هذان المماسان متوازيان؟

28  $f, g, h$  هي دوال معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 6$$

$$g(x) = x^3 - x^2 + 4$$

$$h(x) = x^2 + 7x + 8$$

1 - عين العدد المشتق لكل دالة من الدوال  $f, g, h$  عند العدد 1.

2 - اكتب معادلة المماس لكل من المنحنيات الممثلة للدوال  $f, g, h$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

3 - تحقق أن المنحنيات الثلاثة لها نفس المماس عند هذه النقطة.

23 نفس السؤال بالنسبة إلى الدالتين

$f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \frac{2}{x} - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3}$$

24  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = x^3 - 2x + 1$

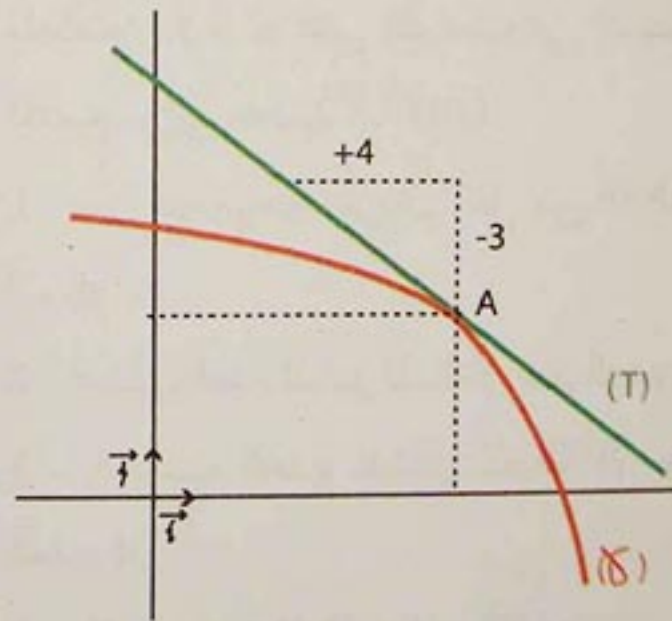
$(\gamma)$  المنحنى الممثل لها في معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$

عين معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة التي فاصلتها 1.

25  $f$  هي الدالة المعرفة بتمثيلها البياني

$(\gamma)$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ . (الشكل).

باستعمال المنحنى  $(\gamma)$ ، اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة  $A$ .



26  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

$(\gamma)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .



29  $f$  و  $g$  دالتان معرفتان كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x; f(x) = \frac{3x}{x+2}$$

$(\gamma_0)$  و  $(\gamma_1)$  المنحنيان الممثلان للدالتين  $f$  و  $g$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1 - اظهر على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين  $f$  و  $g$  على المجال  $[-1; +\infty[$ .

2 - يبدو أن المنحنيين  $(\gamma_0)$  و  $(\gamma_1)$  يقبلان نفس المماس عند مبدأ المعلم .  
تحقق من ذلك .

30  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}$$

1 - عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2 -  $(\gamma)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .  
برهن أن المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\gamma)$  عند النقطة التي فاصلتها 2 - يشمل المبدأ .

### الدوال المشتقة

31 عين  $f'(x)$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) f(x) = x - 1$$

$$(2) f(x) = \frac{5}{2} - x$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{3}x + 1$$

$$(4) f(x) = 2x^2 + 3$$

$$(5) f(x) = x^2 + 3x + 1$$

32 عين  $f'(x)$  حيث  $x \in D$  في كل

حالة من الحالات التالية:

$$D = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{x} + 3 (1)$$

$$D = ]0; +\infty[; f(x) = 5x - \frac{2}{x} (2)$$

$$D = ]0; +\infty[; f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} (3)$$

$$D = \mathbb{R}; f(x) = 2x^3 - 3x^2 (4)$$

$$D = \mathbb{R}; f(x) = -5x^2 + 2x + \sqrt{2} (5)$$

33  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = (2x + 1)(x - 2)$$

1 احسب  $f'(x)$ .

2 انشر  $f(x)$  ثم احسب  $f'(x)$ .

3 قارن بين عبارتي  $f'(x)$ .

- نفس الأسئلة بالنسبة إلى الدالة  $f$  المعرفة

على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$(1) f(x) = (1 - 3x)(x^2 + x)$$

$$(2) f(x) = (1 + 2x)(1 - 2x)$$

34  $f, g, h$  دوال معرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = (2 - x)(x^2 + 1)$ ;

$$g(x) = -2x^2(3x + 1)$$

$$h(x) = 3(6 + 2x)^2$$

عين الدوال المشتقة لكل من الدوال  $f, g, h, k$ .

35  $f, g, h, k$  دوال معرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = 2x + 3 - (x - 2)^2$ ;

$$g(x) = x^2(1 - x)^2$$

$$h(x) = -3x + 1 + 2(3x - 1)^2$$

$$k(x) = -2(x + 2)^2$$

عين الدوال المشتقة للدوال  $f, g, h, k$ .

36  $f, g, h, k$  دوال معرفة على المجال

$]0; +\infty[$  و قابلة للإشتقاق على المجال



40 عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل من الحالات التالية :

$$I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3} \quad (1)$$

$$I = ]3; +\infty[; f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x-3} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 + 2x^2 \quad (3)$$

$$I = ]-\infty; -0[$$

41  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \text{ كما يلي}$$

1 - عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  على كل

من المجالين  $]-\infty; -2[$  و  $]-2; +\infty[$ .

2 - ادرس إشارة  $f'(x)$  على المجموعة

$$\mathbb{R} - \{-2\}$$

### دراسة تغيرات دالة

42  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 11 \text{ كما يلي}$$

1 - عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

2 - ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ .

3 - انجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

43 ادرس تغيرات الدالة  $f$  على

مجموعة تعريفها  $D$  في الحالات

التالية :

$$D = \mathbb{R}; f(x) = 3x - 5 \quad (1)$$

$$D = \mathbb{R}; f(x) = -5x + 3 \quad (2)$$

$$D = \mathbb{R}; f(x) = 2x^2 + 3x - 5 \quad (3)$$

$]0; +\infty[$  حيث :

$$f(x) = (3x + 1) \cdot \sqrt{x}$$

$$g(x) = 2\sqrt{x} - x + 1$$

$$h(q) = -2q + 3\sqrt{q}$$

$$k(x) = (1 - 3x) \cdot \sqrt{x}$$

عين الدوال المشتقة للدوال  $k, h, g, f$ .

37  $k, h, g, f$  دوال معرفة وقابلة

للإشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x}$$

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{4x}$$

$$h(x) = 5x + 3 + \frac{2}{3x}$$

$$k(x) = (x - 1) \left( \frac{1}{x} - 2 \right)$$

- عين الدوال المشتقة للدوال  $k, h, g, f$ .

38  $k, h, g, f$  دوال معرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :

$$g(x) = \frac{5 - x^2}{x^2 + 5}; f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$k(x) = \frac{3x^2 - x}{3}; h(x) = \frac{-x + 2}{x^2 + x + 1}$$

عين الدوال المشتقة للدوال  $k, h, g, f$ .

39 عين الدالة المشتقة للدالة  $f$  على

المجال  $I$  في الحالات التالية :

$$I = ]0; +\infty[; f(x) = -2x + 3 - \frac{10}{x} \quad (1)$$

$$I = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[; f(x) = \frac{x+1}{2x-3} \quad (2)$$

$$I = ]1; +\infty[; f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad (3)$$

$$I = ]3; +\infty[; f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x-3} \quad (4)$$



47 عين دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بحيث تكون

دالتها المشتقة هي  $x \rightarrow 3x^2 - 2x$

48 انقل و اكمل جدول تغيرات

الدالة  $f$  التالي:

|         |    |   |   |
|---------|----|---|---|
| $x$     | -2 | 1 | 3 |
| $f'(x)$ | +  | 0 | - |
| $f(x)$  |    |   |   |

(1) اعط إشارة كل من :

$f'(-2)$  ؛  $f(-2)$  ؛  $f'(3)$  ؛  $f(3)$

(2) حدد إشارة  $f(x)$  . علل إجابتك .

49 انقل و اكمل جدول تغيرات

الدالة  $f$  التالي:

|         |    |   |   |   |   |   |
|---------|----|---|---|---|---|---|
| $x$     | -6 | 0 | 2 | 4 |   |   |
| $f'(x)$ |    | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$  |    |   |   |   |   |   |

1- ما هي إشارة كل من :

$f'(-1)$  ؟  $f'(1)$  ؟  $f'(3)$  ؟

2- حدد إشارة  $f(x)$  . علل إجابتك .

$D = \mathbb{R} - \{-3\}$  ؛  $f(x) = \frac{132}{x+3}$  (4)

$D = \mathbb{R} - \{2\}$  ؛  $f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$  (5)

$D = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$  (6)

$D = ]0; +\infty[$  ؛  $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$  (7)

$D = \mathbb{R}$  ؛  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 10$  (8)

44 انقل و اكمل جدول تغيرات

الدالة  $f$  القابلة للإشتقاق على المجال

$[-1; 3]$

|         |    |   |   |
|---------|----|---|---|
| $x$     | -1 | 2 | 3 |
| $f'(x)$ | +  | 0 | - |
| $f(x)$  |    |   |   |

45 نفس سؤال التمرين رقم 44 .

|         |    |    |   |   |   |
|---------|----|----|---|---|---|
| $x$     | -4 | -3 | 2 | 4 |   |
| $f'(x)$ | +  | 0  | - | 0 | + |
| $f(x)$  |    |    |   |   |   |

46 نفس سؤال التمرين رقم 44 .

|         |    |   |   |   |
|---------|----|---|---|---|
| $x$     | -5 | 1 | 3 |   |
| $f'(x)$ |    | + | 0 | + |
| $f(x)$  |    |   |   |   |



50 انقل و اكمل جدول تغيرات الدالة  $f$

التالي: علما أن  $f(1) = 2$  و  $f(7) = 1$

|         |    |   |   |   |   |   |
|---------|----|---|---|---|---|---|
| $x$     | -3 | 1 | 5 | 7 |   |   |
| $f'(x)$ |    | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$  |    |   |   |   |   |   |

1 - حدد إشارة  $f'(0)$  ثم إشارة  $f(0)$ .

2 - ما هي إشارة  $f(x)$ ؟ علل إجابتك.

القيم الحدية لدالة

51 برهن أن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $f(x) = 4(x^2 + 1,5)$

تقبل قيمة حدية عند العدد 0.

2) حدد طبيعة هذه القيمة الحدية.

52 برهن أن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي:  $g(x) = x^3 + 3x$

لا تقبل قيما حدية.

53 برهن، باستعمال العمليات على

الدوال المشتقة، أن الدالة  $f$  المعرفة

على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-1}$$

تقبل قيما حدية. حددها.

54  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 2}$$

1 - ماهي مجموعة تعريف الدالة  $f$ ؟

2 - برهن أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

3 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f'(x) = \frac{-5(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x^2 + 2)^2}$$

4 - ادرس تغيرات الدالة  $f$  و انجز جدول

تغيراتها.

5 - حدد القيم الحدية للدالة  $f$ .

التقريب التآلفي المماسي لدالة

55 عين التقريب التآلفي المماسي لكل

دالة من الدوال التالية عند العدد  $a$ .

1)  $f(x) = -3x^2 + x$  ؛  $a = 0$

2)  $f(x) = \frac{1}{x} + x$  ؛  $a = -1$

3)  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$  ؛  $a = 1$

4)  $f(x) = x^3 + x + 1$  ؛  $a = -2$

56  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة  $f$  و انجز جدول

تغيراتها.

2 - عين التقريب التآلفي المماسي للدالة  $f$

عند العدد 1.

3 - اعط قيمة مقربة للعدد  $f(1,099)$  إلى

$10^{-2}$  بالنقصان.



مسائل

57  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

( $\gamma$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(0; i^*, j^*)$ .

1 - عين إحداثيات النقط من المنحنى ( $\gamma$ )، يكون من أجلها معامل توجيه المماس يساوي 1.

2 - عين إحداثيات النقط من المنحنى ( $\gamma$ )، يكون من أجلها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته:

$$y = 3x + 5$$

58  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$

$$f(x) = \frac{5 - 2x}{3x - 4}$$

1 - اثبت أنه يوجد عدداً حقيقياً  $a, b$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ ،

$$f(x) = a + \frac{b}{3x - 4}$$

2 - على أي مجالات تقبل الدالة  $f$  الإشتقاق؟

- عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

3 - ادرس تغيرات الدالة  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

4 - بين أن الدالة  $f$  لا تقبل قيماً حدية.

5 - عين معادلة المماس ( $T$ ) للمنحنى

الممثل للدالة  $f$  عند النقطة فاصلتها 1 - .

6 - عين المماسات للمنحنى الموازية للمماس ( $T$ ).

59  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 3$$

1 - عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

2 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f'(x) = 3(1 - x)(1 + x)$$

- حل المعادلة  $f'(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$

ثم أدرس إشارة  $f'(x)$ .

3 - استنتج إتجاه تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

ثم انجز جدول التغيرات.

4 - المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(0; i^*, j^*)$ .

عين معادلة المماس ( $T$ ) للمنحنى ( $\gamma$ )

الممثل للدالة  $f$  عند النقطة  $A$  التي فاصلتها 2 - .

5 - ارسم المنحنى ( $\gamma$ ) و المماس ( $T$ ) في

المعلم السابق.

6 - حل بيانياً المعادلة  $f(x) = 1$ .

60  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$$

( $\gamma$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(0; i^*, j^*)$ .

1) عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$ .



ثمن بيع المتر المكعب الواحد (بآلاف الدينانير) هي دالة  $p$  معرفة كما يلي :

$$p(x) = -4,33x + 124,2$$

1 - ارسم المنحنى ( $D$ ) الممثل للدالة  $p$ ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

الوحدة :  $1cm$  يقابله  $1m^3$  على محور الفواصل.

و  $1cm$  يقابله 10 000 دينار على محور الترتيب.

2 - يرمز  $v$  إلى ثمن البيع (بآلاف الدينانير) لكمية قدرها  $x$  مترا مكعبا.

$$v(x) = -4,33x^2 + 124,2x$$

3 - عين عدد الأمتار المكعبة التي من أجلها يكون الدخل أعظما.

ما هو عندئذ، ثمن المتر المكعب الواحد و ما هو الدخل الكلي ؟

2) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $D$  ؛

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

3) عين المجالات التي تقبل فيها الدالة  $f$  الإشتقاق ثم عين دالتها المشتقة  $f'$ .

4) أثبت أن  $f'(x)$  من إشارة  $x^2 + 4x - 8$  على  $D$ .

5) ادرس تغيرات الدالة  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

6) اكتب معادلة للماس ( $T$ ) للمنحنى ( $\gamma$ ) عند النقطة التي فاصلتها 1 - .

7) حل المعادلة  $f'(x) = f'(-1)$  فسر، هندسيا النتيجة.

8) ارسم، بحاسبة بيانية، المنحنى ( $\gamma$ ) باختيار النافذة  $[-10; 10]$  للمتغير  $x$ .

9) حل جبريا المعادلة  $f(x) = 0$  وتحقق من صحة النتائج بيانيا.

10)  $m$  عدد حقيقي.

أدرس، حسب قيم  $m$ ، عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$ ، مستعينا بالمنحنى ( $\gamma$ ).

**61** يسوق مركب بيترو كيميائي مادة سائلة. الكمية اليومية المباعة تتراوح بين 2 و 15 مترا مكعبا.



## الباب 6 السلوك التقاربي \*

1. نهايات دوال مألوفة
2. العمليات على النهايات
3. المستقيمات المقاربة

ظهر مفهوم اللانهاية في الرياضيات مع ظهور الرياضيات بذاتها عند الإغريق. أما عند العرب فقد قبل ثابت ابن قرّة (836-901) وجود كميات لانهاية ومختلفة فيما بينها تنفي نتائج أرسطو ومؤيديه. وأعطى ابن البناء تعريفا للانهاية يتوافق مع الطبيعة العملية لهذا المفهوم الرياضي، ويعتبر أن اللانهاية حكم وليس وصفا، وأنه من مجال الفكر وليس من الملموس. ومعنى اللانهاية يتمثل في أنه لا يمكن بلوغ نهاية دون اضافة شيء إليها.

أما مفهوم النهاية فقد أُستعمل وهو في مرحلة التطور، من طرف فيرما "Fermat" و أولر "Euler" وعلماء آخرين في القرنين السابع عشر والثامن عشر وانتظر القرن التاسع عشر ليظهر جليا. لقد ادرج هذا المفهوم بدقة في البراهين في القرن التاسع عشر من طرف كوشي "Cauchy"، وأكتسب المعنى الذي يُعرّف به حاليا في حدود سنة 1860 من خلال الأعمال التي انجزها الرياضي الألماني كارل وارستراس "Karl weistrass".



ابن البناء  
(1256 - 1321)



# إستبتيان متعدد الإجابات

إختر الإجابة الصحيحة

| السؤال  | إجابة 1                     | إجابة 2                     | إجابة 3                     |
|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $a$ و $b$ عددان موجبان .<br>إذا كان $a < b$ فإن .....<br>.....                                    | $a^2 < b^2$                 | $a^2 = b^2$                 | $a^2 > b^2$                 |
| (2) $a$ و $b$ عددان سالبان .<br>إذا كان $a < b$ فإن .....<br>.....                                    | $a^2 < b^2$                 | $a^2 = b^2$                 | $a^2 > b^2$                 |
| (3) $a$ و $b$ عددان غير منعدمين .<br>إذا كان $a < b$ فإن .....<br>.....                               | $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ | $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ | $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ |
| (4) $a$ و $b$ عددان موجبان .<br>إذا كان $a < b$ فإن .....<br>.....                                    | $\sqrt{a} < \sqrt{b}$       | $\sqrt{a} = \sqrt{b}$       | $\sqrt{a} > \sqrt{b}$       |
| (5) $a$ و $b$ عددان حقيقيان .<br>إذا كان $a < b$ فإن .....<br>.....                                   | $a^3 < b^3$                 | $a^3 = b^3$                 | $a^3 > b^3$                 |
| (6) $\lim_{x \rightarrow 0} x$ هي .....<br>.....  | 0                           | $\frac{1}{2}$               | 1                           |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ هي .....<br>.....  | 0                           | $\frac{1}{4}$               | 1                           |
| (8) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3$ هي .....<br>.....  | 0                           | $\frac{1}{8}$               | 1                           |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ هي .....<br>.....   | 0                           | $\frac{1}{2}$               | 1                           |
| (10) المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $x = -1$ .....<br>محور الفواصل يوازي<br>محور الترتيب يوازي         | محور الفواصل يوازي          | محور الترتيب يوازي          | يشمل المبدأ                 |
| (11) المستقيم ( $\Delta$ ) المعرف بالمعادلة $y = 2$ .....<br>محور الفواصل يوازي<br>محور الترتيب يوازي | محور الفواصل يوازي          | محور الترتيب يوازي          | يشمل المبدأ                 |
| (12) المستقيم (L) المعرف بالمعادلة $y = x + 3$ .....<br>محور الفواصل يوازي<br>محور الترتيب يوازي      | محور الفواصل يوازي          | محور الترتيب يوازي          | لا يوازي محوري المعلم       |

موقع عيون البصائر التعليمي

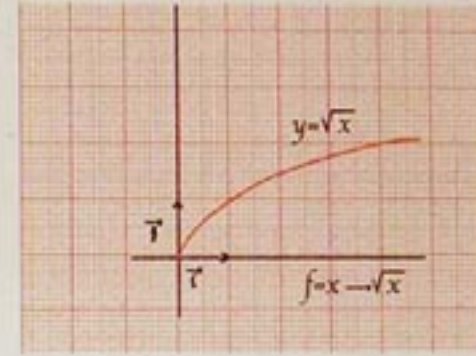
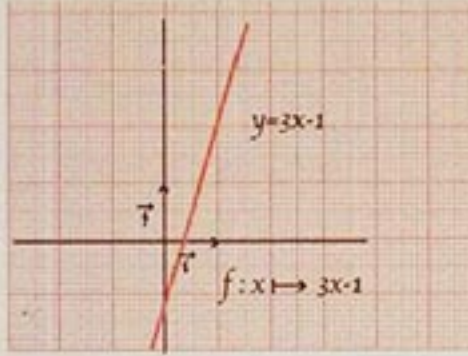
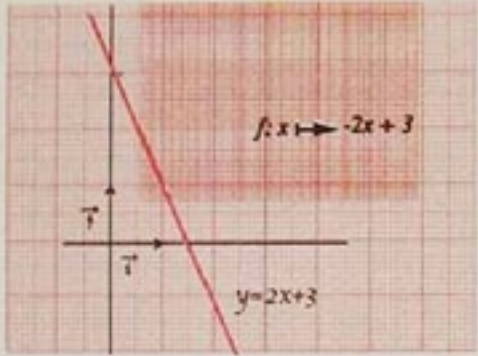
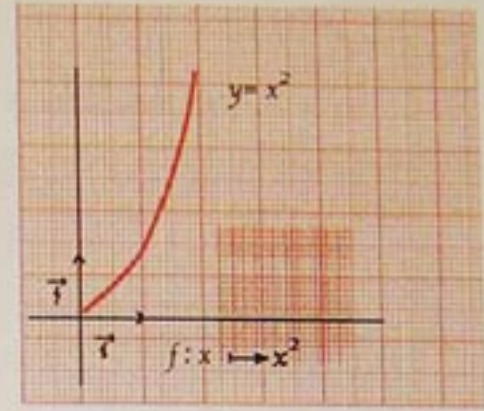
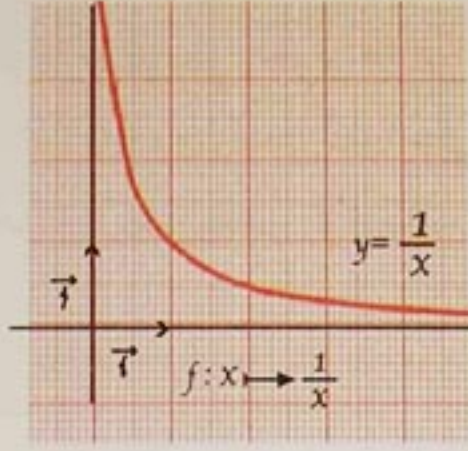
elbassair.net



# أنشطة تمهيدية

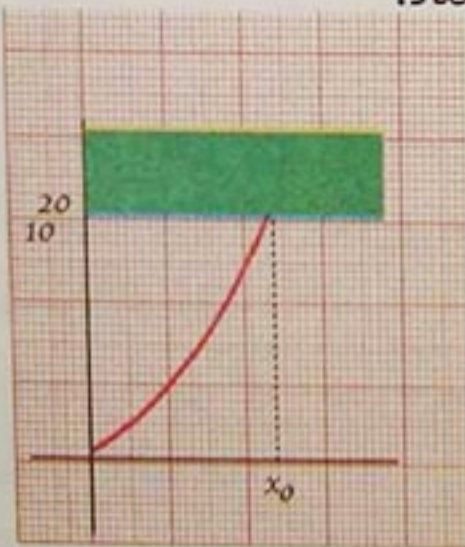
## نشاط 1: دراسة بعض الدوال بجوار $+\infty$

نعتبر الدوال  $f$  وتمثيلاتها البيانية، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الشكل).



- إذا كان  $x$  عنصرا من المجموعة  $\{10^3; 10^4; 10^6\}$ ، أحسب  $f(x)$  في كل حالة.
- بالنسبة إلى كل دالة من الدوال المقترحة في هذه الأمثلة، ومن بين الإجابات 1؛ 2؛ 3، ماهي الإجابة التي تختارها لإتمام الجمل التالية:
- عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر في المجال  $[0; +\infty[$  فإن قيم  $f(x)$  تصبح

- (1) أكبر فأكبر.
- (2) تقترب من عدد حقيقي معين. حدد في هذه الحالة هذا العدد.
- (3) سالبة، ولكن قيمتها المطلقة كبيرة.



## نشاط 2: النهاية غير المنتهية بجوار $+\infty$

- (أ) دراسة نهاية الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2$  في جوار  $+\infty$ .
- الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$ .
- بالتمعن في المنحنى الممثل للدالة  $f$  (الشكل) نتوقع أن قيم  $f(x)$  تصبح كبيرة كلما كان  $x$  كبيرا.



# أنشطة تمهيدية

(1) تحقق أنه يمكن إيجاد عدد  $x_0$  موجب تماما حيث  $x_0^2 = 10^{20}$

(2) أثبت أن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > x_0$  ؛  $x^2 > 10^{20}$  ؟

(3) بصفة عامة، نفرض أن  $A$  عدد حقيقي كفي، كبير بقدر الإمكان.

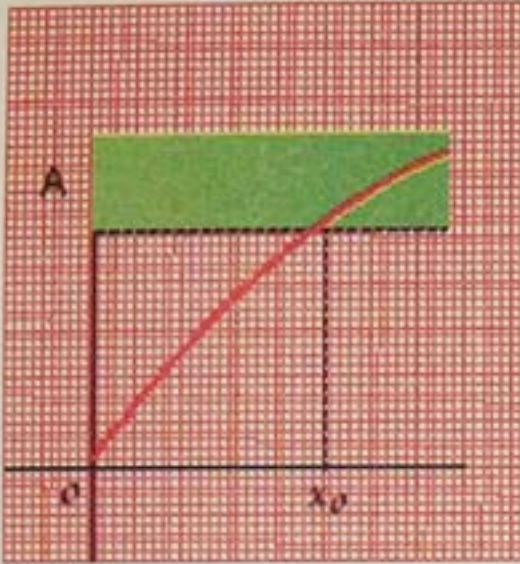
- تحقق أنه يمكن إيجاد عدد  $x_0$  موجب تماما بحيث  $x_0^2 = A$ .

- أثبت أن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > x_0$  ؛  $x^2 > A$  ؟

(ب) دراسة نهاية الدالة  $g$  حيث  $g(x) = \sqrt{x}$  في جوار  $+\infty$

الدالة  $g$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  و متزايدة تماما على هذا المجال.

نفرض أن  $A$  عدد حقيقي موجب و كبير بقدر الإمكان.



(1) تحقق أنه يمكن إيجاد عدد حقيقي  $x_0$  حيث  $\sqrt{x_0} = A$ .

(2) أثبت أن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > x_0$  ؛  $\sqrt{x} > A$  ؟

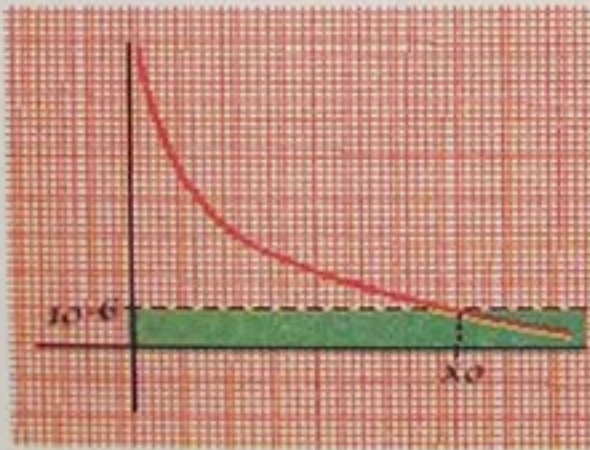
## نشاط 3: أ، النهاية المنتهية بجوار $+\infty$

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x}$  متناقصة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .

المنحنى الممثل لها يظهر أقرب أكثر فأكثر من محور

الفواصل. الأعداد  $\frac{1}{x}$  قريبة أكثر فأكثر من العدد 0 كلما

كان  $x$  أكبر فأكبر.



(1) تحقق أنه، يمكن إيجاد عدد  $x_0$  موجب تماما بحيث

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{10^6}$$

(2) أثبت أن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > x_0$  ؛  $\frac{1}{x} < \frac{1}{10^6}$  ؟

(3) بصفة عامة، أثبت أنه يمكن إيجاد عدد  $x_0$  حيث  $\frac{1}{x_0} = r$ ،  $r$  عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر الإمكان.

(4) اثبت أنه من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > \frac{1}{r}$  ؛  $\frac{1}{x} < r$ ،  $r$  عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر الإمكان.



# أنشطة تمهيدية

(ب) النهاية غير المنتهية بجوار العدد 0 عن اليمين

المنحنى الممثل للدالة  $f$  يظهر أقرب، أكثر فأكثر من محور الترتيب كلما كانت الفواصل الموجبة لنقطه تقترب أكثر فأكثر من العدد 0. وبالتالي، الأعداد  $\frac{1}{x}$  تصبح أكبر فأكثر كلما كان  $x$  (الموجب) أقرب إلى العدد 0 بقدر الإمكان.

(1) تحقق أنه، يمكن إيجاد عدد  $x_0$  موجب تماما بحيث  $\frac{1}{x_0} = 10^6$ .

(2) اثبت أن من أجل كل عدد موجب  $x$  غير منعدم حيث  $x < x_0$  ؛  $\frac{1}{x} > 10^6$ .

(3) بصفة عامة، اثبت أنه يمكن إيجاد عدد  $x_0$  حيث  $\frac{1}{x_0} = B$  ،  $B$  عدد حقيقي موجب تماما وكبير بقدر الإمكان.

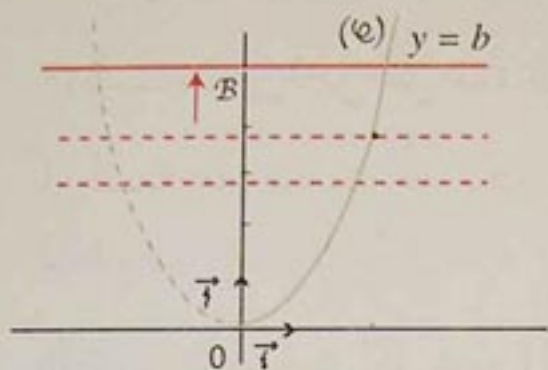
(4) اثبت أن من أجل كل عدد  $x$  موجب تماما بحيث  $x < \frac{1}{B}$  ؛  $\frac{1}{x} > B$  ،  $B$  عدد حقيقي موجب تماما وكبير بقدر الإمكان.



1. نهايات دوال مألوفة

(أ) نهايات الدالة "مربع"

الدالة "مربع" هي الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2$ .  
 (ع) هو القطع المكافئ الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



• النهاية عند  $+\infty$

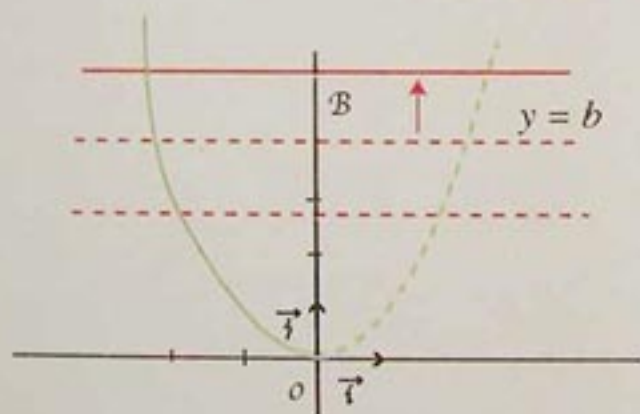
عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر، فالأعداد  $x^2$  تأخذ قيما أكبر من أي عدد حقيقي  $b$ .  
 المنحنى (ع) الممثل للدالة "مربع" يقع فوق أي مستقيم معادلته  $y = b$ .

نهاية الدالة  $x^2 \rightarrow +\infty$  هي  $x \rightarrow +\infty$  عندما يتؤول  $x$  إلى  $+\infty$   
 أو أيضا:  $x^2$  يتؤول إلى  $+\infty$  عندما يتؤول  $x$  إلى  $+\infty$ .

نقول عندئذ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

نكتب



• النهاية عند  $-\infty$

الدالة "مربع" زوجية على  $\mathbb{R}$ ؛ إذن المنحنى (ع) يقبل محور تناظر وهو محور ترتيب المعلم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

نكتب

هذه النتيجة تدل على أنه عندما يأخذ  $x$  قيما سالبة، بقيم مطلقة أكبر فأكبر، فالأعداد  $x^2$  تأخذ قيما أكبر من أي عدد حقيقي  $b$ . المنحنى (ع) يقع فوق أي مستقيم معادلته  $y = b$ .

مثلا: عندما يأخذ  $x$  القيم  $-10$  ؛  $-100$  ؛  $-10^4$  ؛ .....

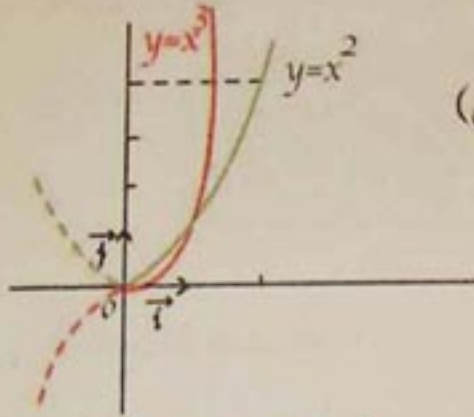
العدد  $x^2$  يأخذ القيم  $10^2$  ؛  $10^4$  ؛  $10^8$  ؛ ..... على الترتيب.



**(ب) نهايات الدالة "مكعب"**

الدالة "مكعب" هي الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^3$ .  
 (ع) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

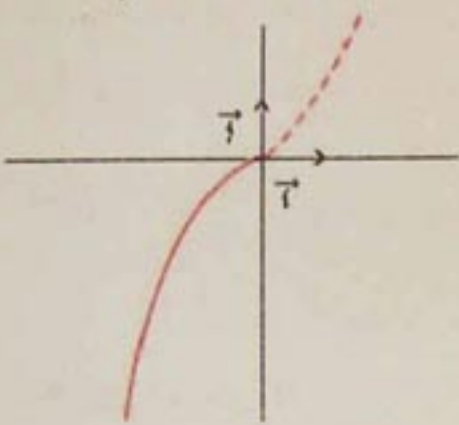
• النهاية عند  $+\infty$



نعلم أن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x \geq 1$ ،  $x^3 \geq x^2$  (لشكل)

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

• النهاية عند  $-\infty$

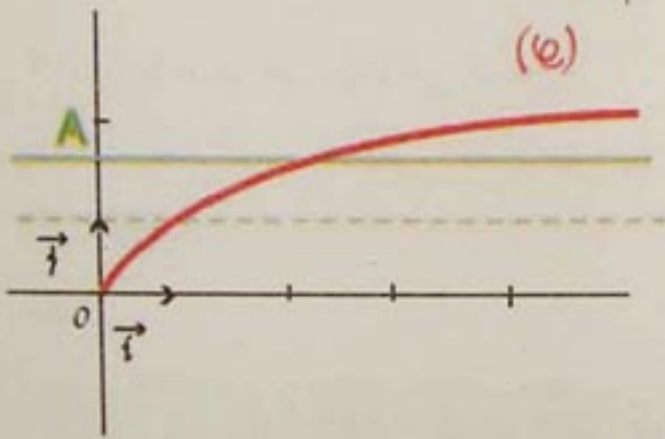


نعلم أن الدالة "مكعب" فردية على  $\mathbb{R}$ ،  
 والمنحنى (ع) الممثل لها يقبل مركز تناظر.

ينتج أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

**(ج) نهايات الدالة "الجذر التربيعي"**

الدالة "الجذر التربيعي" هي الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \sqrt{x}$ .  
 (ع) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



- الدالة الجذر التربيعي متزايدة على  $[0; +\infty[$  وبالتالي، عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر، فالعدد  $\sqrt{x}$  يأخذ قيما أكبر، حيث  $\sqrt{x}$  يصبح أكبر من أي عدد حقيقي  $A$ ،

نقول: عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$ ،  $\sqrt{x}$  يؤول إلى  $+\infty$

ونكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

**(د) نهايات الدالة "مقلوب"**

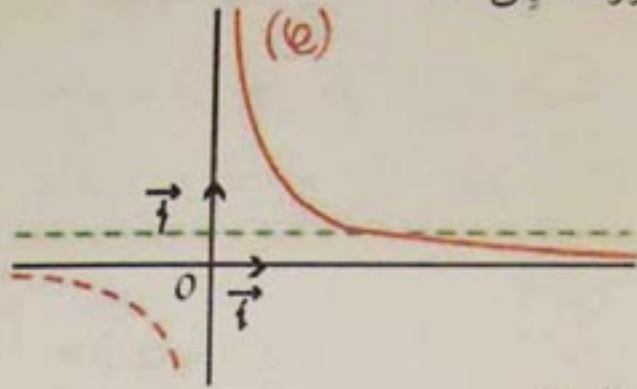
الدالة "مقلوب" هي الدالة  $f$  المعرفة على المجموعة  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  
 (ع) القطع الزائد الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



• النهاية عند  $+\infty$

نعلم أنه عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر في المجال  $+\infty$ ;  $0$  فالعدد  $\frac{1}{x}$  موجب ويقترّب أكثر فأكثر من  $0$ .

فنقول إن نهاية الدالة  $\frac{1}{x}$  هي  $0$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

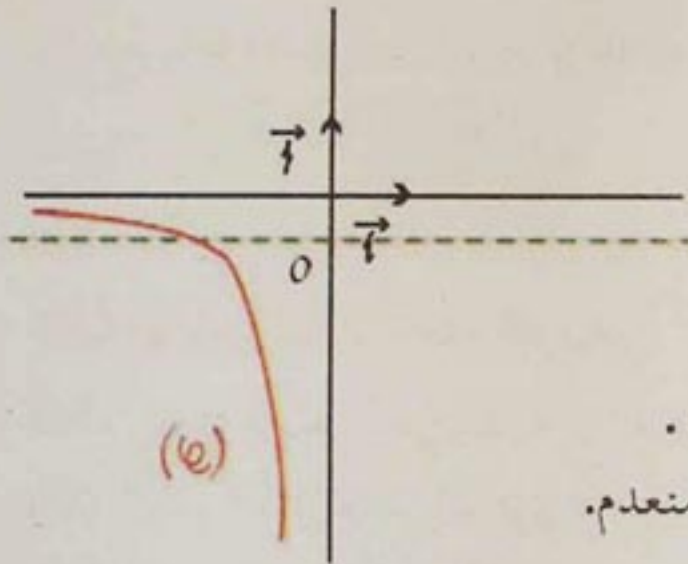


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ونكتب

• النهاية عند  $-\infty$

نعلم أن الدالة "مقلوب" فردية، إذن المنحنى (ع) الممثل لها يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ينتج أن:

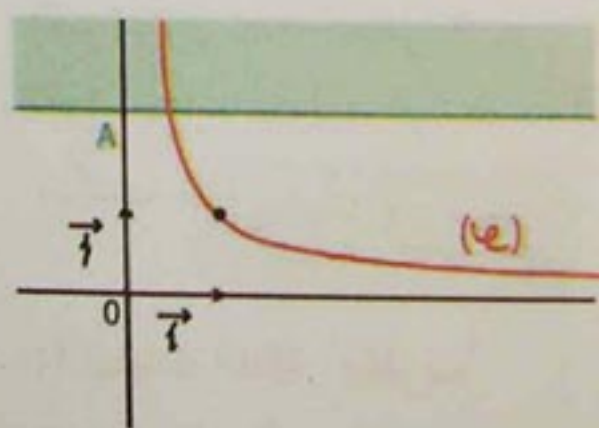
• النهاية عند  $0$

الدالة  $\frac{1}{x}$  ليست معرفة عند العدد  $0$ . هذه الدالة معرفة عند كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم.

• النهاية عند العدد  $0$  عن اليمين

عند قسمة العدد  $1$  على أعداد موجبة تماما  $x$  وقريبة من العدد  $0$ ، نتحصل على أعداد أكبر فأكبر.

مثلا:



|               |            |           |                  |                 |     |
|---------------|------------|-----------|------------------|-----------------|-----|
| $x$           | $10^{-10}$ | $10^{-5}$ | $10^{-2} = 0,01$ | $10^{-1} = 0,1$ | ... |
| $\frac{1}{x}$ | $10^{10}$  | $10^5$    | 100              | 10              | ... |

للحصول على  $\frac{1}{x} > A$ ، يكفي اختيار  $x$  حيث  $0 < x < \frac{1}{A}$ .

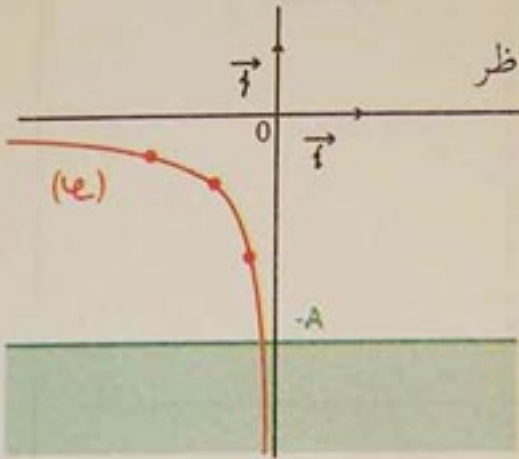
نقول إن نهاية الدالة  $\frac{1}{x}$  هي  $+\infty$  عند العدد  $0$  عن اليمين أي  $\frac{1}{x}$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  (الموجب تماما) إلى  $0$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

نكتب

• النهاية عند العدد 0 عن اليسار المنحنى (e) الممثل للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  يقبل مركز تناظر وهو مبدأ المعلم.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ينتج أن

### جدول إستخلاصي لنهايات الدوال المرجعية

الجدول التالي يلخص نتائج نهايات الدوال المرجعية عند 0،  $+\infty$  و  $-\infty$ .

| النهايات   | الدالة               |
|--|----------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$<br>$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$     | $x \mapsto x$        |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$<br>$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ | $x \mapsto x^2$      |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$<br>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ |



|   |                         |
|---|-------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ | $x \mapsto \frac{1}{x}$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$   | $x \mapsto x^3$         |

## 2. العمليات على النهايات

إذا عُرِفَت نهايتا كل من الدالتين  $f$  و  $g$  عند عدد حقيقي أو  $-\infty$  أو  $+\infty$  فإن النظريات المنصوص عليها في الجداول التالية، والتي تقبل بدون برهان، تسمح بحساب نهايات مجموعهما وجدائهما وحاصل قسمتهما، عند الإمكان. هذه النظريات لا يمكن تطبيقها في بعض الحالات. نسمي هذه الحالات حالات عدم التعيين ونشير إليها في الجدول بالعلامة؟

### أ) نهاية مجموع دالتين

**مبرهنة 1:**  $\ell$  و  $\ell'$  عددان حقيقيان.

$\alpha$  هو عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ .



|           |           |           |           |           |         |  |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|--|
| $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l$       | $l$       | $l$     | إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ هي     |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l'$    | و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ هي.....       |
| ?         | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l' l'$ | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$ هي |

في هذه المبرهنة، توجد حالة عدم تعيين واحدة. كل حالة عدم تعيين تتطلب دراسة خاصة.

أمثلة: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} + x\right) = 2,25$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x} = 0,25$  و  $\lim_{x \rightarrow 4} x = 2$

**ب) نهاية جداء دالتين**

**مبرهنة**  $l$  و  $l'$  أعدادان حقيقيان.

يرمز  $\alpha$  إلى عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ .

|                              |           |           |           |           |           |           |           |         |  |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|--|
| 0                            | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $l$       | $l$       | $l$       | $l$       | $l$     | إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \cdot g(x))$ هي... |
|                              |           |           |           | $l < 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $l > 0$   |         |  |
| $+\infty$<br>أو<br>$-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l'$    | ونهاية $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ هي.....              |
| ?                            | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l' l'$ | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot g(x)$ هي...        |

في هذه المبرهنة، توجد حالة عدم تعيين واحدة.



أمثلة: •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)x = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1)x = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \frac{1}{x} = ?$  حالة عدم التعيين.

رفع حالة عدم التعيين . لدينا من أجل  $x \neq 0$  ؛  $(x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \frac{1}{x} = 1$

(ج) نهاية مقلوب دالة

مبرهنة:  $\ell$  عدد حقيقي،  $\alpha$  هو عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$  .

|           |           |   |   |                             |   |
|-----------|-----------|---|---|-----------------------------|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | 0   | 0   | $\ell$<br>( $\ell \neq 0$ ) | إذا كان $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ هي ..                    |
|           |           | $f(x) < 0$ من أجل كل عدد $x$ قريب من $\alpha$ . | $f(x) > 0$ من أجل كل عدد $x$ قريب من $\alpha$ . |                             |   |
| 0         | 0         | $-\infty$                                       | $+\infty$                                       | $\frac{1}{\ell}$            | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{1}{f(x)}\right)$ هي .. |

أمثلة: (1)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  ومن أجل  $x > 1$  ؛  $x-1 > 0$  .

ومن أجل  $x < 1$  ؛  $x-1 < 0$  .

إذن:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$



(2)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  كما يلي:  $g(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$   
 لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

ولدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$

(د) نهاية دالة كثير الحدود عند  $+\infty$  أو  $-\infty$

$f$  هي الدالة كثير الحدود المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث  $n$  عدد طبيعي غير منعدم و  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  أعداد حقيقية.

حيث  $a_n \neq 0$

$$f(x) = x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \quad ; \quad x \neq 0$$

- حساب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} = 0 \quad \text{و} \quad \dots \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$$

ينتج أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{فإن} \quad a_n > 0$$



إذا كان  $a_n < 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = -\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- حساب نهاية الدالة  $f$  عند  $-\infty$ .

إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

إذا كان  $n$  فرديا فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

ولدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$

ينتج أن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

الحالة الأولى:  $n$  عدد زوجي - إذا كان  $a_n < 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- إذا كان  $a_n > 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

الحالة الثانية:  $n$  عدد فردي - إذا كان  $a_n < 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- إذا كان  $a_n > 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

**مبرهنة:** نهاية الدالة كثير الحدود  $f$  عند  $-\infty$  أو  $+\infty$  هي نهاية الدالة  $a_n x^n$  عند  $x \rightarrow -\infty$  أو  $+\infty$ .

**أمثلة:** •  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

إذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



$$g(x) = -4x^3 + 5x + 1 \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{إذن:}$$

(هـ) نهاية الدالة التناظرية عند  $-\infty$  أو  $+\infty$

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{حيث } g \text{ هي دالة تناظرية معرفة كما يلي:}$$

حيث  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية  $c \neq 0$  و  $ad - bc \neq 0$ .

$$\text{الدالة } g \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$\text{أي على المجموعة } ]-\infty; -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} \quad ; \quad x \neq 0 \quad \text{لدينا: من أجل } x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b}{x} = 0 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d}{x} = 0 \quad \text{وكذلك}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{a}{c} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{a}{c} \quad \text{وبالتالي}$$

مبرهنة:

$$g \text{ هي دالة تناظرية حيث } c \neq 0 \text{ ؛ } g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{a}{c} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{a}{c}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x+4} = \frac{3}{2} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2x+4} = \frac{3}{2} \quad \bullet \text{ أمثلة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{1-3x} = \frac{2}{3} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{1-3x} = \frac{2}{3}$$

### 3. المستقيمات المقاربة

المستوي منسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ،  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$ .

(أ) المستقيم المقارب الموازي محور الترتيب

$a$  عدد حقيقي.

**تعريف:** المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $x = a$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$

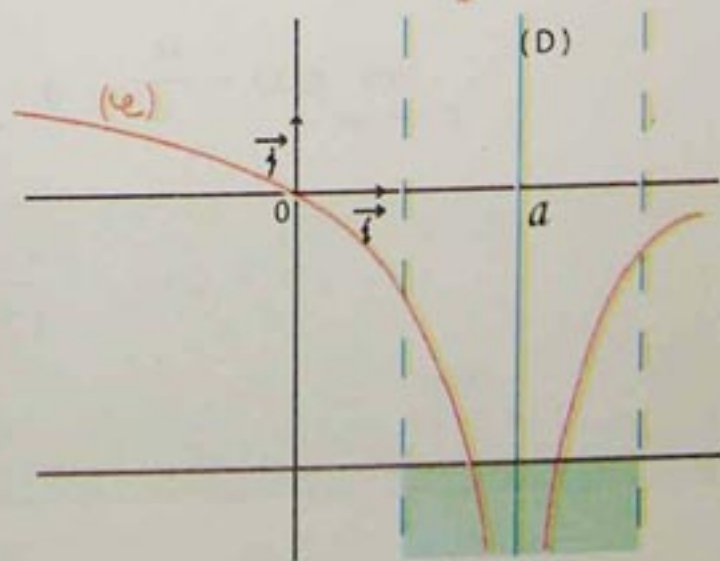
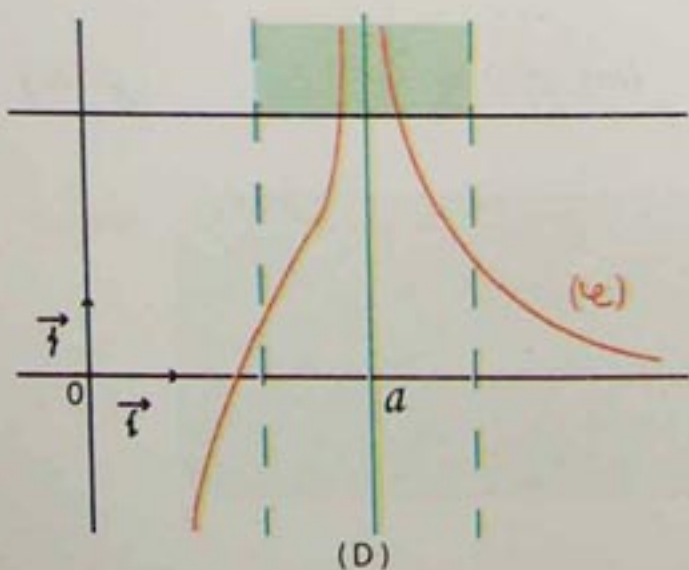
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

يعني

**ملاحظة:** إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  فإن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يُحصر في شريط يشمل

المستقيم ذا المعادلة  $x = a$  من أجل  $x$  قريب بقدر الإمكان من  $a$ .

التفسير البياني





**أمثلة: (1)**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (أي محور الترتيب) هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

**(2)**  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $g(x) = \frac{3}{x+1}$

المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

إذن المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الترتيب وهو المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$ .

### ب) المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

$\ell$  عدد حقيقي.

**تعريف:** المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = \ell$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

**ملاحظات:** • إذا كان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = \ell$  مستقيم

مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، يوازي محور الفواصل.

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = \ell$  مستقيم

مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، يوازي محور الفواصل.



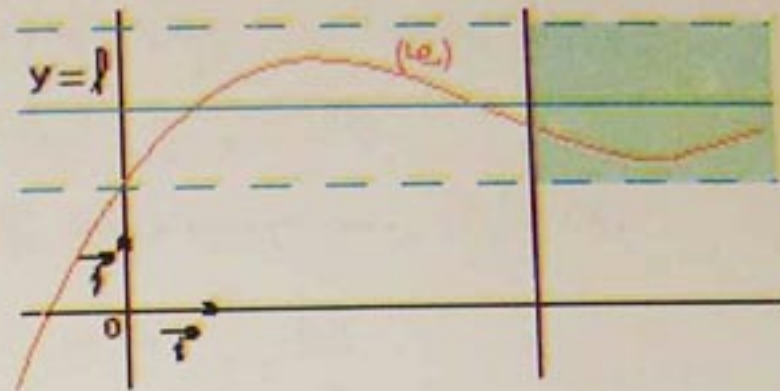
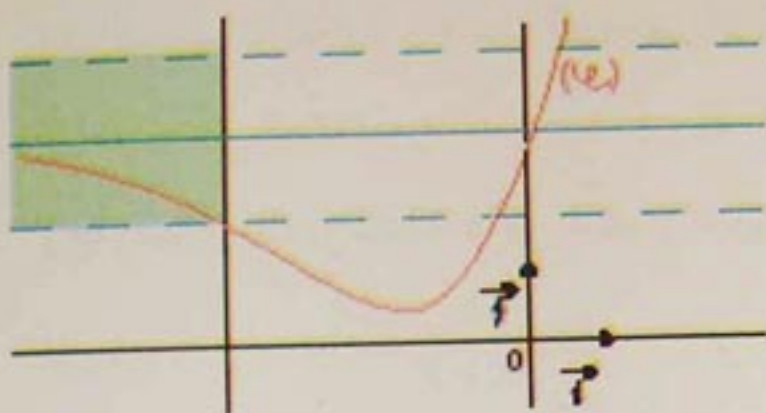
## التفسير البياني

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  فإن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يحصر في شريط

يشمل المستقيم ذا المعادلة  $y = \ell$  ، من أجل  $x$  صغير بقدر الإمكان.

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  فإن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يحصر في شريط

يشمل المستقيم ذا المعادلة  $y = \ell$  ، من أجل  $x$  كبير بقدر الإمكان.



عند  $-\infty$

عند  $+\infty$

**مثال:**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

$(\mathcal{C})$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

لدينا

إذن المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = -2$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

**ج) المستقيم المقارب المائل**

**تعريف:** المستقيم  $(D)$  المعروف بالمعادلة  $y = ax + b$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يعني

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على مجال من الشكل  $[h; +\infty[$  أو  $] -\infty; h ]$  حيث  $f(x) = ax + b + q(x)$  مع  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0$

مبرهنة:

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 0 \text{ أو } \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0 \right)$$

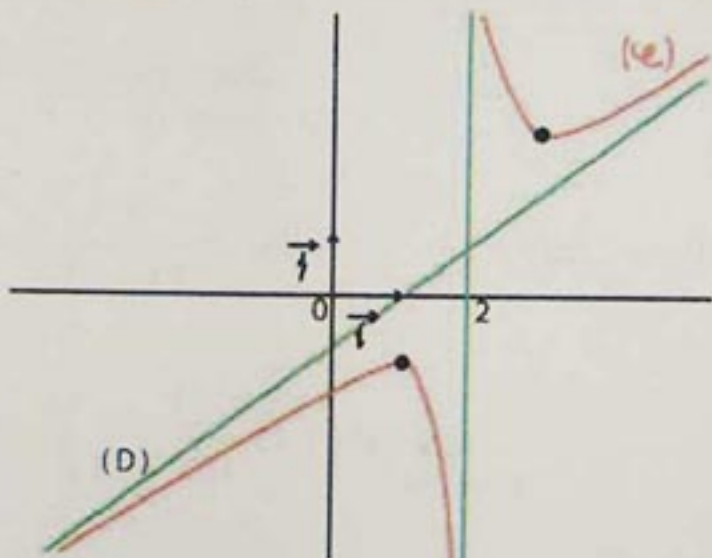
فإن المستقيم المعرف بالمعادلة  $y = ax + b$  هو مستقيم مقارب للمنحنى (ع).

أمثلة: (1)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$

لدينا: من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 2 ،  $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = x - 1$  هو مستقيم مقارب للمنحنى (ع).



(2)  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{4\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x-4}$

لدينا من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 4 ،  $f(x) = 2x + \frac{8}{x-4}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x-4} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x-4} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة  $y = 2x$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ع).



1- رفع حالة عدم التعيين من الشكل  $+\infty - \infty$

**طريقة:** لرفع حالة عدم التعيين من الشكل  $+\infty - \infty$  يمكن إستخراج عبارة مناسبة كعامل مشترك ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{x+1}$ . أحسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$ .

**حل:** لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل « $+\infty - \infty$ » عند تطبيق المبرهنات.

من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$   $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{x+1}$

$$= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{x^3(x+1)}\right) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x(x+1)}\right)$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) = +\infty$

إذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0$  وبالتالي:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x(x+1)} = 1$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x(x+1)}\right) = +\infty$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 - \frac{x^2}{x+1}\right) = +\infty$

2- رفع حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{\infty}{0}$  أو من الشكل  $\frac{0}{0}$

**طريقة:** لرفع حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{\infty}{0}$  ، يمكن استخراج عبارة مناسبة في البسط والمقام وتبسيط عبارة الدالة ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.



# طرائق

**تمرين 1:**  $f$  دالة معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:  $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$   
احسب نهاية  $f$  عند  $+\infty$ .  
**حل:** لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{\infty}{\infty}$  عند تطبيق المبرهنات.

رفع حالة عدم التعيين:  
لدينا، من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ؛  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

ومن أجل  $x > 1$  ؛  $\frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{x}{x-1} \right)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

وبالتالي:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = 0$

ينتج أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0$  إذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**تمرين 2:**  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$   
احسب نهاية  $g$  عند  $1$  عن اليمين.  
**حل:** لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - 1 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$

تظهر حالة عدم التعيين من الشكل  $\frac{0}{0}$  عند تطبيق المبرهنات.

## 3- رفع حالة عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$

**طريقة:** لرفع حالة عدم التعيين من الشكل  $0 \times \infty$  ، يمكن تحويل عبارة الدالة إلى شكل مجموع ثم تطبيق المبرهنات حول النهايات.

**تمرين:**  $f$  دالة معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = (x-1) \left( 2 - \frac{1}{x-1} \right)$   
احسب نهاية  $f$  عندما  $x$  يؤول إلى  $1$ .

**حل:** لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

وبالتالي:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 2 - \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$



تظهر حالة عدم التعيين من الشكل  $0 \times \infty$  عند تطبيق المبرهنات.  
رفع حالة عدم التعيين.

$$f(x) = (x-1) \left( 2 - \frac{1}{x-1} \right) \quad ; \quad ]1; +\infty[ \text{ من المجال } x \text{ عدد كل أجل من أجل كل عدد } x$$

$$= 2(x-1) - \frac{1}{(x-1)}$$

$$= 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  ؛  $f(x) = 2x - 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1$$

>

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 \quad \text{إذن}$$

>

$$x \rightarrow 1$$

4- تعيين المستقيمات المقاربة الموازية لأحد المحورين

طريقة:

$f$  دالة معرفة على جزء  $D$  من  $\mathbb{R}$ .

(e) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم.

(1) إذا وجد عدد حقيقي  $x_0$  حيث  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (أو  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ )

فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $x = x_0$  مستقيم مقارب للمنحنى (e)، يوازي محور الترتيب.

(2) إذا وجد عدد حقيقي  $b$  حيث  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  (أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ )

فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = b$  مستقيم مقارب للمنحنى (e)، يوازي محور الفواصل.

تمرين:  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$



(ع) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (ع).

**حل:** الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$  أي المجموعة  $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right[ \cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ .

حساب نهايات  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $\frac{1}{3}$  وإلى  $-\infty$  وإلى  $+\infty$ .

$$\text{إذا كان } x > \frac{1}{3} \text{ فإن } 3x - 1 > 0 \text{ . إذن } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{إذا كان } x < \frac{1}{3} \text{ فإن } 3x - 1 < 0 \text{ . إذن } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = \frac{1}{3}$  مستقيم مقارب للمنحنى (ع)، يوازي محور الترتيب. حساب نهايات  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{3x-1} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{3x-1} = \frac{1}{3}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة  $y = \frac{1}{3}$  مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل للمنحنى (ع).

5- إثبات أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = ax + b$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة

**طريقة:**

$f$  دالة معرفة على جزء  $D$  من  $\mathbb{R}$ .

(ع) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم.

(D) المستقيم الذي معادلته  $y = ax + b$  ،  $a \neq 0$ .

لإثبات أن المستقيم (D) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ع).

نحسب الفرق  $f(x) - (ax + b)$ .

$$\text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ (أو } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{)}$$

فإن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = ax + b$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ع).



**تمرين:**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

(ع) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = 2x + 3$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ع).

**حل:**

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  أي  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .

من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛

$$f(x) - (2x + 3) = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} - (2x + 3) = \frac{(2x^2 + x + 1) - (2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{4}{x - 1}$$

إذن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ ؛

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0 \quad \text{إذن}$$

ينتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = 2x + 3$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى (ع).



$f$  هي الدالة المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x+1}$   
 (ع) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. اثبت أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .
2. عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.
3. ادرس تغيرات الدالة  $f$  وانجز جدول تغيراتها.
4. بين أن المنحنى (ع) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل. عين معادلة لكل منهما.
5. حدد الوضع النسبي للمنحنى (ع) والمستقيم المقارب المائل.
6. ارسم، بعناية، المنحنى (ع) في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

حل:

1. البحث عن  $a, b, c$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$   
 من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-1$ ,

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1} \quad \text{اذن من أجل كل عدد } x \text{ يختلف عن } -1$$

$$\text{ينتج أن } ax^2 + (a+b)x + b+c = x^2 + 4x - 5$$

وبالتالي:  $a=1$  و  $a+b=4$  و  $b+c=-5$  وهي جملة معادلات

حلها يعطي:  $a=1$  ؛  $b=3$  ؛  $c=-8$ .

إذن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ؛  $f(x) = x + 3 - \frac{8}{x+1}$

2. تعيين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

$$\text{لدينا } ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[ = \mathbb{R} - \{-1\}$$

إذن نعين نهايات  $f$  عند  $-1$  ؛  $-\infty$  ؛  $+\infty$ .



# مسألة محلولة

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x - 5) = -8 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\cdot x + 1 > 0 \quad \text{فإن} \quad x > -1$$

$$\cdot x + 1 < 0 \quad \text{فإن} \quad x < -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{إذن}$$

ملاحظة: يمكن استعمال العبارة الثانية لـ  $f(x)$  أي  $x + 3 - \frac{8}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{x+1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x+1} = 0 \quad \text{نلاحظ أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty \quad \text{إذن}$$

3. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

ومن أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ؛  $f'(x) = 1 + \frac{8}{(x+1)^2}$  ؛

نلاحظ أن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ؛  $f'(x) > 0$  ؛

(مجموع عددين موجبين تماما).



# مسألة محلولة

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

|         |                            |      |                            |
|---------|----------------------------|------|----------------------------|
| $x$     | $-\infty$                  | $-1$ | $+\infty$                  |
| $f'(x)$ | +                          |      | +                          |
| $f(x)$  | $-\infty \nearrow +\infty$ |      | $-\infty \nearrow +\infty$ |

• جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4. البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $x = -1$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، يوازي محور الترتيب.

ولدينا أيضا  $f(x)$  يكتب على الشكل  $x + 3 - \frac{8}{x+1}$  حيث

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{x+1} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x+1} = 0$

إذن المستقيم  $(\Delta')$  ذو المعادلة  $y = x + 3$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

5. تحديد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و  $(\Delta')$ .

ندرس إشارة العبارة  $f(x) - (x + 3)$  على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن  $-1$ ؛  $f(x) - (x + 3) = \frac{-8}{x+1}$

إذن إشارة  $f(x) - (x + 3)$  هي إشارة  $\frac{-8}{x+1}$  على المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

الجدول المقابل يوضح إشارة  $f(x) - (x + 3)$ .

|                  |                                 |      |                                 |
|------------------|---------------------------------|------|---------------------------------|
| $x$              | $-\infty$                       | $-1$ | $+\infty$                       |
| $\frac{-8}{x+1}$ | +                               |      | -                               |
| النتائج          | $(\mathcal{C})$ فوق $(\Delta')$ |      | $(\mathcal{C})$ تحت $(\Delta')$ |



# مسألة محلولة

6. رسم المنحنى (ع)

– إحداثيات نقط تقاطع (ع) مع محوري الإحداثيات.

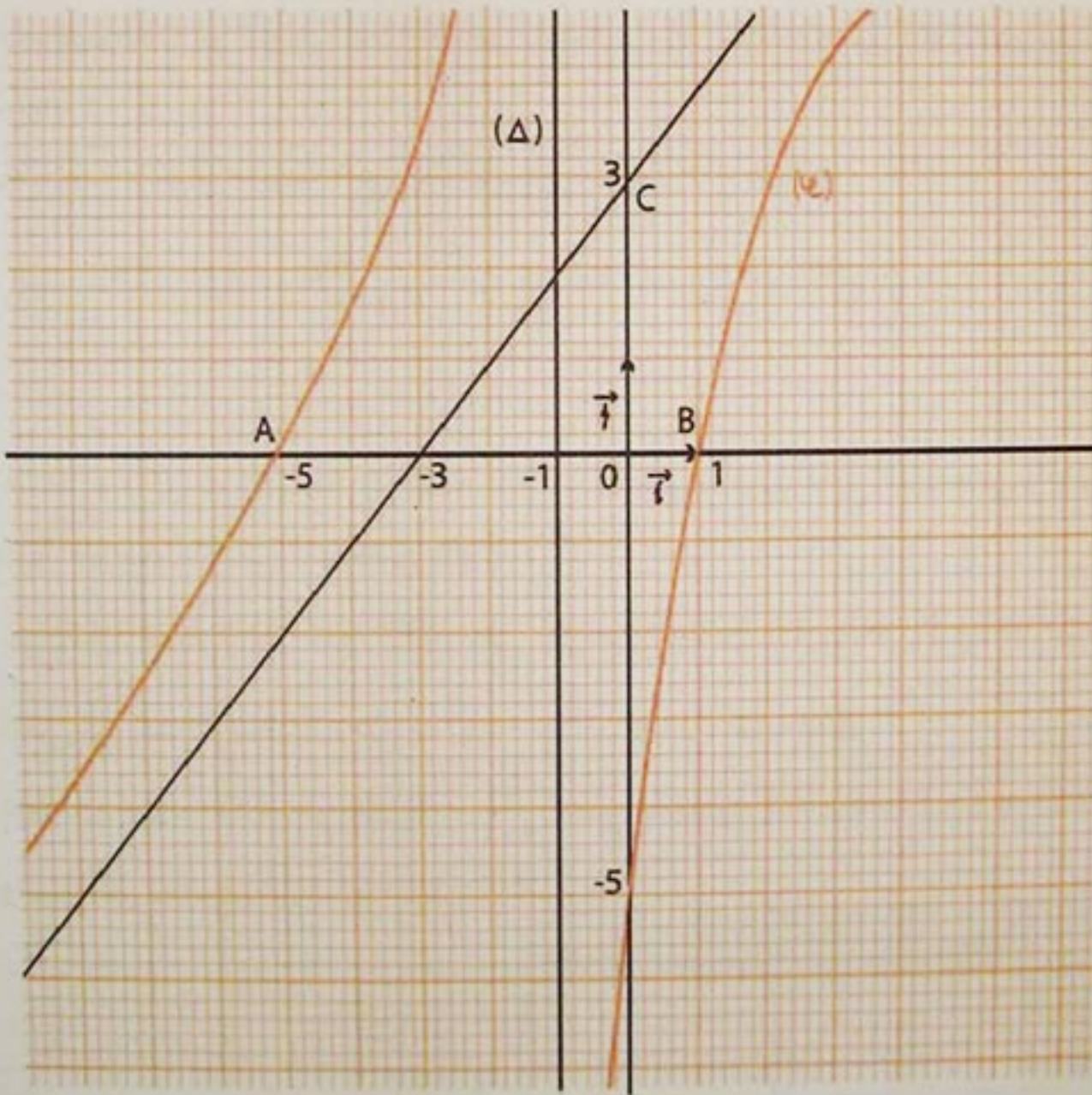
لدينا  $f(0) = -5$  إذن (ع) يقطع محور الترتيب في النقطة  $C(0 ; -5)$

ولدينا  $f(x) = 0$  إذا وفقط إذا كان  $x^2 + 4x - 5 = 0$

نحل في  $\mathbb{R} - \{-1\}$  المعادلة  $x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = 36$  أي  $\Delta > 0$  إذن المعادلة  $x^2 + 4x - 5 = 0$  تقبل حلين مختلفين هما  $-5$  و  $1$ .

إذن (ع) يقطع محور الفواصل في النقطتين  $A(-5 ; 0)$  و  $B(1 ; 0)$





1 صحيح أو خاطئ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ إذا كان } (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ إذا كان } (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ إذا كان } (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = +\infty \quad (8)$$

نهايات دوال مألوفة

2 عين نهايات الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{1}{4}x \quad ; \quad f(x) = -3x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad f(x) = -5x^2$$

$$f(x) = 3x^3 \quad ; \quad f(x) = -\sqrt{2}x^3$$

3 أحسب نهايات الدالة  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = -10x \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{3}x$$

$$f(x) = 0,5x^2 \quad ; \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^2$$

$$f(x) = \frac{2}{9}x^3 \quad ; \quad f(x) = -8x^3$$

4 عين نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \quad ; \quad f(x) = 4\sqrt{x}$$

$$f(x) = 10^4\sqrt{x} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{10}\sqrt{x}$$

5 عين النهاية عند  $-\infty$  ،  $+\infty$  وعند العدد

0 عن اليمين وعن اليسار للدالة  $f$  المعرفة على

$\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:

$$f(x) = -\frac{1}{3x} \quad ; \quad f(x) = \frac{4}{x}$$

$$f(x) = -\frac{4}{x^2} \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2x^2} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{-3x^2}$$

$$f(x) = \frac{-20}{x^3} \quad ; \quad f(x) = \frac{40}{x^3}$$



10  $f$  و  $g$  دالتان تحققان  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

حدّد النهايتين عند  $+\infty$  للدالتين  
 $f \cdot g$  و  $f + g$

11  $f$  و  $g$  دالتان حيث  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

حدّد نهاية  $g$  عند  $+\infty$ .

12  $f$  و  $g$  دالتان حيث  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -8$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

حدّد النهايتين عند  $-\infty$  للدالتين .  
 $f \cdot g$  و  $f + g$

حالات عدم التعيين

13 حدّد النهايتين عند  $+\infty$  و  $-\infty$  للدوال  
 كثيرات الحدود  $f$  التالية:

- $f(x) = -4x^2 + x - 1$  ؛  $f(x) = x^2 - x + 5$
- $f(x) = 10^{-3}x^2 + 10^3x + 2$  ؛  $f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 6$
- $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$  ؛  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$
- $f(x) = -6x^3 + 5x + 6$  ؛  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 11$
- $f(x) = x - 3x^3 + 2x^2 - 1$  ؛  $f(x) = -4x + 4x^2 + 4$

6 أحسب نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$   
 في كل حالة من الحالات التالية:

- $f(x) = -\frac{1}{4}x + 5$  ؛  $f(x) = \frac{x}{2} + 3$
- $f(x) = -x^2 + \frac{1}{3}$  ؛  $f(x) = x^2 + 2$
- $f(x) = -x^3 + 10^{10}$  ؛  $f(x) = x^3 - 10^2$

7 حدّد نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$   
 في كل حالة من الحالات التالية:

- $f(x) = 3 + \sqrt{x}$  ؛  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
- $f(x) = -\sqrt{x} + 10^3$  ؛  $f(x) = -10^5 + \sqrt{x}$

8 في كل حالة من الحالات التالية، عين  
 نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

- $f(x) = -x^2 + 3x$  ؛  $f(x) = x^2 + x$
- $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$  ؛  $f(x) = -x^2 - x$
- $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x^2}$  ؛  $f(x) = x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + 5$  ؛  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

9 في كل حالة من الحالات التالية، عين  
 نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

- $f(x) = -1 + \frac{2}{x+3}$  ؛  $f(x) = 3 + \frac{2}{4x-1}$
- $f(x) = 1 - \frac{2}{2-x}$  ؛  $f(x) = 1 + \frac{1}{-x+1}$
- $f(x) = (1-x)(1+x)$  ؛  $f(x) = x(2x^2 + 1)$
- $f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)(x^2 + 1)$  ؛  $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)(2x + 5)$



17  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$$

حدّد نهايات الدالة  $f$  عند  $-1$ ،  $3$ ،  $+\infty$  و  $-\infty$ .

18  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{0; 1\}$  كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)}$$

عين نهايات الدالة  $g$  عند  $-1$ ،  $0$ ،  $+\infty$  و  $-\infty$ .

### المستقيمات المقاربة

19 عين نهاية الدالة  $f$  عند العدد  $a$  وعين معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

$$a=0 \quad ; \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$a=0 \quad ; \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$$

$$a=0 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} + 1$$

$$a=0 \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 5$$

$$a=1 \quad ; \quad f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

$$a=2 \quad ; \quad f(x) = -3 + \frac{2}{x-2}$$

$$a=\frac{3}{2} \quad ; \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2x-3}$$

20  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$$

(1) عين عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من

14 حدّد نهايات الدوال  $f$  عند  $+\infty$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = -x^2 + 3\sqrt{x} \quad ; \quad f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{x} + 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{\sqrt{x}}{2} + x$$

15 عين نهايات الدوال  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = (x^2 + 2x) \left( \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) \quad ; \quad f(x) = x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f(x) = x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad ; \quad f(x) = (x^2 - x) \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$$

$$f(x) = (x^2 - 4x) \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

16 أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 8x + 5) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 8x + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 + x - 5)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1}^< \frac{(2x^2 + x - 5)}{x+1} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1}^> \frac{(2x^2 + x - 5)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (x^2 + 3x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (2x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$



أجل كل عدد  $x$  يختلف عن  $\frac{1}{3}$ ؛

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1}$$

(2) أحسب نهاية  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $\frac{1}{3}$  بقيم أكبر وبقيم أصغر.

21 لاحظ جدول تغيرات الدالة  $f$  التالي ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.

|        |           |           |     |           |
|--------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$      | $3$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $1$ | $1$       |

22 (1) لاحظ جدول تغيرات الدالة  $f$  التالي ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.

|        |           |           |     |           |
|--------|-----------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$       | $2$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $3$       | $+\infty$ | $4$ | $6$       |

(2) استنتج أن منحنى الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الترتيب. حدّد معادلة له.  
(3) اثبت أن منحنى الدالة  $f$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل. حدّد معادلة له.

23 حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{7}{x} - 3$ .

24 حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في الحالتين التاليتين:

$$f(x) = -x + 3 + \frac{6}{x-1} ; f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$$

25 عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x-3}$$

26  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$$

(\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المزود بمعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة التعريف  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

(2) اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-1$ ؛  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .  
(4) حدّد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  مع المستقيم المقارب المائل.

### التمثيلات البيانية

27 في كل حالة من الحالات التالية،  $f$  دالة معرفة بتمثيلها البياني  $(\mathcal{C})$ .  
(1) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .



## دراسة دوال

28 في كل حالة من الحالات التالية،  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $(\mathcal{C})$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x + 4 \quad ; \quad f(x) = 3x^2 - 6x - 5$$

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 1 \quad ; \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 5 \quad ; \quad f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$

- عين نهايات  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

- عين  $f'(x)$ .

- ادرس تغيرات  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

- ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

29 في كل حالة من الحالات التالية،  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$  و  $(\mathcal{C})$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث:

$$f(x) = \frac{-x+1}{x+2} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$f(x) = -3 - \frac{4}{x-4} \quad ; \quad f(x) = 2 - \frac{1}{3x-2}$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x}{x^2-x+2}$$

- عين المجموعة  $D$ .

- أحسب نهايات  $f$  عند حدود  $D$ .

- ادرس تغيرات  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

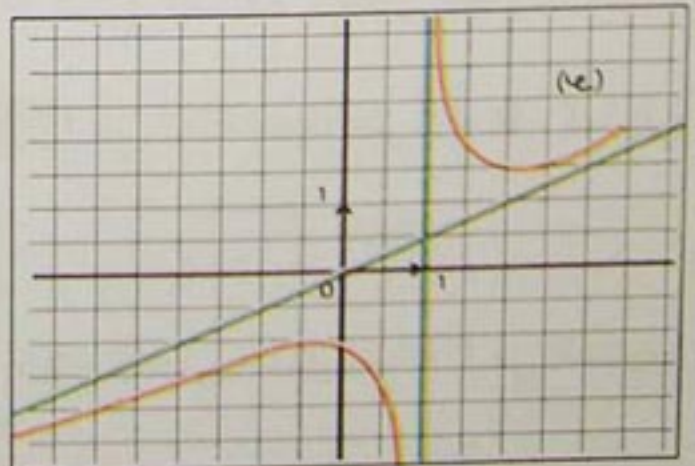
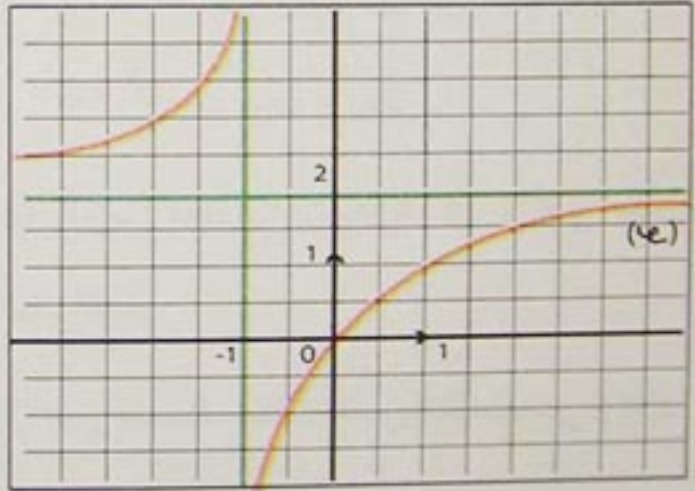
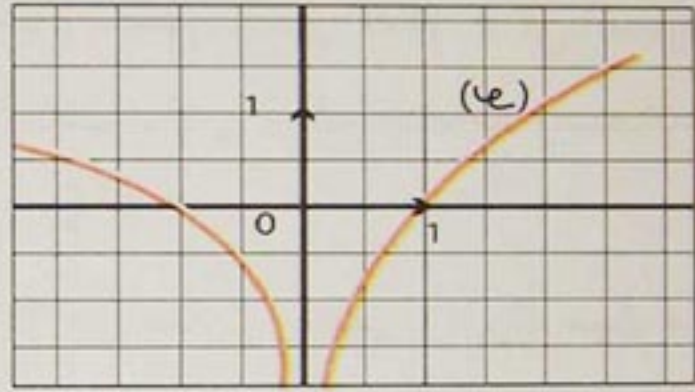
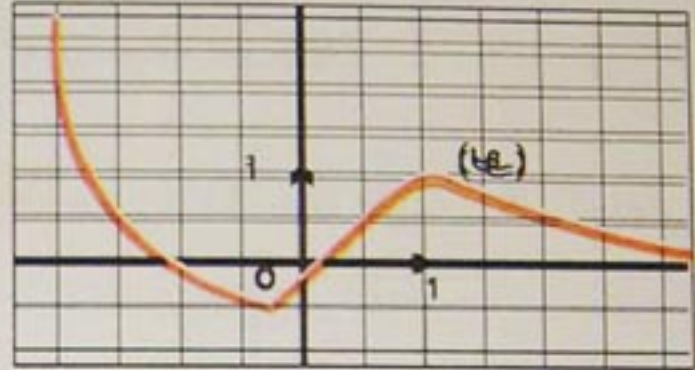
- حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

- ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(2) ماهي نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

(3) أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(4) أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .





(2) عين نهايات الدالة  $f$  عند  $-3$ ،  $+\infty$  و  $-\infty$ .  
 (3) ادرس تغيرات الدالة  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

(4) حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(5) ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

**32**  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{4x-1}{-x+2}$$

(\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن  $2$ ،

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{-x+2}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة  $g$  وانجز جدول تغيراتها.

(3) عين المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(5) انشئ، بعناية، المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

**33**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$$

(\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

**30** في كل حالة من الحالات التالية،  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$  و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث:

$$f(x) = \frac{3x^2-4x-1}{3x+2} \quad ; \quad f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2+5x-4}{2x} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x^2-x+3}{x+2}$$

- عين المجموعة  $D$ .

- ادرس تغيرات  $f$  وانجز جدول تغيراتها.

- حدّد المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

- ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

## مسائل

**31**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

(\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) اثبت أنه يوجد عدداً حقيقيين  $a$ ،  $b$  حيث من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن  $-3$ ؛

$$f(x) = a + \frac{b}{x+3}$$



المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  
 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  حيث  
 من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 2 ؛

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

(2) عين نهايات الدالة  $f$  عند 2 ،  $+\infty$  ،  $-\infty$ .

(3) عين معادلات المستقيمات المقاربة  
 للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(4) ادرس تغيرات الدالة  $f$  وانجز جدول  
 تغيراتها.

(5) حدّد إحداثيات نقط تقاطع  $(\mathcal{C})$  مع  
 محوري الإحداثيات.

(6) حدد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$   
 بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

(7) ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

**34**  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$

$$g(x) = \frac{1-3x}{x^2-2x-3}$$

كما يلي :

$(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب  
 إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) عين العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من  
 أجل كل عدد  $x$  يختلف عن -1 و 3 ،

$$g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

(2) عين نهايات الدالة  $g$  عند -1 ، 3 ،  
 $-\infty$  و  $+\infty$ .

(3) ادرس تغيرات الدالة  $g$  وانجز جدول تغيراتها.

(4) عين معادلات المستقيمات المقاربة  
 للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

(5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  مع  
 محور الفواصل.

(6) انشىء، بعناية، المنحنى  $(\mathcal{C})$

**35** يزداد عدد سكان بلد حسب الدالة

$$f \text{ المعرفة كما يلي: } f(x) = \frac{7x+200}{x+20}$$

حيث  $x$  هو عدد السنوات التي مرّت منذ  
 نهاية سنة 1980 و  $f(x)$  عدد السكان بملايين  
 نسمة.

(1) عين العددين الحقيقيين  $a, b$  حيث

$$f(x) = a + \frac{b}{x+20}$$

$x$  ينتمي إلى المجال  
 $[0; +\infty[$ .

(2) أ) حسب دستور الدالة  $f$  المقدم في  
 السؤال 1 ، تحقق إن كان عدد سكان هذا  
 البلد يزداد أو يتناقص.

ب) ادرس نهاية  $f$  عند  $+\infty$ .



(5) مثل، بيانياً، الدالة  $f$ ، في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
السلم: 1 cm لكل 1 kg على محور الفواصل و 0,5 cm لكل مليون دينار على محور الترتيب.

فسر هذه النتيجة.

$$\text{جـ) حل المعادلة } \frac{7x + 200}{x + 20} = 8$$

باستعمال إتجاه تغير الدالة  $f$ ، حدد إن كان عدد السكان يفوق 8 ملايين نسمة أو يقل عنها، بعد سنة 2020.

**36** يعطى دستور الكلفة المتوسطة لإنتاج

مادة من طرف مؤسسة صناعية كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 10}{x}$$

(بالكيلوغرامات) للمادة المنتجة، وينتمي إلى المجال  $]0; +\infty[$ ، الكلفة  $f(x)$  تحسب بملايين الدينانير.

(1) أكتب  $f(x)$  على الشكل

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد يطلب تحديدها.

(2) بين أن، من أجل كميات كبيرة منتجة، يكون سلوك الكلفة المتوسطة هو سلوك دالة تآلفية.

(3) كيف تكون قيم الكلفة المتوسطة عندما تكون كلفة الإنتاج قريبة من الصفر؟

(4) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .



1. عموميات.\*
2. المتتاليات الحسابية.
3. المتتاليات الهندسية.

## متتالية فيبوناتشي

ليوناردو بيزانو (1170-1250) الملقب فيبوناتشي أعظم رياضي أوروبا في عصره. ارتبط اسمه بمتتالية عددية عرضها عام 1228 في كتابه المسمى Liber Abaci نموذجة وحلا للمشكلة التالية:

نضع في حظيرة زوجا من أرنبين (ذكر وأنثى).  
يلد كل زوج عمره شهران على الأقل، كل شهر، زوجا جديدا من أرنبين (ذكر وأنثى).  
إذا فرضنا أن ليس هناك أرنب يموت، ما هو عدد أزواج الأرانب بعد  $n$  شهرا؟

وهكذا، فإذا كان  $n$  هو عدد أزواج الأرانب الموجودة خلال الشهر من المرتبة  $n$ ، نحصل على متتالية معرفة بالشكل:



$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \text{ حيث } n > 1 \end{cases}$$

في هذه المتتالية، يكون كل حد هو مجموع الحدين السابقين له مباشرة وهي تشرح انتظام توالد الأرانب كما ذكر فيبوناتشي، وقد اكتشف توافقها كذلك مع بعض الظواهر الطبيعية كتفرع بعض الأشجار التي تنبت في بعض البلدان الباردة وتوجه بعض النباتات (زهرة الأقحوان، عباد الشمس،...) نحو الشمس. كما ساهمت هذه المتتالية في إثراء العديد من مواضيع الرياضيات وحل الكثير من المعضلات.



## استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

| السؤال   | إجابة 1   | إجابة 2   | إجابة 3       |
|--|-----------|-----------|---------------|
| 1. « عدد حقيقي.<br>في الكتابة $u^3$ ، العدد 3 هو:  | أساس      | أسّ       | قوة           |
| 2. العدد $2^4$ يساوي   | -8        | 16        | -16           |
| 3. $u_{2006}$ هو عدد سكان الجزائر في سنة 2006.<br>في الكتابة $u_{2006}$ ، العدد 2006 هو:                                       | أس        | دليل      | أساس          |
| 4. الأعداد 1؛ 3؛ 5؛ 7؛ ... هي حدود متتابعة لمتتالية.<br>حسب الانتظام السابق، يكون أحد حدود هذه المتتالية هو:                   | 100       | 54        | 73            |
| 5. الأعداد 2؛ 8؛ 32؛ 128؛ ... هي حدود متتابعة لمتتالية.<br>حسب الانتظام السابق، الحدّ الذي يتبع العدد 128 في هذه المتتالية هو: | 256       | 512       | 1024          |
| 6. الأعداد 1؛ 1؛ 2؛ 3؛ 5؛ 8؛ ... هي حدود متتابعة لمتتالية.<br>الحدّ الذي يتبع العدد 8 في هذه المتتالية هو:                     | 11        | 12        | 13            |
| 7. إذا كانت « دالة معرفة على $\mathbb{N}$ بالدستور $u(n) = n^2$ ، فإن $u(n+1)$ يساوي:  | $n^2 + 1$ | $(n+1)^2$ | $n^2 + n + 1$ |



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: تطور السكان

قدّر عالم الإقتصاد الإنجليزي طوماس مالتوس (T. Malthus) (1766-1834) أن عدد سكان بلاده يتزايد كل سنة بنسبة 2%. في سنة 1800، كان عدد سكان إنجلترا 8 ملايين نسمة.

1. أ) أكمل الجدول الآتي:

| السنة $n$                 | 1800 | 1801 | 1802 | 1803 | 1804 | 1805 | 1806 | 1807 | 1808 | 1809 | 1810 |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| عدد السكان (بملايين نسمة) | 8    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

ب) ما هي العلاقة بين عدد سكان سنة معينة وعدد سكان السنة السابقة لها ؟

ii.  $n$  عدد طبيعي حيث  $n \geq 1800$ . بفرض  $u_n$  هو عدد سكان إنجلترا في السنة  $n$ .

أ) عيّن العلاقة التي تعطي  $u_{n+1}$  بدلالة  $u_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

بيّن أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1800}$  معرفة بالشكل:

$$(1) \begin{cases} u_{1800} = 8 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,02, n \geq 1800 \end{cases}$$

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  بحيث  $n \geq 1800$

ب) ما هو عدد العمليات التي يجب إنجازها لحساب عدد سكان إنجلترا في سنة 2006 ؟

iii. نقترح فيما يلي تعيين علاقة صريحة تعطي  $u_n$  من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  حيث  $n \geq 1800$ .

أ) انطلاقا من حساب الحدود الأولى  $u_n$  ( $1800 \leq n \leq 1810$ )، استنتج أن:

$$u_n = 8 \times (1,02)^{n-1800}, n \geq 1800$$

ب) بالاستعانة بحاسبة، احسب  $u_{2006}$  (حسب تقدير مالتوس).

## نشاط 2: المتتاليات الحسابية

وضع تلميذ مبلغ 5000 دينار في البنك بفوائد بسيطة لعدة سنوات. بمعنى، أنه عند نهاية كل سنة، يمنح له البنك فائدة قدرها 5%، ليزيد ادخاره كل سنة بمبلغ ثابت يساوي 5% من المبلغ الابتدائي.

لمساعدة التلميذ على معرفة المبلغ الإجمالي كل سنة، نعرّف متتالية عددية كما يلي: نفرض أن  $S_0$  هو المبلغ الابتدائي و  $S_n$  المبلغ الإجمالي المدخر بعد سنة، وبصفة عامة،  $S_n$  المبلغ الإجمالي المدخر بعد  $n$  سنة.

(1) احسب  $S_1$ ،  $S_2$ ،  $S_3$ .

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $S_{n+1} = S_n + 250$ .

(3) عبّر عن  $S_n$  بدلالة  $n$ .

(4) ما هو عدد السنوات التي يجب انتظارها ليضعف التلميذ المبلغ الابتدائي.



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 3: المتتاليات الهندسية

يروى الصفدي أن شيرهام أحد ملوك الفرس خير مبتكر لعبة الشطرنج سيسا في مكافأة مقابل هذا الابتكار، فما كان من هذا الأخير إلا أن طلب حبة قمح مقابل الخانة الأولى من رقعة الشطرنج والضعف مقابل الثانية وضعف الخانة الثانية مقابل الثالثة ... وهكذا يضعف العدد من خانة إلى أخرى إلى آخر خانة. فابتسم الملك لـ " تواضع " طلب المبتكر !!



1. (أ) ما هو عدد خانات رقعة الشطرنج ؟  
(ب) عدد حبات القمح المطلوبة يضعف من خانة إلى أخرى. هل هذه المتتالية حسابية أم هندسية ؟ احسب أساس هذه المتتالية.  
(ج) عيّن العبارة التي تعطي عدد حبات القمح في الخانة ذات الرتبة  $n$  بدلالة  $n$ .
2. بالاستعانة بحاسبة، احسب عدد حبات القمح في الخانات ذات الرتب 16 و 24 و 64. أعط رتبة مقدار العدد الأخير.

3. باستعمال مجدول، حضر ورقة حساب كما يلي:

|    | A               | B                    | C                   |
|----|-----------------|----------------------|---------------------|
| 1  | رتبة الخانة $n$ | عدد الحبات في الخانة | عدد الحبات الإجمالي |
| 2  | 1               | 1                    | 1                   |
| 3  | 2               | 2                    | 3                   |
| 4  | 3               | 4                    | 7                   |
| 5  | 4               | 8                    | 15                  |
| 6  | 5               | 16                   | 31                  |
| 7  | 6               | 32                   | 63                  |
| 8  | 7               | 64                   | 127                 |
| 9  | 8               | 128                  | 255                 |
| 10 | 9               | 256                  | 511                 |
| 11 | 10              | 512                  | 1023                |
| 12 | 11              | 1024                 | 2047                |
| 13 | 12              | 2048                 | 4095                |

- (أ) تحقق من عدد الحبات الموجود في الخانات 16 و 24 و 64.
- (ب) ابتداء من أية خانة يتجاوز عدد الحبات المليون ؟ المليار ؟

4. إذا علمت أن طنا من القمح يشمل حوالي  $2 \times 10^7$  حبة، ما هو بالتقريب عدد الأطنان التي ينبغي أن يعطيها الملك لصاحب الابتكار ؟



### • مفهوم متتالية

#### تعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة من مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .

#### اصطلاحات وتعابير

- يُرمز عادة لمتتالية بأحد الرموز  $u, v, w, \dots$
- يرمز لصورة عدد طبيعي  $n$  بمتتالية  $u$  بالشكل  $u(n)$  أو بالشكل  $u_n$  (نقرأ:  $u$  دليل  $n$ ).
- العدد  $u_n$  هو الحد الذي دليله (أو رتبته)  $n$  ويسمى أيضا الحد العام للمتتالية  $u$ .
- يرمز أيضا للمتتالية  $u$  بالشكل  $(u_n)$  أو  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### أمثلة

(أ) قائمة المربعات  $0, 1, 4, 9$  تشكل متتالية  $u$  معرفة على  $D = \{0; 1; 2; 3\}$ ، حيث:

$$u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_2 = 4 ; u_3 = 9$$

(ب)  $v$  هي المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بالشكل:  $v_n = \frac{1}{n}$ .

الحد الذي رتبته 10 لهذه المتتالية هو  $v_{10} = \frac{1}{10}$

(ج) لتكن  $w$  المتتالية المعرفة كالآتي:  $w_0 = 2$  و  $w_{n+1} = 3w_n + 1$ ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يمكن حساب الحدود  $w_1 ; w_2 ; w_3 ; \dots$

$$\text{نجد: } w_1 = 3w_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7 ; w_2 = 3w_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22 ; \dots$$

#### ملاحظة

يمكن أن تكون المتتالية معرفة بدءا من رتبة معينة.

#### مثال

المتتالية  $(u_n)$ ، حيث  $u_n = \sqrt{n-3}$ ، تكون معرفة من أجل  $n \geq 3$  و  $u_3$  هو حدّها الأوّل.

### • طرق توليد متتالية

هناك ثلاث طرق لتوليد متتالية:

1. بإعطاء قائمة كل حدود المتتالية (عدد الحدود منته).  
مثال

$$1 ; \frac{5}{2} ; 4 ; \frac{11}{2} ; 7$$

2. بعبارة من الشكل  $u_n = f(n)$

يمكن تعريف متتالية بعبارة صريحة (دستور) تسمح بحساب كل حدّ بدلالة  $n$  مباشرة.



مثال

$u$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة  $u_n = 2n^2 - 1$ .  
في هذه الحالة،  $u_0 = -1$  ،  $u_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$  ،  $u_2 = 2 \times 2^2 - 1 = 7$  ، ...

### 3. بعلاقة تراجعية

يمكن تعريف متتالية  $u$  بإعطاء:

- الحد الأول  $u_0$ .
  - وعلاقة تسمح بتعيين كل حد انطلاقاً من الحد السابق له مباشرة.
- نسمي مثل هذه العلاقة علاقة تراجعية.

مثال

لتكن  $v$  المتتالية المعرفة بحدّها الأول  $v_0$  ، حيث  $v_0 = 2$  والعلاقة  $v_{n+1} = 3v_n - 1$ .  
لدينا  $v_1 = 3v_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$  ،  $v_2 = 3v_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$  ،  $v_3 = 3v_2 - 1 = 41$  ، ...  
إذا كانت  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = 3x - 1$  ، فتكون المتتالية  $(v_n)$  معرفة إذا علم  $v_0$   
والعلاقة التراجعية  $v_{n+1} = f(v_n)$  التي تعبّر عن الحد من المرتبة  $n+1$  بدلالة الحد من المرتبة  $n$ .

### • التمثيل البياني لمتتالية

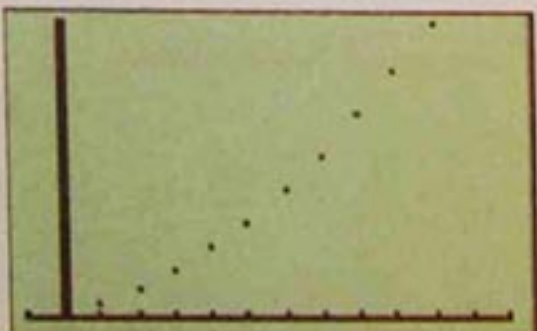
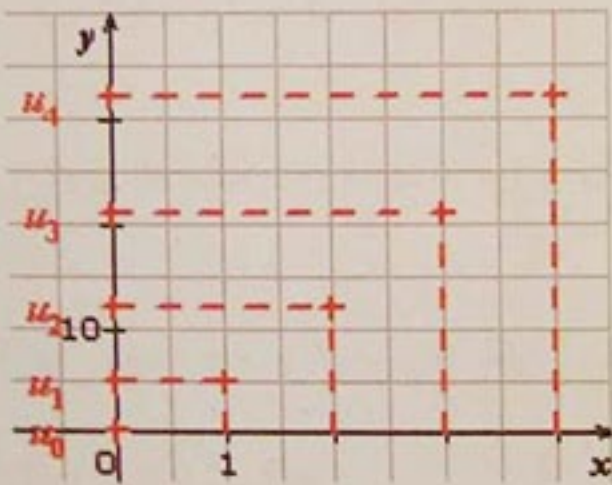
تعريف

التمثيل البياني لمتتالية  $u$  هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات  $(n; u_n)$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  للمستوي.

مثال

لتكن  $u$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  حيث  
 $u_n = n^2 + 4n$

النقط الخمس الأولى من التمثيل البياني لهذه المتتالية هي كما في الشكل المقابل.



| $n$ | $u(n)$ |
|-----|--------|
| 0   | 0      |
| 1   | 5      |
| 2   | 12     |
| 3   | 21     |
| 4   | 32     |

كما هو الحال بالنسبة إلى الدوال، يمكن أن نعطي جدول قيم متتالية وتمثيلها البياني بحاسبة بيانية.



## • اتجاه تغير متتالية

### تعريف

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$ .

▪ نقول إن  $(u_n)$  متتالية متزايدة تماما عندما يكون:

$$u_n < u_{n+1} \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

▪ نقول إن  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما عندما يكون:

$$u_n > u_{n+1} \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

عندما نستبدل الرمز  $<$  (أو  $>$ ) بالرمز  $\leq$  (أو  $\geq$ ) في التعريف السابق، نقول إن المتتالية "متزايدة (أو متناقصة)".

### أمثلة

▪ المتتالية  $(u_n)$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = n^2$  متزايدة تماما.

بالفعل، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ .

$$\text{وبالتالي } u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

وبما أن  $2n + 1 > 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

إن  $u_{n+1} - u_n > 0$  أي أن  $u_{n+1} > u_n$ .

▪ المتتالية  $(v_n)$  حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = \frac{1}{n+1}$  متناقصة تماما.

بالفعل، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$ .

$$\text{وبالتالي } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

وبما أن  $\frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

إن  $v_{n+1} - v_n < 0$  أي أن  $v_{n+1} < v_n$ .

## 2. المتتاليات الحسابية

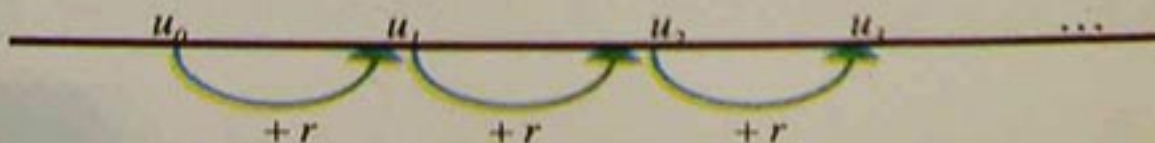
### • تعريف

نقول عن متتالية  $(u_n)$  إنها متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي  $r$ ، حيث:

$$u_{n+1} = u_n + r \quad n \text{ من أجل كل عدد طبيعي}$$

يسمى العدد الحقيقي  $r$  أساس المتتالية  $(u_n)$ .

معنى ذلك أنه في المتتالية الحسابية  $(u_n)$ ، نمرّ من حدّ  $u_n$  إلى الحدّ الموالي  $u_{n+1}$  بإضافة نفس العدد الثابت  $r$  دائما.

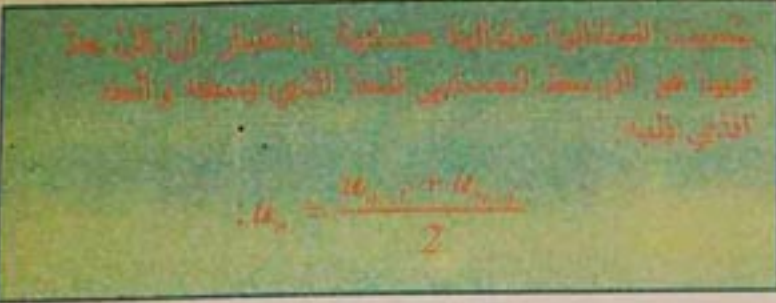




أمثلة

- متتالية الأعداد الفردية 1، 3، 5، 7، ... هي متتالية حسابية، أساسها 2.
- $(u_n)$  متتالية حسابية، أساسها  $-\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 7$ .

الأعداد 6، 5،  $u_1 = 6$ ،  $u_2 = 6$ ، ... هي حدود للمتتالية  $(u_n)$ .



ملاحظة

يمكن أن يكون العدد الحقيقي  $r$  موجبا أو سالبا. إذا كان  $r = 0$ ، فإن كل الحدود متساوية: أذن المتتالية ثابتة.

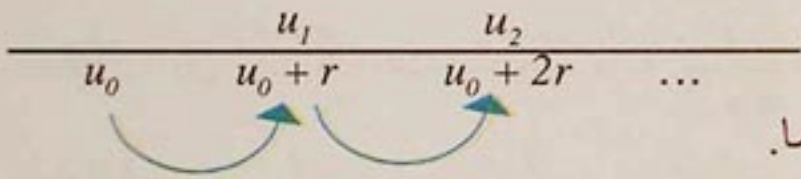
• حساب الحد العام  $u_n$

1. بإعطاء الحد الأول  $u_0$  والأساس  $r$

مبرهنة 1

$(u_n)$  متتالية حسابية ذات الحد الأول  $u_0$  والأساس  $r$  يعني أن،  
من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = u_0 + nr$ .

برهان



إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ ، فإننا نمرّ من حدّ إلى الحدّ الذي يليه مباشرة بإضافة  $r$  دائما. أي أن  $u_1 = u_0 + r$ ،  $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$ ، ... ونقبل أن  $u_n = u_0 + nr$ . وبالعكس، بالنسبة إلى متتالية  $(u_n)$ ، إذا كان  $u_n = u_0 + nr$ ، فإن  $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = u_n + r$  ومنه فالممتتالية  $(u_n)$  متتالية حسابية.

أمثلة

- الحدّ العام للمتتالية الحسابية للأعداد الفردية ذات الحدّ الأول 1 والأساس 2 هو:  $u_n = 1 + 2n$ .
- $(u_n)$  متتالية حسابية حيث  $u_0 = 10$  و  $r = -6$ . إذن  $u_n = 10 - 6n$  والأعداد  $u_3 = -8$ ،  $u_{100} = -590$ ، ... حدود لها.

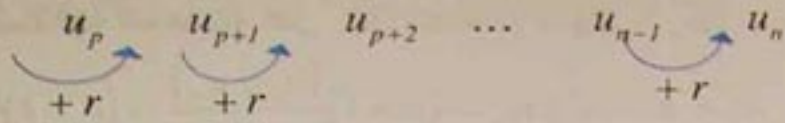
2. بإعطاء حدّ كفي للمتتالية والأساس

مبرهنة 2

$(u_n)$  متتالية حسابية علم حدّ منها  $u_p$  وأساسها  $r$  يعني:  
من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = u_p + (n - p)r$



برهان



من  $u_p$  إلى  $u_n$  نضيف  $(n-p)$  مرة الأساس  $r$ .

$p$  عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :

$$u_p = u_0 + pr \text{ و } u_n = u_0 + nr$$

$$\text{منه } u_n - u_p = nr - pr = (n-p)r$$

$$\text{وبالتالي } u_n = u_p + (n-p)r$$

مثال

$(u_n)$  متتالية حسابية حيث  $u_{10} = 15$  وأساسها  $\frac{3}{2}$ .

$$u_{35} = u_{10} + (35 - 10) \times \frac{3}{2} = 52.5$$

$$u_3 = u_{10} + (3 - 10) \times \frac{3}{2} = 4.5$$

صاح العلاقة الوترية في النظرية 2  
تحدد أي حد  $u_n$  من متتالية  
حسابية انطلاقاً من أحد حدودها  $u_p$   
وأساسها  $r$

• مجموع حدود متتالية لمتتالية حسابية

مبرهنة 3

$(u_n)$  متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ .

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n : u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

برهان

$$\text{نضع } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

وبكتابة  $S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0$  والجمع طرفاً إلى

طرف، نحصل على:

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_1 + u_{n-1}) + (u_0 + u_n)$$

$$\text{لكن، } u_0 + u_n = u_0 + (u_0 + nr) = 2u_0 + nr$$

$$u_1 + u_{n-1} = (u_0 + r) + [u_0 + (n-1)r] = 2u_0 + nr$$

$$u_2 + u_{n-2} = (u_0 + 2r) + [u_0 + (n-2)r] = 2u_0 + nr$$

...

كلّ من المجاميع السابقة يساوي  $u_0 + u_n$ .

$$\text{إذن، نكتب: } 2S_n = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}_{\text{مرّة } (n+1)} = (n+1)(u_0 + u_n)$$

$$\text{أي أن } S_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$



مثال

$(u_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  حيث  $u_n = 2n + 1$ .  
لدينا:  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2} = (n+1)^2$

تطبيق

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7 \frac{(1+13)}{2} = 7^2$$

نتيجة

متتالية الأعداد الطبيعية غير المنعدمة هي متتالية حسابية، حدّها الأول  $1$  وأساسها  $1$ .

ومجموع  $n$  حدًا الأولى لها هو:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

مثال

$$1 + 2 + \dots + 99 = \frac{99(99+1)}{2} = 4950$$

• التمثيل البياني

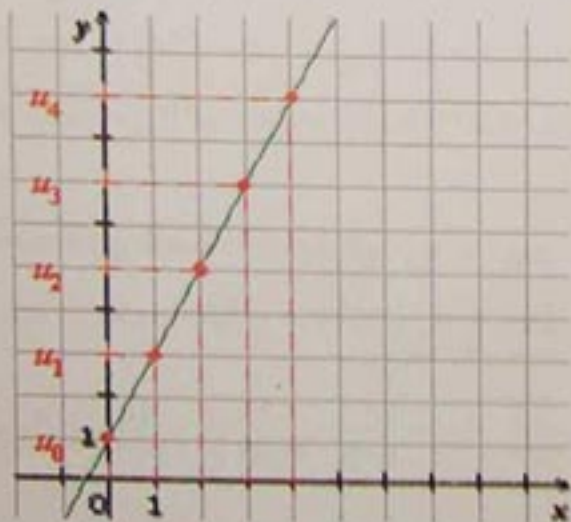
مبرهنة 4

التمثيل البياني لمتتالية حسابية هو مجموعة نقط منعزلة وواقعة على نفس الاستقامة.

برهان

نعلم أنّ التمثيل البياني لمتتالية عددية  $(u_n)$  هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات  $(n; u_n)$  في المعلم  $(O; i, j)$  للمستوي.

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ ، فإنّ من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = rn + u_0$ .  
معنى ذلك أنّ كلّ النقط  $M(n; u_n)$  تكون على المستقيم الذي معادلته  $y = rx + u_0$ .



مثال

التمثيل البياني للمتتالية الحسابية التي حدّها الأول  $1$  وأساسها  $2$  هو كما في الشكل المقابل.



• اتجاه التغير

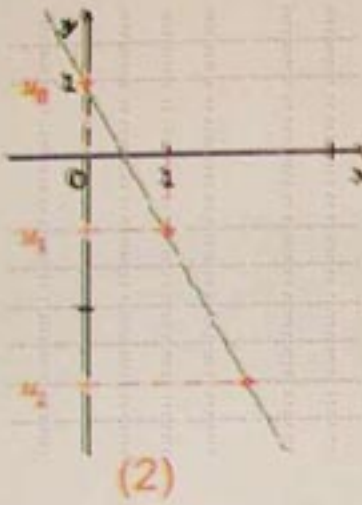
مبرهنة 5

$(u_n)$  متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ .

- إذا كان  $r$  موجبا تماما فالمتتالية متزايدة تماما.
- إذا كان  $r$  سالبا تماما فالمتتالية متناقصة تماما.
- إذا كان  $r$  منعدما فالمتتالية ثابتة.

مثال

المتتالية الحسابية الممثلة كما في الشكل (1) متزايدة تماما والمتتالية الحسابية الممثلة كما في الشكل (2) متناقصة تماما.



ملاحظة

معامل توجيه المستقيم في كل من التمثيلين هو أساس المتتالية الحسابية الممثلة.

### 3. المتتاليات الهندسية

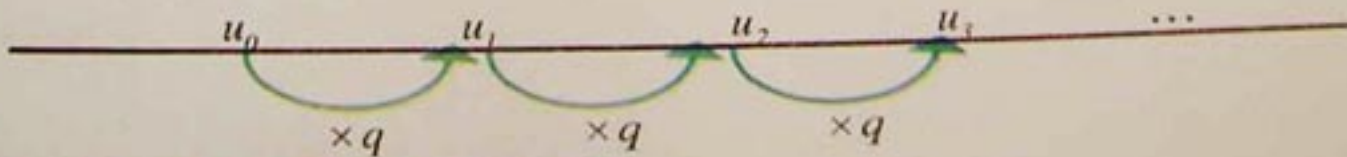
• تعريف

نقول عن متتالية  $(u_n)$  إنها متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم  $q$ ، حيث:

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad n \text{ عدد طبيعي}$$

يسمى العدد الحقيقي  $q$  أساس المتتالية  $(u_n)$ .

معنى ذلك أنه في المتتالية الهندسية  $(u_n)$ ، نمرّ من حدّ  $u_n$  إلى الحدّ الذي يليه مباشرة  $u_{n+1}$  بالضرب في نفس العدد الثابت  $q$  دائما.



أمثلة

- متتالية قوى العدد 3، أي 1، 3، 9، 27، ... هي متتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 3.

سميت المتتالية متتالية هندسية باعتبار أن كل حدّ فيها هو الوسط الهندسي للحدّ الذي يسبقه والحدّ الذي يليه:

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$$

(كل الحدود موجبة).



# معارف

▪  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 2$ .

تُحسب الحدود الأولى لهذه المتتالية كالآتي:

$$u_3 = q \times u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad ; \quad u_2 = q \times u_1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_1 = q \times u_0 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

**ملاحظة**

إذا كان أساس متتالية هندسية هو 1 فكل حدودها متساوية، فهي متتالية ثابتة.

• حساب الحد العام  $u_n$

1. بإعطاء الحد الأول  $u_0$  والأساس  $q$

**مبرهنة 6**

$(u_n)$  متتالية هندسية ذات الحد الأول  $u_0$  والأساس  $q$  (مع  $q \neq 0$ ) يعني:  
من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = q^n u_0$ .

**برهان**



$(u_n)$  متتالية هندسية حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

بضرب حدّ من المتتالية  $(u_n)$  في العدد  $q$ ، نحصل على الحدّ

الذي يليه مباشرة ونستنتج أن  $u_n = q^n u_0$ .

وبالعكس، إذا كان  $u_n = q^n u_0$ ، فإن  $u_{n+1} = q^{n+1} u_0 = (q \times q^n) u_0 = q(q^n u_0) = q u_n$  ومنه فالمتتالية  $(u_n)$  متتالية هندسية.

**أمثلة**

▪  $(u_n)$  متتالية هندسية حيث  $u_0 = 1$  و  $q = 2$ . الجدول أدناه يعطي الحدود العشرة الأولى للمتتالية  $(u_n)$ .

|       |   |   |   |   |    |    |    |     |     |     |     |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   | 9   | ... |
| $u_n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | ... |

▪  $n$  عدد طبيعي. المتتالية ذات الحدّ العام  $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$  متتالية هندسية حدّها الأول 2

وأساسها  $\frac{1}{3}$ .

2. بإعطاء حدّ كفي للمتتالية والأساس

**مبرهنة 7**

$q$  عدد حقيقي غير منعدم. إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية علم حدّ منها  $u_p$  وأساسها  $q$ ، فإن:

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = u_p q^{n-p}$

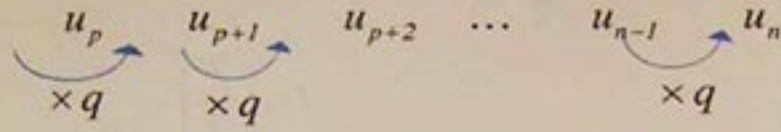


برهان

لدينا:  $u_n = q^n u_0$

لكن  $u_p = q^p u_0$  ، منه  $u_0 = \frac{u_p}{q^p}$  ( $q \neq 0$ )

وبالتالي  $u_n = q^n \frac{u_p}{q^p} = u_p q^{n-p}$



من  $u_p$  إلى  $u_n$  نضرب  $(n-p)$  مرة في الأساس  $q$ .

مثال

$(u_n)$  متتالية هندسية، بحيث  $u_3 = \frac{27}{4}$  وأساسها  $\frac{3}{2}$ .

لدينا:  $u_5 = u_3 q^{5-3} = \left(\frac{27}{4}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{243}{16}$

و  $u_0 = u_3 q^{0-3} = \left(\frac{27}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2$

• مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

مبرهنة 8

$q$  عدد حقيقي يختلف عن 1،  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$ .

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

برهان

نضع  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$

لدينا  $qS_n = u_1 + \dots + u_n + u_{n+1}$

منه  $S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1}$  أي أن  $(1-q)S_n = u_0 - u_{n+1}$

وبالتالي  $S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_0 q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  لأن  $q \neq 1$ .

ملاحظات

▪ في العلاقة  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  ، عدد حدود المجموع  $u_0 + u_1 + \dots + u_n$  هو  $n+1$ .

▪ إذا كان  $q = 1$  فإن  $u_0 = u_1 = \dots = u_n$  وبالتالي  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$ .

موقع عيون البصائر التعليمي



# معارف

مثال

$(u_n)$  متتالية هندسية حيث  $u_0 = 2$  و  $q = \frac{3}{2}$ .

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2 \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^4}{1 - \frac{3}{2}} = 16,25$$

لدينا:

نتيجة

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \text{ يختلف عن } 1$$

مثال

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1023$$

• اتجاه التغير

مبرهنة و

$(u_n)$  متتالية هندسية، حدّها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$  بحيث  $u_0 > 0$  و  $q > 0$ .

تكون المتتالية  $(u_n)$ :

- متزايدة تماماً، إذا كان  $q > 1$ .
- متناقصة تماماً، إذا كان  $0 < q < 1$ .
- ثابتة، إذا كان  $q = 1$ .

برهان

- إذا كان  $q > 1$ ، فإن  $qu_n > u_n$  وبالتالي  $u_{n+1} > u_n$  إذن  $(u_n)$  متزايدة تماماً.
- إذا كان  $0 < q < 1$ ، فإن  $qu_n < u_n$  وبالتالي  $u_{n+1} < u_n$  إذن  $(u_n)$  متناقصة تماماً.
- إذا كان  $q = 1$ ، فمن أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $u_n = u_0$  إذن  $(u_n)$  ثابتة.



إذا كان  $q < 0$  فإن المتتالية الهندسية غيررتيبة (ليست متزايدة وليست متناقصة).

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$v_n = \frac{3}{2^n} \text{ و } u_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

▪  $u_n$  من الشكل  $u_0 q^n$ ، متتالية هندسية حدّها الأول 2 وأساسها  $\frac{3}{2}$ .

بما أنّ الحدّ الأول  $u_0$  والأساس  $q$  موجبان و  $q > 1$ ، فإنّ المتتالية متزايدة تماماً.

$$\text{▪ لدينا: } v_n = \frac{3}{2^n} = 3 \times \frac{1}{2^n} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$v_n$  من الشكل  $u_0 q^n$ ، متتالية هندسية حدّها الأول 3 وأساسها  $\frac{1}{2}$ .

بما أنّ الحدّ الأول  $u_0$  والأساس  $q$  موجبان و  $q < 1$ ، فإنّ المتتالية متناقصة تماماً.

## ★ نمذجة وضعيات باستعمال متتاليات

### الفوائد البسيطة والفوائد المركبة

#### تعريف

- عندما يودع مال في صندوق توفير، فإنّ هذا الأخير يمنح فوائد على المبلغ المدخّر.
- تُحسب الفوائد البسيطة انطلاقاً من الرصيد الابتدائي، وهي متناسبة مع المدة الزمنية للادخار.
  - نقول إنّ الفوائد مركبة، عندما تضاف الفوائد المكتسبة خلال سنة إلى الرصيد الابتدائي للادخار، ويصبح رصيد سنة معينة يساوي رصيد السنة السابقة مباشرة زائد الفوائد المكتسبة.

#### مسألة

أراد شخص إيداع مبلغ 50000 دينار. فعرض عليه البنك كيفيتين:

1. الإيداع بفوائد بسيطة قدرها 5,5% في السنة، حيث يستفيد كلّ سنة بمبلغ ثابت يساوي 5,5% من المبلغ الابتدائي، أي 2750 ديناراً.



# معارف

2. الإيداع بفوائد مركبة قدرها 5% في السنة، حيث يزيد رصيده كل سنة بمبلغ يساوي 5% من المبلغ المدخر في السنة الجارية. فالزيادة في هذه الحالة ليست ثابتة.

ا. الكيفية الأولى: نسمي المبلغ المدخر بعد  $n$  سنة.

1. احسب  $S_0$  و  $S_1$  و  $S_2$  و  $S_3$ .

2. أ) احسب  $S_{n+1}$  بدلالة  $S_n$ .

ب) استنتج طبيعة المتتالية  $(S_n)$ .

ج) عبّر عن  $S_n$  بدلالة  $n$ .

II. الكيفية الثانية: نسمي المبلغ المدخر بعد  $n$  سنة.

1. احسب  $C_0$  و  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$ .

2. أ) احسب  $C_{n+1}$  بدلالة  $C_n$ .

ب) استنتج طبيعة المتتالية  $(C_n)$ .

ج) عبّر عن  $C_n$  بدلالة  $n$ .

III. بالنسبة إلى ادخار لفترة من سنة إلى 10 سنوات، ما هي الكيفية الأكثر فائدة؟ يمكن الاستعانة بمجدول.

حل

ا. الكيفية الأولى:

1. لدينا:

$$S_0 = 50000 ، S_1 = 52750 ، S_2 = 55500 ، S_3 = 58250$$

2. أ) بالتمعن في الحدود  $S_0$  و  $S_1$  و  $S_2$  و  $S_3$  نلاحظ أننا نمّر من حدّ إلى الحدّ التالي له بإضافة 2750، وبصورة عامة:

$$S_{n+1} = S_n + 2750 ، n \text{ من } \mathbb{N}$$

معنى ذلك أنّ  $(S_n)$  متتالية حسابية حدّها الأوّل  $S_0 = 50000$  وأساسها  $r = 2750$ .

ب) من أجل كلّ  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $S_n = S_0 + nr = 50000 + 2750n$ .



1. لدينا:

$$C_3 = 57881,25 \quad , C_2 = 55125 \quad , C_1 = 52500 \quad , C_0 = 50000$$

2. أ) بالتمعن في الحدود  $C_0$  و  $C_1$  و  $C_2$  و  $C_3$  نلاحظ أننا نمر من حد إلى الحد التالي له بالضرب في 1,05، وبصورة عامة:

$$C_{n+1} = C_n + \frac{5}{100} \times C_n = 1,05 \times C_n \quad , N \text{ من } n$$

معنى ذلك أن  $(C_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $C_0 = 50000$  وأساسها  $q = 1,05$ .

$$ب) \text{ من أجل كل } n \text{ من } N \quad , C_n = C_0 \times q^n = 50000 \times (1,05)^n$$

III.

باستعمال جدول، نلاحظ أن الإيداع بالكيفية الثانية يصبح أكثر فائدة ابتداء من السنة الخامسة.

|    | A | B     | C          |
|----|---|-------|------------|
| 1  | n | $S_n$ | $C_n$      |
| 2  | 0 | 50000 | 50000      |
| 3  | 1 | 52750 | 52500      |
| 4  | 2 | 55500 | 55125      |
| 5  | 3 | 58250 | 57881,25   |
| 6  | 4 | 61000 | 60775,3125 |
| 7  | 5 | 63750 | 63814,0781 |
| 8  | 6 | 66500 | 67004,782  |
| 9  | 7 | 69250 | 70355,0211 |
| 10 | 8 | 72000 | 73872,7722 |



## 1. استعمال حاسبة في حالة المتتاليات

### طريقة

- لحجز عبارة  $u_n$ :
  - في MODE، نختار Séq ثم ENTER.
  - نختار  $Y=$  على السطر  $u(n)$ ، نحجز عبارة  $u_n$  باستعمال  $n, \theta, T, X$  ثم ENTER.
  - على السطر  $u(nMin)$ ، نحجز قيمة الحد الأول ثم ENTER.
- لإظهار جدول قيم متتالية:
  - نضبط وسائط الجدول باستعمال 2nd TBLSET.
  - القيمة الأولى لـ  $n$  في الجدول: TblStart.
  - الفرق بين قيمتين متتبعيتين لـ  $n$ :  $\Delta Tbl$ .
  - نظهر جدول القيم باستعمال 2nd TABLE.

### ملاحظة

لإظهار التمثيل البياني لمتتالية نضبط النافذة WINDOW ونستعمل الللمسة GRAGH.

### تمرين

عين في كل من الحالتين التاليتين وباستعمال حاسبة بيانية بعض حدود المتتالية المعطاة:

1. حالة متتالية معرفة بعبارة من الشكل  $u_n = f(n)$

$(u_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالشكل:  $u_n = -n^2 + 3n + 10$

2. حالة متتالية معرفة بعلاقة تراجعية  $u_{n+1} = f(u_n)$

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة بالشكل:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

### حل

1. لتعيين بعض حدود المتتالية، نستعمل حاسبة لبيانية كما في الدوال:

- نضبط جدول القيم كما هو مبين على الشاشة المقابلة.

- نحجز عبارة  $u_n$  ثم نحصل على جدول قيم المتتالية.

| TABLE SETUP   |     |
|---------------|-----|
| TblStart=     | 0   |
| $\Delta Tbl=$ | 1   |
| Indent:       | Ask |
| Depend:       | Ask |

| X | $v_1$ |
|---|-------|
| 0 | 10    |
| 1 | 12    |
| 2 | 12    |
| 3 | 10    |
| 4 | 6     |
| 5 | 0     |
| 6 | -8    |

| Plot1   | Plot2            | Plot3 |
|---------|------------------|-------|
| $v_1 =$ | $-X^2 + 3X + 10$ |       |
| $v_2 =$ |                  |       |
| $v_3 =$ |                  |       |
| $v_4 =$ |                  |       |
| $v_5 =$ |                  |       |
| $v_6 =$ |                  |       |
| $v_7 =$ |                  |       |

2. لحجز المتتالية، نستعمل «seq» mode للحاسبة:

ملاحظة: الحاسبة تعطي  $v_n$  بدلالة  $v_{n-1}$ ، نحجز:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_n = -2v_{n-1} + 1 \end{cases}$$

|          |           |               |
|----------|-----------|---------------|
| Normal   | Sci       | Eng           |
| Float    | 123456789 |               |
| Angle    | Degree    |               |
| Func     | Par       | Pol           |
| Connect  | Dot       |               |
| Sequence | Sinul     |               |
| Res      | abi       | re $\theta$ i |
| Horiz    | F-T       |               |



# طرائق

وللحصول على الحرف  $v$ ، نستعمل **8** **2de**.

| $n$ | $v(n)$ |
|-----|--------|
| 0   | 2      |
| 1   | 3      |
| 2   | 4      |
| 3   | 5      |
| 4   | 6      |
| 5   | 7      |
| 6   | 8      |
| 7   | 9      |
| 8   | 10     |
| 9   | 11     |
| 10  | 12     |

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=
u(nMin)=
v(n)=-2*v(n-1)+
1
v(nMin)≠(2)
w(n)=
    
```

$nMin$ : رتبة الحد الأول.  
 $v(nMin)$ : قيمة الحد الأول.

ونحصل على جدول قيم المتتالية:

## 2. تعيين اتجاه تغير متتالية

### طرائق

للبرهان أن متتالية  $(u_n)$  متزايدة (أو متناقصة):

**طريقة 1: ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$ .**

- إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، فإن  $(u_n)$  متزايدة.
- إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، فإن  $(u_n)$  متناقصة.

**طريقة 2: نقارن حاصل القسمة  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  مع 1.**

من أجل متتالية ذات حدود موجبة تماما.

1. إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ، فإن  $(u_n)$  متزايدة.
2. إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ ، فإن  $(u_n)$  متناقصة.

**طريقة 3: ندرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، بحيث  $u_n = f(n)$  على  $[0; +\infty[$ .**  
 - إذا كانت  $f$  متزايدة، فإن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

### تمرين

ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات المعرفة كما يلي:

(أ) من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_n = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$

(ب) من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ،  $u_n = \frac{n}{5^n}$

(ج) من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_n = 2n^2 + 2n - 5$

### حل

(أ) نطبق الطريقة 1.

لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}[(n+1)^2 + 1] - \frac{1}{2}(n^2 + 1) = n + \frac{1}{2}$

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

(ب) بما أن حدود المتتالية موجبة تماما، يمكن تطبيق الطريقة 2.



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{n+1}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{n} = \frac{n+1}{5n}$$

من أجل كل  $n$  حيث  $n \geq 1$ ،  $n+1 \leq 5n$ ، منه  $\frac{n+1}{5n} \leq 1$ .

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

(ح) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بالشكل  $u_n = f(n)$ ، حيث  $f(x) = 2x^2 + 2x - 5$ . يمكن تطبيق الطريقة 3. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . ومن أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $f'(x) = 4x + 2$ . بدراسة إشارة  $f'(x)$ ، نجد:

|         |            |        |            |
|---------|------------|--------|------------|
| $x$     | $-\infty$  | $-0,5$ | $+\infty$  |
| $f'(x)$ |            | $-$    | $+$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ | $-5,5$ | $\nearrow$ |

على المجال  $]-0,5; +\infty[$ ،  $f'(x) > 0$ ، الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ . وبالتالي، المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

### 3. التعرف على متتالية حسابية

طريقة

- للتعرف على متتالية حسابية  $(u_n)$  حدّها الأوّل  $u_0$ ، يمكن:
- البرهان على أنّ  $(u_n)$  دالة تآلفية لـ  $n$ ، بمعنى البرهان على وجود عدد حقيقي  $r$  حيث، من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_n = u_0 + nr$ .
  - أو حساب الفرق  $u_{n+1} - u_n$  والبرهان على أنّه ثابت من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ويساوي  $r$ . أي أنّ  $u_{n+1} = u_n + r$ .

تمرين

من بين المتتاليات  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  التالية، عيّن المتتاليات الحسابية:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ 2u_{n+1} - 2u_n = 3 \end{cases} \quad (ح) \quad \begin{cases} u_n = n^2 + n + 1 \quad (ب) \\ u_n = -5n + 12 \quad (أ) \end{cases}$$

حل

(أ) الحدّ العام من الشكل  $u_n = u_0 + nr$ ، حيث  $u_0 = 12$  و  $r = -5$ . وبالتالي،  $(u_n)$  متتالية حسابية حدّها الأوّل 12 وأساسها -5.

(ب) لدينا:  $u_0 = 1$ ،  $u_1 = 3$ ،  $u_2 = 7$  ونلاحظ أنّ  $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ . وبالتالي،  $(u_n)$  ليست متتالية حسابية.



(ح) لدينا من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $2u_{n+1} - 2u_n = 3$  . ونكتب  $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$  .  
 المتتالية تحقق: من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_{n+1} = u_n + r$  ،  
 $(u_n)$  متتالية حسابية ذات الأساس  $\frac{3}{2}$  .

#### 4. تعيين متتالية حسابية علم حدان منها

طريقة

لتعيين متتالية حسابية  $(u_n)$  علم حدان  $u_p$  و  $u_m$  منها :  
 نستعمل الدستور  $u_m = u_p + (m - p)r$  لتعيين الأساس  $r$  ثم الدستور  $u_m = u_0 + mr$  لتعيين الحد الأول  $u_0$  .

تمرين

$(u_n)$  متتالية حسابية حيث  $u_5 = 4$  و  $u_{10} = -11$  . عيّن هذه المتتالية.

حل

ليكن  $r$  أساس هذه المتتالية و  $u_0$  حدّها الأول.  
 لدينا  $u_{10} = u_5 + (10 - 5)r$  أي  $-11 = 4 + 5r$  .  
 ومنه  $r = -3$  . أساس المتتالية  $(u_n)$  هو  $-3$  .  
 لدينا أيضا  $u_5 = u_0 + 5 \times (-3)$  أي  $4 = u_0 - 15$  .  
 ومنه  $u_0 = 19$  . الحدّ الأول للمتتالية هو  $19$  .  
 نستنتج أنّ  $(u_n)$  هي المتتالية التي حدّها الأول  $19$  وأساسها  $-3$  .  
 وبمعنى آخر، من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 19 - 3n$  .

#### 5. التعرف على متتالية هندسية

طريقة

للتعرف على متتالية هندسية  $(u_n)$  حدّها الأول  $u_0$  ، يمكن:  
 ▪ البرهان على وجود عدد حقيقي غير منعدم  $q$  حيث من أجل كلّ  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_n = u_0 q^n$  .  
 أو  
 ▪ حساب حاصل القسمة  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  والبرهان على أنه ثابت  $q$  (مع  $q \neq 0$ ) ، أي أنّ  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$  .

تمرين

من بين المتتاليات  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  التالية، عيّن المتتاليات الهندسية:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \quad (\text{ح}) \quad \begin{cases} u_n = -3 \times 7^n \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} u_n = 2^n \end{cases} \quad (\text{أ})$$



حل

- (أ) الحد العام من الشكل  $u_n = u_0 q^n$  مع  $u_0 = 1$  و  $q = 2$ .  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها 2.  
 (ب) بنفس الطريقة، نستخلص أن  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها 7.  
 (ج) لا يمكن وضع  $u_{n+1} = 3u_n + 1$  على الشكل  $u_{n+1} = qu_n$  (مع  $q \neq 0$ ).  $(u_n)$  ليست متتالية هندسية.

## 6. تعيين متتالية هندسية علم حدان منها

طريقة

لتعيين متتالية هندسية  $(u_n)$  علم حدان  $u_p$  و  $u_m$  منها :  
 نستعمل الدستور  $u_m = u_p q^{m-p}$  لنعيين الأساس  $q$  ثم الدستور  $u_m = u_0 q^m$  لتعيين  $u_0$ .

تمرين

$(u_n)$  متتالية هندسية بحيث  $u_3 = 24$  و  $u_5 = 96$ . عين هذه المتتالية.

حل

ليكن  $q$  أساس هذه المتتالية و  $u_0$  حدّها الأوّل.  
 لدينا  $u_5 = u_3 q^{5-3}$  أي  $96 = 24q^2$  ونجد  $q^2 = 4$ .  
 ومنه  $q = -2$  أو  $q = 2$ .

- من أجل  $q = -2$ ، لدينا أيضا  $u_3 = u_0 \times (-2)^3$  أي  $24 = u_0 \times (-2)^3$ .  
 ومنه  $u_0 = -3$ .
- من أجل  $q = 2$ ، لدينا أيضا  $u_3 = u_0 \times 2^3$  أي  $24 = u_0 \times 2^3$ .  
 ومنه  $u_0 = 3$ .

نستنتج أنه توجد متتاليتان هندسيتان حيث  $u_3 = 24$  و  $u_5 = 96$ :  
 المتتالية التي أساسها 2- وحدّها الأوّل 3- والمتتالية التي أساسها 2 وحدّها الأوّل 3.



# مسألة محلولة

## مسألة

يتوزع سكان ولاية معينة سنة 2005 كما يلي:

- 450000 نسمة يسكنون المدن.
- 250000 نسمة يسكنون الريف.

نفرض أن عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% وأن عدد سكان الريف يزيد بـ 10000 نسمة كل سنة.

1. احسب عدد سكان كل فئة بعد 5 سنوات.
2. في أية سنة يتجاوز عدد سكان الولاية مليون نسمة.

## حل

1.  $n$  عدد طبيعي. ليكن  $U_n$  عدد سكان المدن،  $R_n$  عدد سكان الريف، مقدرا بالآلاف،  $T_n$  العدد الإجمالي لسكان الولاية في السنة  $(2005 + n)$ .  
لدينا  $U_0 = 450$  و  $R_0 = 250$ .

▪ بما أن عدد سكان المدن يزيد بنسبة 5% كل سنة، إذن:

$$U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,05 = 1,05 \times U_n$$

المتتالية  $(U_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 1,05$  حيث وبالتالي:

$$U_n = U_0 q^n = 450 \times 1,05^n$$

$$\text{ومنه } U_5 = 450 \times 1,05^5 \approx 574$$

▪ بما أن سكان الريف يزيد بـ 10 آلاف نسمة كل سنة، إذن:

$$R_{n+1} = R_n + 10$$

المتتالية  $(R_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 10$  حيث وبالتالي:

$$R_n = R_0 + nr = 250 + 10n$$

$$\text{ومنه } R_5 = 250 + 10 \times 5 = 300$$

2. باستعمال حاسبة بيانية، نتحصل على جدول قيم المتتاليات  $(R_n)$  و  $(U_n)$  و  $(T_n)$  كما في الشاشات الآتية. وبقراءة قيم  $(T_n)$ ، نجد أن عدد سكان الولاية سيتجاوز مليون نسمة في السنة  $(2005 + 9)$  أي 2014.

| X  | Y2  | Y3      |
|----|-----|---------|
| 5  | 300 | 874.33  |
| 6  | 310 | 913.04  |
| 7  | 320 | 953.2   |
| 8  | 330 | 994.85  |
| 9  | 340 | 1038.08 |
| 10 | 350 | 1083    |
| 11 | 360 | 1129.7  |

$Y_3 = 1038.09769719$

| X  | Y1     | Y2  |
|----|--------|-----|
| 5  | 574.33 | 300 |
| 6  | 603.04 | 310 |
| 7  | 633.2  | 320 |
| 8  | 664.85 | 330 |
| 9  | 698.1  | 340 |
| 10 | 733    | 350 |
| 11 | 769.65 | 360 |

$X=5$

| Plot2                                | Plot3 |
|--------------------------------------|-------|
| $Y_1 = 450 * 1.05^X$                 |       |
| $Y_2 = 250 + 10X$                    |       |
| $Y_3 = (450 * 1.05^X) + (250 + 10X)$ |       |



1. صحيح أو خاطئ

في المتتالية  $7, 3, -1, -5, -9$  ذات الحد الأول  $u_0 = 7$ ، الحد  $u_2$  يساوي  $-1$ .

الحد الأول للمتتالية  $u$  المعطاة بالعلاقة  $u_n = n^2 + n - 3$

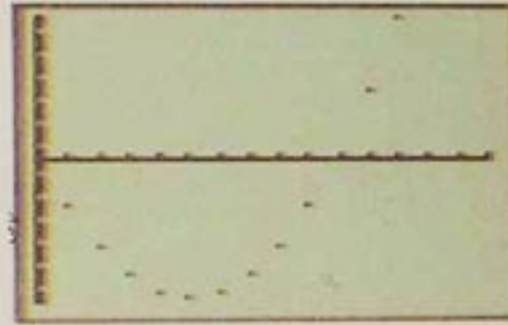
غير موجود لأنه من أجل  $n = 0$  نجد عددا سالبا.

الحدود  $u_1, u_2, u_3$  للمتتالية المعرفة بما

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} \end{cases} \text{ يلي}$$

هي على التوالي:  $0,2, 5, 0,2$

التمثيل البياني للمتتالية المعرفة بالعلاقة  $v_n = 0,5n - 3$  هو:



المتتالية  $(u_n)$  بحيث  $u_{n+1} = -0,5n + 1$  متزايدة.

الأعداد  $2,5, 3, 3,6, 5,3$  هي حدود لمتتالية هندسية.

$2n + 5$  هو الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدّها الأول  $u_0 = 2$  وأساسها  $5$ .

$3 \times 7^n$  هو الحد العام للمتتالية الهندسية التي حدّها الأول  $u_0 = 3$  وأساسها  $7$ .

عدد حدود المجموع  $u_7 + u_8 + \dots + u_{100}$  هو  $100$ .

عموميات

2.  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي:

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_n = 2n^2 - 3n + 2$ ، عيّن بدلالة  $n$  كلا من:

$$u_{n+1}, u_{n+3}, u_{2n+1}, u_n - 1.$$

3. في كل من المتتاليات التالية، اكتب بعض الحدود التي توافق انتظام الحدود المعطاة:

(أ)  $0, 2, 4, 6, \dots$

(ب)  $-2, 0,5, 3, 5,5, \dots$

(ج)  $1, 5, 25, 125, \dots$

4.  $n$  عدد طبيعي، احسب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات  $(u_n)$  التالية، حيث:

(أ)  $u_n = 2n - 7$

(ب)  $u_n = -3n + 4$

(ج)  $u_n = n^2 - n + 1$

(د)  $u_n = \frac{2n - 1}{n + 3}$

5.  $n$  عدد طبيعي، احسب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات  $(u_n)$  التالية حيث:

(أ)  $u_n = 3^n$

(ب)  $u_n = (-2)^n$

(ج)  $u_n = n \times 3^n$

6. احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3, u_4$  بالنسبة إلى كل من المتتاليات  $(u_n)$  التالية حيث:

(أ)  $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

(ب)  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

(ج)  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 1 \end{cases}$

(د)  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}$

7. باستعمال حاسبة، أعط القيم المقربة إلى  $10^{-3}$  للحدود الخمسة الأولى للمتتالية المعرفة كما يلي:

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ،  $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$  و  $u_0 = -1$



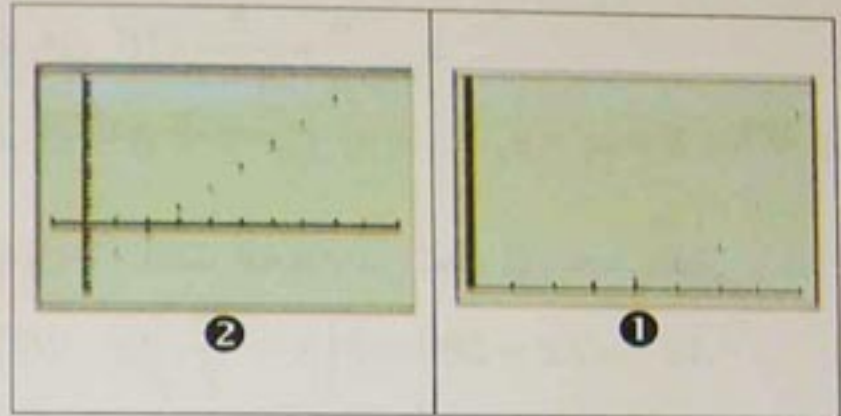
8 عدد طبيعي. مثل بيانيا الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات المعرفة كما يلي:

$$(أ) \quad u_n = \frac{7}{n+2} \quad (ب) \quad u_n = (-1)^n \times n$$

$$(ج) \quad \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + u_n \end{cases}$$

9 أرفق كل متتالية بتمثيلها البياني.

$$(أ) \quad u_n = 3n - 7 \quad (ب) \quad u_n = 2^n$$



10 عيّن اتجاه تغيّر كل من المتتاليات المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$(أ) \quad u_n = -\frac{n}{2}$$

$$(ب) \quad u_n = 2n^2 + n$$

$$(ج) \quad u_n = 1 - 2n^2$$

$$(د) \quad u_n = (n+1) \times 2^n$$

11 نفس السؤال السابق.

$$(أ) \quad u_n = \frac{2}{n+1}$$

$$(ب) \quad u_n = (n+1) \times 2^n$$

12  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي:

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1}, \quad n \text{ من } \mathbb{N}$$

(أ) أظهر على شاشة حاسبة جدول قيم المتتالية  $(u_n)$  ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغيّراتها.

(ب) تحقق من صحة التخمين.

13  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$u_n = (-2)^n$$

احسب الحدود الستة الأولى للمتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن المتتالية ليست رتيبة.

14 نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2-u_n}{3} \end{cases}$$

(1) احسب، باستعمال حاسبة، الحدود  $u_1, u_2, u_3, u_4$ .

(2) هل المتتالية رتيبة؟

15 نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$u_n = n^2 - 10n + 1$$

(1) لاحظ أنّ  $(u_n)$  معرفة بعلاقة من الشكل  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة يطلب تعيينها.

(2) باستعمال حاسبة، أظهر التمثيل البياني للدالة  $f$ .

(3) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$ .

### المتتاليات الحسابية

16 من بين المتتاليات التالية المعرفة من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$ ، عيّن المتتاليات الحسابية:

$$(أ) \quad u_n = 2n - 3 \quad (ب) \quad u_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$(ج) \quad u_n = n^2 - 2n + 1 \quad (د) \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

17 عدد طبيعي هل المتتاليات التالية حسابية؟ في حالة الإيجاب، عيّن الأساس والحدّ الأول.

$$(أ) \quad u_n = \frac{2}{3}n + 0,5$$

$$(ب) \quad u_n = -n + 2$$

$$(ج) \quad u_n = 2\sqrt{n} + 1$$



18. المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} \end{cases}$$

(أ) احسب  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$ .

(ب) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حسابية. ما هو أساسها؟

19. متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0 = 14$

وأساسها  $-3$ .

(أ) احسب  $u_1$ ،  $u_2$ ،  $u_3$  و  $u_{25}$ .

(ب) عيّن عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

20. متتالية حسابية بحيث  $u_2 = 11$

و  $u_7 = 31$ .

(أ) احسب الحدّ الأول  $u_0$  والأساس  $r$ .

(ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

21. مثل بيانيا المتتالية الحسابية ذات الحدّ الأول

$1$  والأساس  $3$ .

22. (1) بين أن الأعداد  $a$ ،  $b$ ،  $c$  بهذا الترتيب

تكون حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان  $2b = a + c$ .

(2) الأعداد  $a$ ،  $b$ ،  $c$  بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية. عيّن هذه الأعداد علما

$$\begin{cases} 4a - 5b + c = -9 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 210 \end{cases} \text{ أن:}$$

23. متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0 = 10$

وأساسها  $0,5$ .

(أ) احسب  $u_1$  و  $u_{20}$ .

(ب) احسب المجموع  $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ .

24. متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0 = 1$

ومجموع الحدود الأولى لها هو  $S$  حيث:

$$S = 1 + 8 + 15 + \dots + 603$$

1. عيّن أساس  $(u_n)$ .

2. ما هي عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ ؟

3. عيّن  $n$  بحيث  $u_n = 603$ .

4. احسب  $S$ .

25. نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. عيّن العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل كل

$$n \text{ من } \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

2. استنتج المجموع  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$ .

26. (1) أثبت أنه من من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$3x^2 - 2x - 280 = 3 \left( x + \frac{28}{3} \right) (x - 10)$$

(2) عيّن عدد حدود المتتالية الحسابية  $(u_n)$  ذات

الأساس  $6$  بحيث:

$$u_1 = 6 \text{ و } u_1 + u_2 + \dots + u_n = 280$$

27. متتالية حسابية حدّها الأول  $u_0 = -2$

وأساسها  $r = 5$ .

احسب المجموع  $u_{11} + u_{12} + \dots + u_{20}$

### المتتاليات الهندسية

28. بين أن المتتاليات التالية المعرفة من أجل كل عدد

طبيعي  $n$ ، هي متتاليات هندسية:

$$(أ) u_n = 3^n \quad (ب) u_n = 2 \times 5^n$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{5} \end{cases} (ج) u_n = 2 \times 3^{-n}$$

29. هل الأعداد التالية هي حدود متتابعة لمتتالية

هندسية؟

$$(أ) \frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \frac{32}{63}, \frac{128}{189} \quad (ب) \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}$$



**36.** (1) متتالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \quad \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

احسب  $u_1$  و  $u_2$  ..

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

(أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية. أعط حدّها الأوّل وأساسها.

(ب) عيّن عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$ .

**37.** أدرس تغيّرات المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على

$$\mathbb{N} \text{ كما يلي: } u_n = \frac{3}{5^n}$$

**38.**  $(u_n)$  متتالية هندسية معرفة كما يلي:

$$u_n = 3 \times 5^n \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(أ) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية.

(ب) احسب المجموع  $S_1 + S_2 + \dots + S_9$

**39.** (1) احسب المجموع

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$$

(2) بين أن  $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

**40.** احسب المجموع التالي:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{128}{2187}$$

**41.** نفس السؤال السابق.

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{256}$$

مسائل

**42.** أودع شخص مبلغ 10000 دينار بفوائد بسيطة

لمدة 3 سنوات بنسبة سنوية قدرها 12%.

ما هو رصيده عند نهاية الإيداع؟

**30.** هل المتتاليات التالية هندسية؟ في حالة

الإيجاب، عيّن الأساس والحدّ الأوّل.

$$(أ) \quad u_n = \frac{n}{3} \quad (ب) \quad u_n = 5^{2n+1}$$

$$(ج) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad (د) \quad u_n = 4 + 6n$$

**31.** إليك جزءا من جدول قيم متتالية  $(u_n)$

محصل عليه باستعمال حاسبة.

| $n$ | $u(n)$ |
|-----|--------|
| 0   | 1      |
| 1   | 2      |
| 2   | 4      |
| 3   | 8      |
| 4   | 16     |
| 5   | 32     |
| 6   | 64     |
| 7   | 128    |
| 8   | 256    |
| 9   | 512    |
| 10  | 1024   |

(أ) هل يمكن أن تكون  $(u_n)$  متتالية هندسية؟

(ب) في حالة الإيجاب، ما هو أساسها وحدّها الأوّل؟

**32.**  $(u_n)$  متتالية هندسية حدّها الأوّل  $u_1 = 48$

وأساسها 0,5.

(أ) احسب  $u_1, u_2, u_3$ .

(ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

**33.** (1) بين أن الأعداد  $a, b, c$  بهذا الترتيب

تكون حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا

$$\text{و فقط إذا كان } b^2 = a \times c$$

(2) الأعداد  $a, b, c$  بهذا الترتيب حدود

متتابعة لمتتالية هندسية. عيّن هذه الأعداد علما

$$\begin{cases} ac = 10b \\ a + b + c = 35 \end{cases} \quad \text{أن:}$$

**34.** عيّن العدد الحقيقي الموجب  $\alpha$  بحيث تكون

الأعداد 18,  $\alpha$ , 32 بهذا الترتيب حدودا متتابعة

لمتتالية هندسية.

**35.** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما

$$\text{يلي: } u_n = -3 \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية، أعط حدّها الأوّل

وأساسها.



1. باستعمال جدول، حضر ورقة حساب تسمح بمقارنة المرتبين الشهريين للتعاقد بالكيفيتين على عدة سنوات.

2. ابتداء من أي سنة، يكون المرتب الشهري حسب التعاقد بالكيفية الثانية أكبر من المرتب الشهري حسب التعاقد بالكيفية الأولى؟

48. قارن تطوّر سكان المدينتين أ و ب:

• عدد سكان المدينة أ هو 500000 نسمة ويزيد بمقدار 10000 نسمة.

• عدد سكان المدينة ب هو 800000 نسمة ويزيد بنسبة 8% في السنة.

49. نترك كرة مطاطية تسقط بدون سرعة ابتدائية من ارتفاع 2m لترتد وتبلغ ارتفاع 1,60m وهكذا لتبلغ في كلّ مرة ارتفاعا قدره  $\frac{4}{5}$  ارتفاع الارتداد السابق.

ليكن  $h$  الارتفاع ( بالأمتار ) الذي تبلغه الكرة عند الارتداد من المرتبة  $n$  ( $h_0 = 2$ ).

1. (أ) احسب  $h_1, h_2, h_3$ .

(ب) أعط عبارة  $h_{n+1}$  بدلالة  $h_n$ . ما هي طبيعة المتتالية  $(h_n)$ ؟

(ج) أعط عبارة  $h_n$  بدلالة  $n$ .

2. عيّن  $n$  عدد الارتدادات التي يكون بعدها  $h$  أصغر تماما من 40cm.

50. يتطلب حفر بئر كلفة ثابتة قدرها 12000 دينار.

كلفة المتر الأوّل المحفور هو 400 دينار وتزيد كلفة كلّ متر إضافي بمبلغ 50 دينارا عن سابقه. ليكن  $C_n$  الكلفة الإجمالية لحفر بئر بعمق  $n$  مترا.

1. احسب  $C_1, C_2, C_3$ .

2. ما هي طبيعة المتتالية  $(C_n)$ ؟ استنتج عبارة  $C_n$  بدلالة  $n$ .

3. احسب كلفة حفر بئر عمقه 40m.

43. أودع مبلغ 60000 دينار بفوائد بسيطة

بنسبة قدرها 9,5% سنويا وجلب فائدة

قدرها 7600 دينار.

ما هي مدة الإيداع؟

44. نودع 20000 دينار لمدة خمس سنوات

بفوائد بسيطة شهرية قدرها 1%.

باستعمال حاسبة، احسب الرصيد في نهاية المدة.

45. يريد شخص الحصول على رصيد قدره

11236 دينار بعد سنتين.

ما هو المبلغ الذي ينبغي إيداعه علما أن البنك

يقترح عليه فوائد مركبة بنسبة قدرها 6% في

السنة؟

46. يريد شخص إيداع 25000 دينار في

صندوق التوفير وله أن يختار إحدى الكيفيتين:

(أ) بفوائد مركبة سنوية قدرها 5%.

(ب) بفوائد بسيطة سنوية قدرها 5,5%.

نسمي  $u_n$  و  $v_n$  الرصيدين المُحصلين بعد  $n$  سنة

بالكيفيتين أ و ب على الترتيب.

1. عبّر عن كلّ من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ .

2. باستعمال حاسبة أو جدول، عيّن الكيفية

الأفضل للمدخر تبعا لمدة الإيداع.

47. اقترحت شركة على المترشحين للتوظيف

كيفيتين للتعاقد:

• مرتب شهري قدره 15000 دينار عند

2000/01/01 وزيادة 450 دينارا عند

أول جانفي من كلّ سنة.

• مرتب شهري قدره 15000 دينارا عند

2000/01/01 وزيادة 8% عند أول

جانفي من كلّ سنة.



## الباب 8 الجمل الخطية \*

1. المعادلات الخطية لمجهولين.
2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين.
3. جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل.
4. المترجمات الخطية لمجهولين.

### الجمل الخطية عند الصينيين القدامى

"فن الرياضيات في تسعة فصول" عنوان مخطوط صيني قديم، يعود إلى القرن الأول بعد الميلاد. ورد في الفصل الثامن منه تحت عنوان "مقارنة الأوضاع" أن المشكلات تحلّ بجمل معادلات خطية لمجهولين أو ثلاثة مجاهيل. يرمز فيه إلى الأعداد بأعواد أفقية وأعواد عمودية كما يلي:

|              |   |    |   |   |   |   |   |   |   |
|--------------|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| أعواد عمودية |   |    |   |   |   |   |   |   |   |
| أعواد أفقية  | — | == | ≡ | ≡ | ≡ | ≡ | ≡ | ≡ | ≡ |

تستعمل الرموز العمودية للأحاد وللآحاد وللآحاد وللآحاد وللآحاد... وتسنعمل الرموز الأفقية للعشرات وللآلاف، ...

فمثلاً، نكتب العدد 1947 على الشكل:  $\text{||||} \equiv \text{||||} \equiv \text{||||} \equiv \text{||||}$

توضع الأعواد على لوحة تسمى "سوان بان" (بمعنى لوحة أعواد) وتجرى الحسابات كما في الحساب المكتوب بالنسبة إلى العمليات الأربع.

ونجد بالخصوص طريقة لحلّ جمل معادلات خطية قريبة من الطريقة المعروفة حالياً بطريقة غوص: لحلّ جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل، نضع معاملات المجاهيل الثلاثة على الأسطر الثلاثة الأولى والحدود الثابتة على السطر الأخير للوحة الأعواد. وبإجراء عمليات بسيطة على الأعمدة، نحول الجملة إلى جملة "مثلثية" بحيث نجعل إحدى معادلات الجملة بمجهول واحد فقط. نعيّن هذا المجهول ونستنتج المجاهيل الأخرى.



## استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.  
المستوي منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

| السؤال  | إجابة 1   | إجابة 2                           | إجابة 3                          |
|---|---|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. إحدى نقاط $E$ هي:<br>مجموعة النقط ذات الاحداثيات $(x; y)$ حيث<br>$3x - 2y + 8 = 0$ . | $M(-3; 0)$  | $M(4; 0)$                         | $M(0; 4)$                        |
| 2. مستقيم معامل توجيئه:<br>3. المعادلة المختصرة لـ $E$ هي:                              | $\frac{3}{2}$   | $\frac{2}{3}$                     | $-\frac{3}{2}$                   |
| 4. $E$ هي المستقيم $(AB)$ حيث   | $y = -\frac{3}{2}x - 4$   | $y = \frac{3}{2}x + 4$            | $x = \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}$ |
| 5. $E$ تشترك مع محور الفواصل في النقطة  | $A(0; 4)$<br>و $B(-2; 1)$   | $A(1; 5, 5)$<br>و $B(1; 1)$       | $A(-1; 2, 5)$<br>و $B(-4; 0)$    |
| 6. المستقيمان $(D)$ و $(D')$ حيث  | $M_0\left(0; -\frac{8}{3}\right)$                                 | $M_0\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$ | $M_0(0; 4)$                      |
| 7. العددين الحقيقيان $x = -1$ و $y = 10$ يحققان المعادلة                                | متقاطعان  | متوازيان تماما                    | متطابقان                         |
| 8. المستقيمان $(D)$ و $(D')$ حيث  | $0,5x - y = -10,5$  | $0,5x + y = 10,5$                 | $x - 0,5y = -5,5$                |
| 9. المستقيم الذي معادلته $x = 1$  | $(D): x + y - 1 = 0$ و $(D'): x - y + 1 = 0$<br>يشاركان في النقطة | $A(0; 1)$                         | $C(1; 1)$                        |
| 10. المستقيم الذي معادلته $y = 1$   | يوازي محور الفواصل  | يوازي محور الترتيب                | يقطع المحورين                    |
|   | يوازي محور الفواصل  | يوازي محور الترتيب                | يقطع المحورين                    |



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

جاء في كتاب "عناصر الجبر"، للرياضياتي ليونارد أولر المنشور سنة 1774، النص التالي:  
يحمل بغل وحمار حمولة تزن بعض القناطير. اشتكى الحمار من ثقل حمولته وقال للبغل:  
"بقي أن أحمل قنطارا من حمولتك حتى أحمل ضعف ما ستحمل."  
فأجاب البغل قائلا: "نعم، ولكن إذا أعطيتني قنطارا من حمولتك سأحمل ثلاثة أضعاف حمولتك."  
نريد معرفة حمولة كل من البغل والحمار.

### • اختيار المجاهيل وتربيض المشكلة

لتكن  $x$  و  $y$  حمولتي البغل والحمار على الترتيب (بالقناطير).

بين أن ترجمة المشكلة بإدخال المجهولين  $x$  و  $y$  تؤدي إلى الجملة:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

### • حل المشكلة

- (أ) باستعمال المعادلة الأولى، عبّر عن  $x$  بدلالة  $y$  ثم عوض القيمة المحصل عليها في المعادلة الثانية.  
(ب) حل المعادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول  $x$  المحصل عليها هكذا ثم احسب قيمة  $y$ .  
(ج) تحقق من أن الثانية  $(x; y)$  الناتجة هي بالفعل حل للجملة.

### • السؤال

ما هي حمولة كل من البغل والحمار؟

## نشاط 2: القطع المكافئ المار بثلاث نقاط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

نعتبر النقط  $A, B, C$  ذات الإحداثيات  $(1; 3), (-1; 3), (2; 9)$  على الترتيب.  
نقترح فيما يلي تعيين القطع المكافئ الذي معادلته  $y = ax^2 + bx + c$  والمار بالنقط  $A, B, C$  في حالة وجوده.

$$(S) \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

1. بين أن الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  تحقق الجملة:

2. (أ) باستعمال المعادلتين الأوليين للجملة  $(S)$ ، بين أن العددين  $a, c$  يحققان المعادلة  $a + c = 3$ .

(ب) باستعمال المعادلتين الأخيرتين للجملة  $(S)$ ، بين أن العددين  $a, c$  يحققان المعادلة  $6a + 3c = 15$ .

$$3. \text{ حل الجملة: } \begin{cases} a + c = 3 \\ 6a + 3c = 15 \end{cases}$$

4. بتعويض قيمتي  $a, c$  الناتجتين، احسب  $b$ .

5. برّر أن الجملة  $(S)$  تقبل حلا وحيدا.

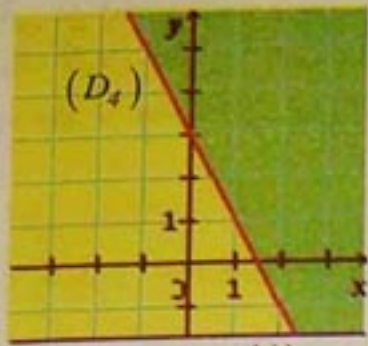
6. ارسم القطع المكافئ المطلوب.



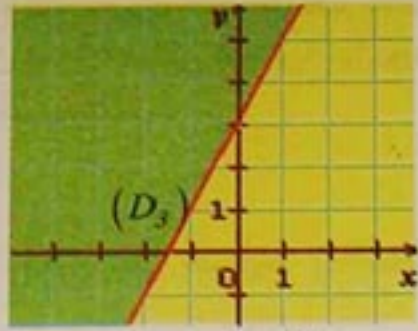
# أنشطة تمهيدية

## نشاط 3: تجزئة المستوي

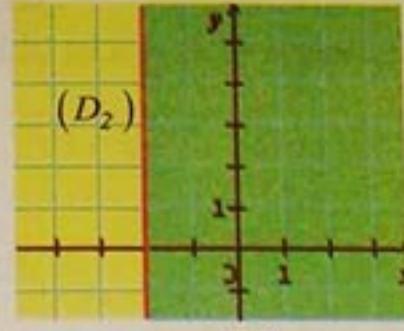
1. أ) عَيّن المعادلة المختصرة لكلّ من المستقيمات  $(D_1)$ ،  $(D_2)$ ،  $(D_3)$ ،  $(D_4)$  المرسومة أدناه.



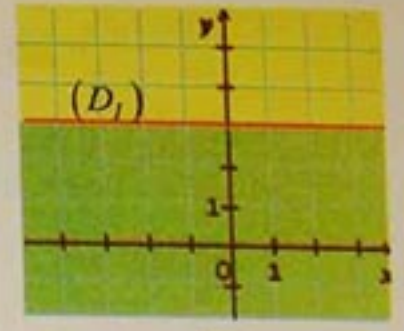
(4)



(3)

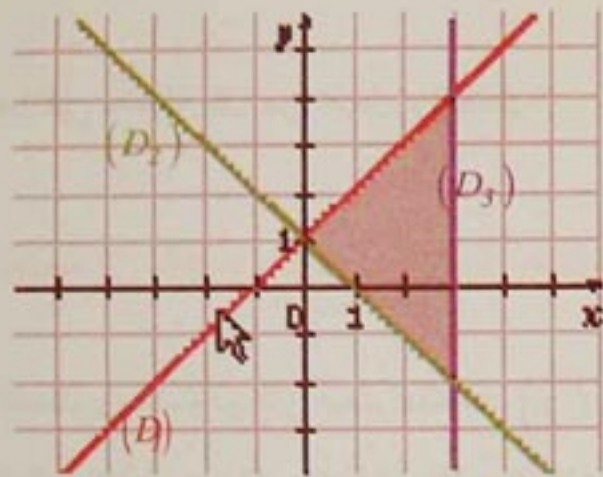


(2)



(1)

ب) ما هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $y = 2x + 3$  ؟  $y > 2x + 3$  ؟  $y < 2x + 3$  ؟  
 ج) عبّر بمتراجحة خطية عن مجموعة النقط  $M(x; y)$  من الجزء الملون بالأخضر في كلّ من التمثيلين البيانيين 3 و 4.



2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 $(D_1)$  و  $(D_2)$  و  $(D_3)$  ثلاثة مستقيمات مرسومة على البيان المقابل.

عبّر بجمللة متراجحات خطية عن مجموعة النقط  $M(x; y)$  للجزء الملون على الشكل.



## 1. المعادلات الخطية لمجهولين

### • تعريف

كل معادلة من الشكل  $ax + by + c = 0$ ، حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية مفروضة، هي معادلة خطية لمجهولين حقيقيين  $x$  و  $y$ .

المستوي منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### مبرهنة

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية حيث  $a$  و  $b$  غير منعدمين معا. مجموعة النقط  $M(x; y)$  من المستوي حيث  $ax + by + c = 0$  هي مستقيم.

### برهان

▪ إذا كان  $b = 0$  فإن  $a \neq 0$  (لأن  $a$  و  $b$  غير منعدمين معا) وتكون المعادلة من الشكل  $ax + c = 0$  أي

$$x = -\frac{c}{a}$$

وهي معادلة لمستقيم يوازي محور الترتيب.

▪ إذا كان  $b \neq 0$  فيمكن أن نكتب المعادلة  $ax + by + c = 0$  على الشكل  $by = -ax - c$

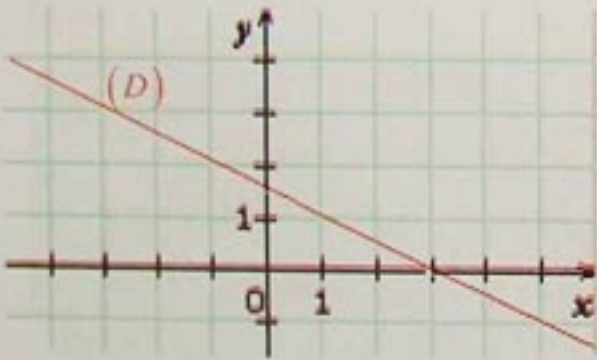
$$\text{أي } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

هذه المعادلة من الشكل  $y = mx + p$  وبالتالي فالمجموعة  $E$  مستقيم.

### مثال

مجموعة النقط  $M(x; y)$  بحيث  $x + 2y - 3 = 0$  أي  $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

هي المستقيم  $(D)$  الذي معامل توجيهه  $-\frac{1}{2}$  والترتيب إلى المبدأ  $\frac{3}{2}$ .



## 2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين

### • تعريف

نسمى جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة  $(S)$  يمكن وضعها على الشكل:

$$(S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث  $a, b, c, a', b', c'$  أعداد حقيقية مفروضة و  $x, y$  المجهولان.



## تفسير هندسي

لتكن الجملة  $(S): \begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$  حيث  $a$  و  $b$  من جهة و  $a'$  و  $b'$  من جهة أخرى غير منعدمين

معا.

في المستوي المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المعادلتان (1) و (2) هما معادلتا مستقيمين  $(D)$  و  $(D')$ . تكون الثنائية  $(x_0; y_0)$  حلا للجملة  $(S)$  إذا وفقط إذا كانت النقطة  $M_0(x_0; y_0)$  تنتمي إلى  $(D)$  وإلى  $(D')$ . وبالتالي يزول حل الجملة  $(S)$  إلى دراسة الوضع النسبي للمستقيمين  $(D)$  و  $(D')$ .

ونجد:

| $(D)$ و $(D')$ متقاطعان                                      | $(D)$ و $(D')$ متطابقان                       | $(D)$ و $(D')$ متوازيان تماما |
|--|---|-------------------------------|
|  |   |                               |
| $ab' - ba' \neq 0$   | $ab' - ba' = 0$                               |                               |
| الجملة $(S)$ لها حلٌ وحيد: $(x_0; y_0)$ إحداثيا النقطة $M_0$ | الجملة $(S)$ لها مجموعة غير منتهية من الحلول. | الجملة $(S)$ ليس لها حلول.    |

## نتيجة

لتكن الجملة  $(S): \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

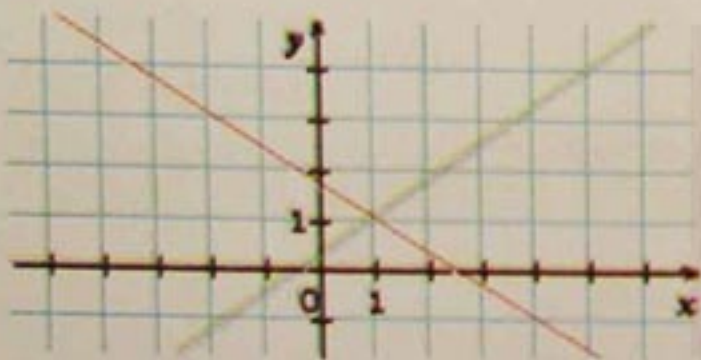
- إذا كان  $ab' - ba' \neq 0$  فإن  $(S)$  تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان  $ab' - ba' = 0$  فإن  $(S)$  تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول أو ليس لها حلول.

يسمى العدد  $ab' - ba'$  **محدد** الجملة  $(S)$  ويرمز إليه بالرمز  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$  ونكتب  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

## مثال

لتكن الجملة  $(S): \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$

محددها  $ab' - ba' = 2 \times (-4) - 3 \times 3 = -17 \neq 0$  بما أن المحدد غير منعدم، فالجملة تقبل حلا وحيدا هو  $(1; 1)$  كما هو مبين على الشكل.





تعريف

نسمي جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

حيث  $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', d, d', d''$  أعداد حقيقية معطاة و  $x, y, z$  مجاهيل.

يكون حل مثل هذه الجملة، في حالة وجوده، على شكل ثلاثية  $(x; y; z)$ .

مثال

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 12 \\ 4x - 2y + 3z = 3 \\ 6x - y + 2z = 11 \end{cases}$$

الثلاثية  $(2, 5; 2; -1)$  حل للجملة

خواص

العمليات الآتية لا تغير حلول جملة خطية:

- تبادل سطرين:  $L_1 \leftrightarrow L_3$
- ضرب طرفي معادلة في نفس العدد غير المنعدم:  $L_1 \rightarrow \alpha \times L_1$
- تعويض سطر بمجموع هذا السطر وسطر آخر:  $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$
- التعبير، في إحدى المعادلات، عن أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الآخرين وتعويضه في المعادلتين الأخرين.

مثال

$$\text{حلّ الجملة } \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}, \text{ نستعمل الخواص المناسبة ونحصل على جمل متكافئة كما يلي:}$$

- نبادل بين السطرين  $L_1$  و  $L_3$  لكتابة المعادلة المناسبة أكثر لطريقة التعويض في البداية فنجد:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \\ 5x - 2y + 3z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 2x + y + z = -1 \\ 5x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

- نختار مثلا المعادلة الأولى للتعبير عن المجهول  $x$  بدلالة المجاهيل الآخرين ثم نعوضه في المعادلتين الأخرين. وبذلك نحصل على جملة معادلتين لمجاهولين كالآتي:

$$\begin{cases} x = y - z \\ 2x + y + z = -1 \\ 5x - 2y + 3z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 2(y - z) + y + z = -1 \\ 5(y - z) - 2y + 3z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 3y - z = -1 \\ 3y - 2z = 7 \end{cases}$$

- بضرب طرفي المعادلة الثانية في نفس العدد غير المنعدم  $(-1)$  نحصل على جملة يكون فيها معاملا المجهول  $y$  متعاكسين كما يلي:

$$\begin{cases} x = y - z \\ 3y - z = -1 \\ 3y - 2z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ -3y + z = 1 \\ 3y - 2z = 7 \end{cases}$$



# معارف

- جمع السطرين الأخيرين طرفاً إلى طرف، نحصل على جملة يكون  $z$  في المعادلة الثالثة منها المجهول الوحيد:

$$\begin{cases} x = y - z \\ -3y + z = 1 \\ 3y - 2z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ -3y + z = 1 \\ -z = 8 \end{cases}$$

- نهي حل الجملة بحساب قيمة  $z$  في المعادلة الثالثة و  $y$  في المعادلة الثانية بالتعويض بقيمة  $z$  ثم  $x$  في المعادلة الأولى بالتعويض بقيمتي  $y$  و  $z$  ونجد أن:  
الجملة تقبل حلاً وحيداً هو الثلاثية  $(5; -3; -8)$ .

## 4. المراجعات الخطية لمجهولين

### • تجزئة المستوي

المستوي منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### مبرهنة

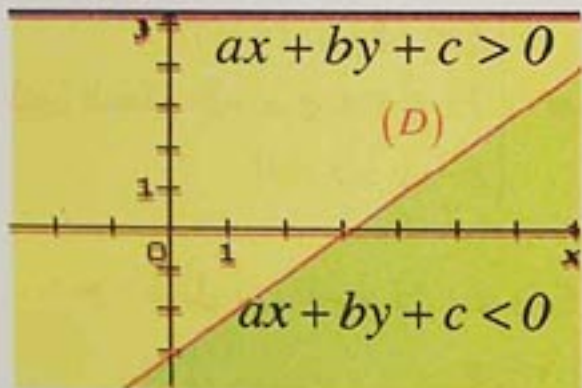
$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان غير منعدمين معا.

المعادلة  $ax + by + c = 0$  تعرف مستقيماً  $(D)$  يجرى المستوي إلى ثلاثة أجزاء.

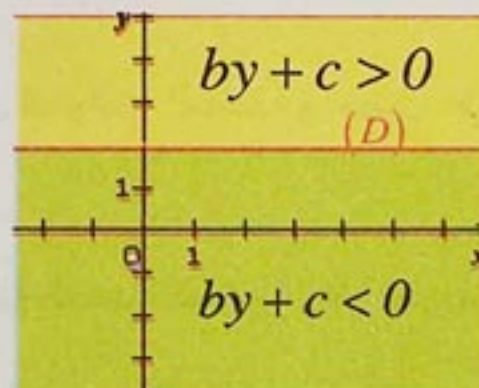
### ملاحظة

- $M(x; y)$  تمسح المستقيم  $(D)$  إذا كان  $ax + by + c = 0$ .
- إذا كان  $M(x; y)$  تمسح أحد نصفي المستويين المفتوحين المحدودين بالمستقيم  $(D)$ ، فإن العبارة  $ax + by + c$  لها إشارة ثابتة.

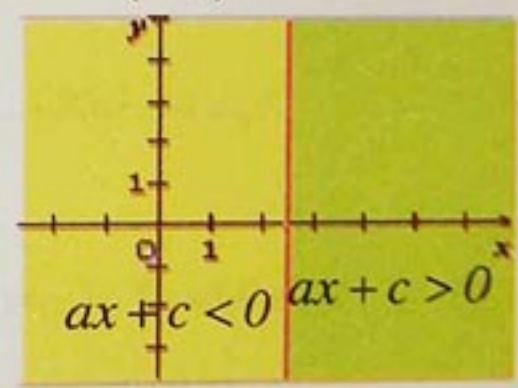
تسمى مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c > 0$  (أو  $ax + by + c < 0$ ) نصف مستوي حده المستقيم  $(D)$ .



$b$  و  $a$  غير منعدمين و  $b > 0$



$b > 0$  و  $a = 0$



$a > 0$  و  $b = 0$

## المراجعات الخطية لمجهولين

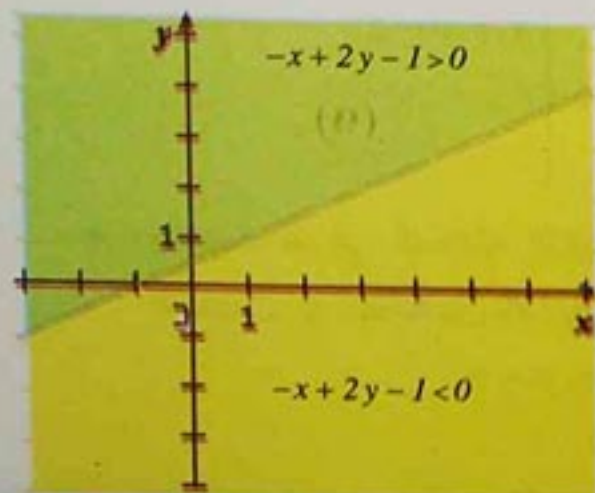
نحلّ مراجعة خطية بتمثيل مجموعة حلولها بيانياً.

### مثال

حلّ بيانياً المراجعة  $-x + 2y - 1 < 0$ .

- نرسم في البداية المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $-x + 2y - 1 = 0$ .
- ثم نعيّن نصف المستوي المناسب باختبار إشارة  $-x + 2y - 1$  من أجل نقطة غير واقعة على المستقيم  $(D)$  ولتكن المبدأ  $O$ .
- نعوض كلا من  $x$  و  $y$  بالعدد  $0$  فنجد  $-1$ .

بما أن  $-x + 2y - 1 < 0$  من أجل  $(0; 0)$  أي أن النقطة  $O$  تحت المستقيم  $(D)$ ، إذن مجموعة حلول المراجعة هي نصف المستوي الذي حده  $(D)$  والذي يشمل المبدأ  $O$ .





### • طريقة التعويض

- لحلّ جملة خطية ذات  $n$  معادلة و  $p$  مجهولا بطريقة التعويض، نتبع الخطوات الآتية:
- نعبّر، في إحدى المعادلات، عن أحد المجهول بدلالة المجهول الأخرى
  - ونعوّض هذا المجهول في المعادلات الأخرى للجملة بالعبارة المحصل عليها.
  - نحصل هكذا على جملة مكافئة ذات  $(n-1)$  معادلة و  $(p-1)$  مجهولا.
  - نكرر تطبيق هذه الطريقة إلى أن نحصل على معادلة من الجملة لا تتضمن أكثر من مجهول واحد ونستنتج مجموعة حلول الجملة.

### تمرين

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

حلّ بطريقة التعويض الجملة:

### حلّ

- نختار المعادلة الثالثة لنعبّر عن  $y$  بدلالة  $x$  و  $z$  فنجد:  $y = 1 - 2x + z$ .
- نعوض  $y$  في المعادلتين الأخرى بالعبارة المحصل عليها فنجد:
 
$$\begin{cases} y = 1 - 2x + z \\ 3x - (1 - 2x + z) + 2z = 2 \\ 4x + 3(1 - 2x + z) - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x + z \\ 5x + z = 3 \\ -2x + z = -1 \end{cases} \text{ أي}$$

- نختار المعادلة الثالثة من الجملة الأخيرة لنعبّر عن  $z$  بدلالة  $x$ ، فنجد:  $z = 2x - 1$ .
- نعوض  $z$  في المعادلة الثانية بالعبارة المحصل عليها فنجد:
 
$$\begin{cases} y = 1 - 2x + z \\ 5x + (2x - 1) = 3 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x + z \\ 7x = 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases} \text{ أي}$$

نلاحظ أن المعادلة الثانية لا تتضمن إلا مجهولا واحدا هو  $x$ .

نجد  $x = \frac{4}{7}$  ونستنتج مجموعة حلول الجملة المعطاة وهي  $S = \left\{ \left( \frac{4}{7}; 0; \frac{1}{7} \right) \right\}$



## • طريقة المقارنة

- لحلّ جملة خطية بطريقة المقارنة:
- نعبر عن أحد المجاهيل بدلالة المجاهيل الأخرى في كلّ المعادلات
  - ثمّ نقارن العبارات المحصل عليها.

تمرين

$$\begin{cases} x - 12y = \frac{3}{4} \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

حلّ بطريقة المقارنة الجملة:

حلّ

$$\begin{cases} x = 12y + \frac{3}{4} \\ x = 1 - 5y \end{cases}$$

نعبر عن  $x$  بدلالة  $y$  في كلّ من المعادلتين ونحصل على الجملة المكافئة:

$$12y + \frac{3}{4} = 1 - 5y$$

$$17y = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{68} \text{ و } x = 1 - 5y = \frac{63}{68}$$

$$S = \left\{ \left( \frac{63}{68}, \frac{1}{68} \right) \right\}$$

إنّ مجموعة حلول الجملة هي

## • طريقة التركيب الخطي

- لحلّ جملة خطية بطريقة التركيب الخطي، نقوم بما يلي:
- نضرب طرفي معادلتين من معادلات الجملة المعطاة في أعداد حقيقية مختارة بشكل يسمح بإبراز معاملين متعاكسين بالنسبة إلى مجهول معيّن في هاتين المعادلتين.
  - نجمع المعادلتين الناتجتين طرفاً إلى طرف للحصول على علاقة بين المجاهيل الأخرى للجملة.
  - نكرر هذه العملية لتعيين الحلول الممكنة للجملة ونتحقق من أنّ الحلول المحصل عليها تحقّق بالفعل كلّ معادلات الجملة.

تمرين

$$\begin{cases} 5x - 17y = -80 \\ -4x + 7y = 31 \end{cases}$$

حلّ بطريقة التركيب الخطي الجملة:

حلّ

بضرب طرفي المعادلة الأولى في 4، وطرفي المعادلة الثانية في 5، نحصل على الجملة المكافئة

$$\begin{cases} 20x - 68y = -320 \\ -20x + 35y = 155 \end{cases}$$



# طرائق

وبجمع المعادلتين الناتجتين طرفاً إلى طرف، نجد:  $y = 5$ .

$$\text{وباستعمال المعادلة } 5x - 17y = -80 \text{ مثلاً، نجد } x = \frac{17 \times 5 - 80}{5} = 1$$

نتحقق من أن الثنائية  $(1; 5)$  حل لكل معادلة في الجملة.

إذن مجموعة حلول الجملة هي  $S = \{(1; 5)\}$ .

## 2. توظيف الجمل الخطية

• كتابة عبارة ناطقة على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة ناطقة  
طريقة

$f(x)$  عبارة ناطقة. لتعيين معاملات عبارة  $f(x)$  المعطاة على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة

ناطقة تتضمن المعاملات  $a, b, c$ :

- نوحّد مقامات العبارة التي تتضمن المجاهيل  $a, b, c$ .
- نطابق بسطها ببسط عبارة  $f(x)$  الأولى.
- نحلّ جملة معادلات ذات المجاهيل  $a, b, c$ .
- نكتب عبارة  $f(x)$  على شكل مجموع عبارة صحيحة وعبارة ناطقة.

تمرين

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-3\}$  بالدستور  $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3}$

عَيّن الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  حيث  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}$

حل

من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-3\}$ ، نكتب:

$$ax + b + \frac{c}{x + 3} = \frac{ax(x + 3) + b(x + 3) + c}{x + 3} = \frac{ax^2 + (3a + b)x + 3b + c}{x + 3}$$

$$\text{إذن } f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3} = \frac{ax^2 + (3a + b)x + 3b + c}{x + 3} \text{ من } \mathbb{R} - \{-3\} \text{ ومنه الجملة:}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 5 \\ 3b + c = -2 \end{cases}$$

وهذا يعني

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 - 3a = 5 - 3 \times 2 = -1 \\ c = -2 - 3b = -2 - 3 \times (-1) = 1 \end{cases}$$

ونجد من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-3\}$ ،  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x + 3}$



# طرائق

• تعيين معادلة لمنحن معرف بنقط منه

طريقة

لتعيين معادلة لمنحن معرف بنقط منه:

- نكتب عبارة الشكل العام لمعادلة المنحنى بدلالة  $x$  و  $y$ .
- نعوض  $x$  و  $y$  في عبارة المعادلة بإحداثيي كل نقطة يشملها المنحنى فنحصل على جملة خطية.
- نحل الجملة الخطية ونكتب العبارة المطلوبة.

تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  التي من أجلها يشمل القطع المكافئ  $(P)$  الذي معادلته  $y = ax^2 + bx + c$  النقط  $A(-1;6)$  و  $B(0;3)$  و  $C(1;2)$ .

حل

$y = ax^2 + bx + c$  هي معادلة للقطع المكافئ  $(P)$ .

النقطة  $A(-1;6)$  تنتمي إلى  $(P)$  يعني  $f(-1) = 6$  أي  $a - b + c = 6$ .

النقطة  $B(0;3)$  تنتمي إلى  $(P)$  يعني  $f(0) = 3$  أي  $c = 3$ .

النقطة  $C(1;2)$  تنتمي إلى  $(P)$  يعني  $f(1) = 2$  أي  $a + b + c = 2$ .

$$\begin{cases} a - b + c = 6 \\ c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

نحصل هكذا على جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل  $a$  و  $b$  و  $c$  وهي

نحل هذه الجملة ونجد  $c = 3$  و  $a = 1$  و  $b = -2$ .

ومنه  $y = x^2 - 2x + 3$  هي معادلة للقطع المكافئ  $(P)$ .

## 3. حل جملة متراجحات خطية

طريقة

لحل جملة متراجحات خطية:

- نبسط كل متراجحة من الجملة.
- في مستو منسوب إلى معلم، نرسم المستقيمت حدود أنصاف المستويات التي تحقق متراجحات الجملة.
- نحدد، بالنسبة إلى كل متراجحة، نصف المستوي الموافق ونشطب النصف الآخر.
- وتتعين مجموعة الحلول، بيانياً، بتقاطع أنصاف المستويات الموافقة.

تمرين

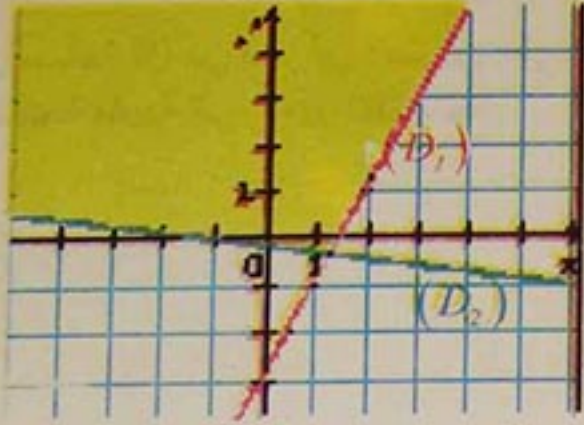
$$\begin{cases} 2x - y - 3 < 0 & (1) \\ x + 7y < -1 & (2) \end{cases}$$

حل الجملة:



حل

1. في المستوي المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نمثل المستقيمين:  
 $(D_1)$  الذي معادلته  $2x - y - 3 = 0$  و  $(D_2)$  الذي معادلته  $x + 7y = -1$



2. نعيّن نصفي المستويين المعيّنين بكلّ من المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  وذلك باختبار إشارة كلّ من  $2x - y - 3$  و  $x + 7y + 1$  عند نقطة غير واقعة على المستقيمين ولنكن النقطة  $O$ .

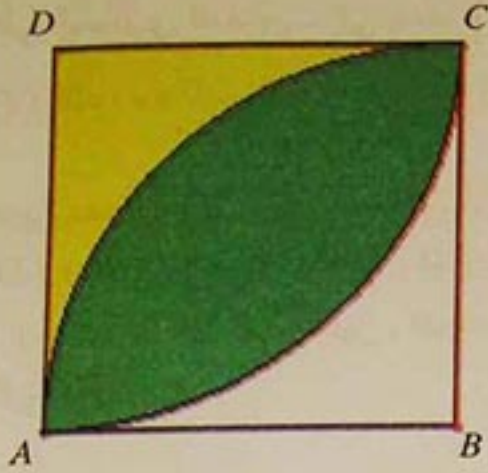
بما أن  $2x - y - 3$  سالب من أجل  $(0; 0)$ ، يكون نصف المستوي الموافق للمترابحة (1) هو نصف المستوي الذي حدّه  $(D_1)$  والذي يشمل  $O$ .

وبالمثل، بما أن  $x + 7y + 1$  موجب من أجل  $(0; 0)$ ، يكون نصف المستوي الموافق للمترابحة (2) هو نصف المستوي الذي حدّه  $(D_2)$  والذي لا يشمل  $O$ .

3. مجموعة حلول الجملة هي تقاطع نصفي المستويين السابقين (الجزء المظلل على الشكل).



# مسألة محلولة



**مسألة**  
يمثل الشكل المقابل مربعا  $ABCD$  ضلعه  $8\text{ cm}$ .  
نرسم بداخله ربعي دائرتين مركزاهما  $B$  و  $D$  ونصف قطر كل منهما  $8\text{ cm}$ .

عين مساحة كل من الجزأين الملونين على الشكل.  
أعط قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  لكل منهما.

**حل**  
• اختيار المجاهيل وتربيض المشكلة

ليكن  $x$  و  $y$  مساحتي الجزأين الملونين على الترتيب بالأصفر والأخضر معبر عنهما بالسنتيمترات المربعة.

مساحة المربع  $ABCD$  تساوي  $2x + y$  (باعتبار المستقيم  $(AC)$  محور تناظر للشكل).  
ومنه  $2x + y = 64$

مساحة ربع الدائرة الذي مركزه  $D$  والمحدود بالضلعين  $[DA]$  و  $[DC]$  يساوي  $x + y$ .  
ومنه  $x + y = \frac{1}{4}(64\pi)$  أي  $x + y = 16\pi$

• حل المشكلة

$$\begin{cases} 2x + y = 64 \\ x + y = 16\pi \end{cases} \text{ حل المشكلة يزول إلى حل الجملة :}$$

بضرب طرفي المعادلة الثانية في  $-1$  والجمع مع الأولى طرفا إلى طرف، نجد:  $x = 64 - 16\pi$   
أي  $x = 16(4 - \pi)$

وبتعويض هذه القيمة في المعادلة الثانية، نجد:  $y = 16\pi - 16(4 - \pi)$   
ومنه  $y = 32(\pi - 2)$

• الإجابة

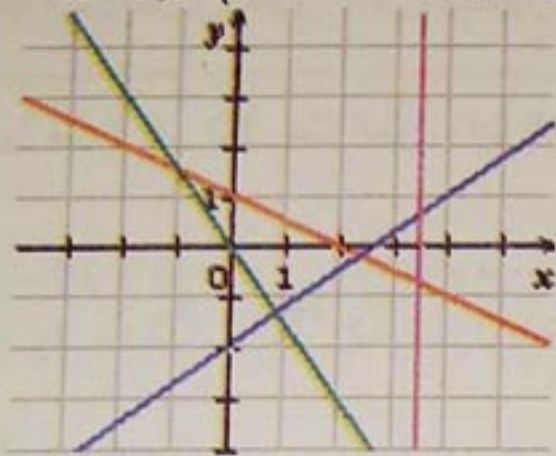
المساحة المضبوطة للجزء الملون بالأصفر هي  $16(4 - \pi)\text{ cm}^2$  و  $13,73\text{ cm}^2$  قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  لها.  
المساحة المضبوطة للجزء الملون بالأخضر هي  $32(\pi - 2)\text{ cm}^2$  و  $36,53\text{ cm}^2$  قيمة مقربة إلى  $10^{-2}$  لها.



المعادلات الخطية لمجهولين

2. أرفق كل مستقيم ممثل على الشكل الآتي بمعادلته:

(أ)  $x + 2y = 2$  (ب)  $-3x - 2y = 0$   
 (ج)  $3x - 4y = 8$  (د)  $x = 3,5$



3. ارسم في المستوي المنسوب إلى معلم المستقيم

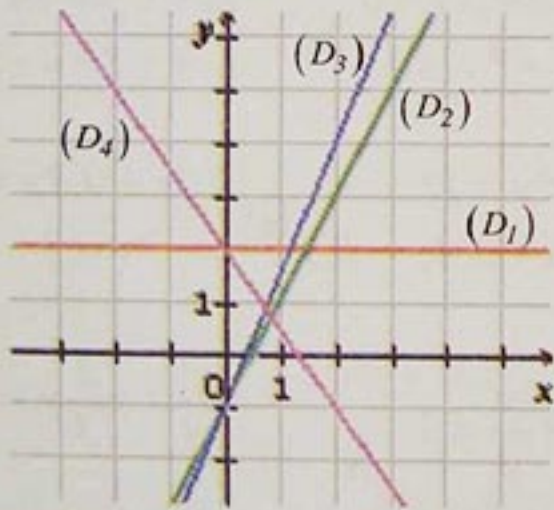
$(D_1)$  الذي معادلته  $y = -x + 1$  ثم المستقيم  $(D_2)$

الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

4. إحدى المستقيمات الممثلة أدناه ليس لها معادلة في

القائمة الآتية، عيّن هذا المستقيم:

(أ)  $y = 2$  (ب)  $y = 2x - 1$  (ج)  $y = 2,5x - 1$



5. عيّن في كل حالة الوضع النسبي للمستقيمين ثم

مثلها في المستوي المنسوب إلى معلم.

(أ)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 : (D_1)$   $4x + 3y = 12 : (D_2)$

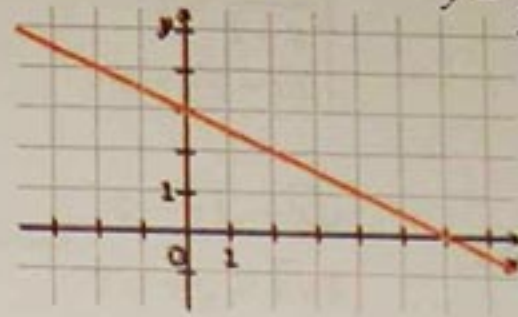
(ب)  $y = -x + 2 : (D_1)$   $x = -2 : (D_2)$

(ج)  $x - 2y = 5 : (D_1)$   $-2x + 4y = 10 : (D_2)$

1. صحيح أو خاطئ

(أ) معادلة المستقيم  $(D)$  المرسوم أدناه هي:

$y = \frac{1}{2}x + 3$

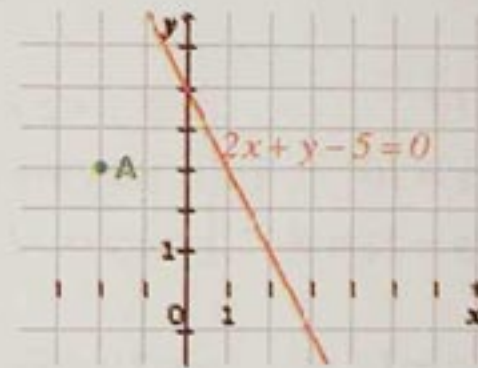


(ب) المستقيمان  $(D_1)$  و  $(D_2)$  اللذان معادلتاهما

$y = 3x + 2$  و  $y = -\frac{1}{3}x - 1$  على الترتيب  
مقاطعان.

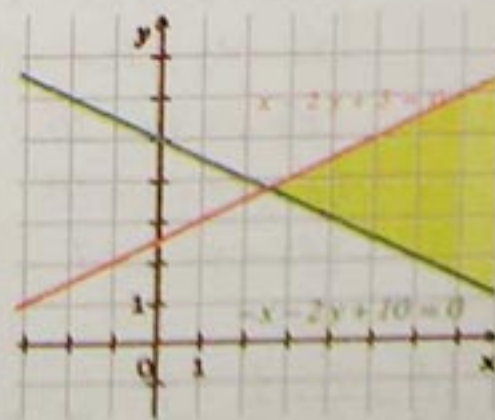
(ج) الجملة  $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$  تقبل حلا وحيدا.

(د) إحداثيا النقطة  $A$  على البيان أدناه يحققان  
 $2x + y - 5 < 0$



(هـ) الجزء الملون بالأصفر على البيان أدناه معرف بالجملة:

$\begin{cases} x - 2y + 5 < 0 \\ -x - 2y + 10 < 0 \end{cases}$





16. حلّ الجملة الآتية بعد كتابتها على شكل جملة خطية لمعادلتين بمجهولين:

$$\begin{cases} \frac{y+1}{x-1} = 1 \\ 2x-3y = 5 \end{cases}$$

17. نعتبر الجملة (S)  $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$

- (أ) هل الجملة (S) جملة خطية؟  
 (ب) لتكن (S') الجملة الناتجة بوضع  $X = \sqrt{x}$  و  $Y = \sqrt{y}$  في الجملة (S). هل (S') جملة خطية؟  
 (ج) حلّ (S') واستنتج الحلول الممكنة للجملة (S).

جمل ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل

في التمارين من 18 إلى 20، حلّ الجمل ذات المجاهيل x و y و z.

$$\begin{cases} x-y=13 \\ x+y-z=10 \\ 2x-10y-3z=3 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+z=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \text{18. (أ)}$$

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+2y+2z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 3x+y-2z=3 \\ x+y=1 \end{cases} \quad \text{19. (أ)}$$

$$\begin{cases} -3x+2y-z=26 \\ -2x+3y+2z=22 \\ 5x-4y+3z=-50 \end{cases} \quad \text{20. (أ)}$$

$$\begin{cases} x+y+4z=10 \\ x+4y+z=13 \\ 4x+y+z=1 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

21. نعتبر الجملة (S)  $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ 2x-3y-2z=23 \end{cases}$

(1) نضع  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = t$

6. المستوي مزود بمعلم. هل النقط الآتية تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته  $y = 3x - 2$ ؟  
 $D(-2;8) ; C(2;4) ; B(-1;1) ; A(1;1)$

جمل معادلتين خطيتين ذات مجهولين

في التمارين من 7 إلى 13، حلّ الجمل ذات المجهولين x و y.

$$\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 5x+2y=-1 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \quad \text{7. (أ)}$$

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ -3x+y=3 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \quad \text{8. (أ)}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ 4x+y=2 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 2x=2 \\ -3x+y=-1 \end{cases} \quad \text{9. (أ)}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x+4y=2 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 3x-y=5 \\ x+2y=-3 \end{cases} \quad \text{10. (أ)}$$

$$\begin{cases} -2x+5y=0 \\ 3x-7y=0 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 2x+y=24 \\ -x+3y=-5 \end{cases} \quad \text{11. (أ)}$$

$$\begin{cases} 6x+3y=12 \\ -0,2x+0,4y=0,1 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 0,1x+0,3y=1 \\ x-3y=3 \end{cases} \quad \text{12. (أ)}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ -x+3y=0 \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{13. (أ)}$$

14. نفس السؤال.

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+y=-1 \\ x-\sqrt{2}y=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad \begin{cases} 3x\sqrt{2}+2y=3\sqrt{2} \\ x-2y\sqrt{3}=1 \end{cases} \quad \text{15. (أ)}$$

15. نفس السؤال.

$$\begin{cases} 24x+71y=-469 \\ 2x+116y=-1250 \end{cases}$$

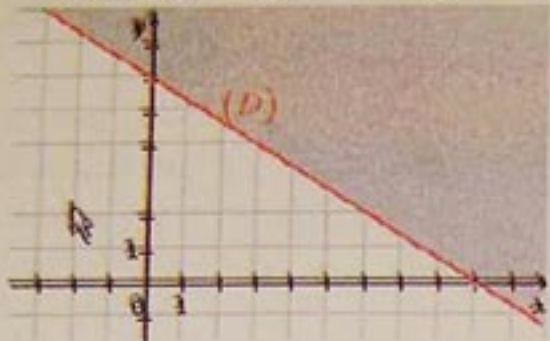


28. حلّ بيانيا المتراجحة  $\frac{4}{3}x + 2y \leq 1$

29. نفس السؤال.

$$y < x$$

30. (D) مستقيم معادلته  $2x + 3y = 18$



عين المتراجحة التي تعرف الجزء غير الملون على الشكل.

### جمل متراجحات خطية

المستوي مزود بمعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

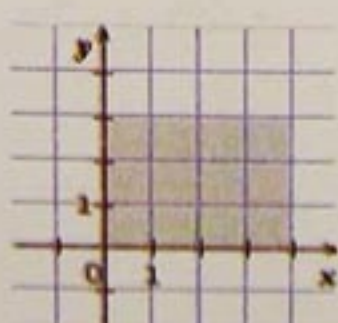
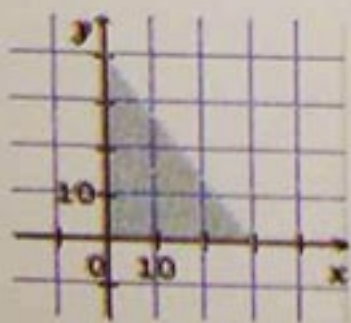
عين فيما يلي الجزء من المستوي المعرف بكلّ جملة.

31. (أ)  $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \geq 2 \end{cases}$  (ب)  $\begin{cases} x - 2y \leq 7 \\ x + 3y < 2 \end{cases}$

32. (أ)  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$  (ب)  $\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ x + y \leq 6 \end{cases}$

33. (أ)  $\begin{cases} x \leq y \\ x + y \leq 0 \\ y \geq -2 \end{cases}$  (ب)  $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \\ x - y - 2 < 0 \end{cases}$

34. عرف كلّ جزء ملون من المستوي بجملة متراجحات خطية.



### مسائل

35. أوجد عددين طبيعيين حيث مجموعها هو 298 وفرقهما هو 148.

عبر بدلالة  $z$  عن المجاهيل  $x$  و  $y$  و  $z$ .  
2) اكتب بدلالة  $z$  المعادلة  $2x - 3y - 2z = 23$   
استنتج قيمة  $z$  ثم مجموعة حلول الجملة (S).

22. لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 4$$

عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

23. ليكن ثلاثي الحدود  $P(x) = x^3 - 7x - 6$

احسب  $P(1)$  ثم استنتج أن

أعداد حقيقية يطلب تعيينها. حيث  $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

24. المستوي مزود بمعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

عين المعادلة  $y = ax^2 + bx + c$  للقطع المكافئ (C) الذي يمر بالنقط  $A(-1; 10)$  و  $A(5; 0)$  و  $C(2; 1)$ .

25. لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بالدستور

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 4}{x + 1}$$

عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  بحيث

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

### المتراجحات الخطية

المستوي مزود بمعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

26. (1) مثل المستقيم الذي معادلته  $x + 3y = 7$

(2) هل النقطة  $A(1; 2)$  من نصف المستوي المعرف

بالمتراجة  $x + 3y < 7$  ؟

استنتج مجموعة حلول المتراجة  $x + 3y < 7$ .

27. مثل بيانيا مجموعة حلول المتراجة

$$-x + 3y < 2$$

استنتج حلول المتراجة  $-x + 3y \leq 2$



**41.** وُضع مبلغان متناسبان مع العددين 5 و 7 في البنك بفوائد بسيطة: الأول بنسبة قدرها 11% والثاني بنسبة قدرها 9%.  
عَيّن المبلغين علماً أن الرصيد السنوي الإجمالي يساوي 35400 دينار.

**42.** أودع رصيدان بفوائد بسيطة، الأول بنسبة قدرها 16% لمدة 3 أشهر والثاني بنسبة قدرها 20% لمدة 7 أشهر. الرصيدان يجلبان نفس الفائدة.

إذا زدنا كل رصيد بمبلغ 1500 دينار تكون نسبتها  $\frac{38}{15}$

احسب الرصيدين والفائدة المشتركة.

**43.** أودع رصيدان متساويان بفوائد مركبة لمدة سنتين: الأول بنسبة قدرها 4% والثاني بنسبة قدرها 6%.  
عند نهاية الإيداع، بلغ الفرق بين الفوائد الناتجة 859,05 ديناراً.  
عين القيمة المشتركة للرصيدين.

**36.** عَيّن عدداً طبيعياً مكتوباً برقمين حيث مجموع رقميه هو 12 وبتبديل رقميه ينقص العدد بـ 18.

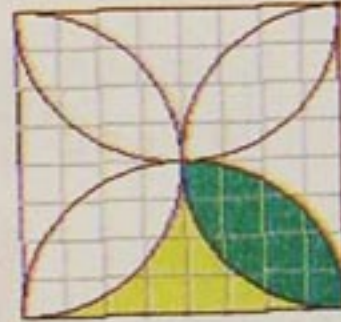
**37.** عَيّن ثلاثة أعداد طبيعية حيث مجموعها هو 100 والقسمة الإقليدية للعدد الثاني على الأول تعطي 3 كحاصل القسمة و 4 كباقي القسمة والقسمة الإقليدية للعدد الثالث على الثاني تعطي 2 كحاصل القسمة و 18 كباقي القسمة.

**38.** اشترى سمير 6 خبزات و 4 حلويات بمبلغ 131 ديناراً ودفعت سعاد عند نفس المخبزة لشراء 5 خبزات و 5 حلويات مبلغ 142,50 ديناراً.  
ما هو سعر كل من الخبزة الواحدة والحلوية الواحدة؟

**39.** ترك أب، عند وفاته، إرثاً قسمه أبناؤه كالتالي:  
- حصة الأول 100 دينار وعشر الباقي.  
- حصة الثاني 200 دينار وعشر الباقي.  
- حصة الثالث 300 دينار وعشر الباقي.  
وهكذا...

وتبين في النهاية أن التقسيم كان بالتساوي بين الأبناء. أوجد عدد الأبناء وحصة كل واحد.

**40.**  $ABCD$  مربع ضلعه  $8\text{ cm}$ . نرسم بداخله أنصاف الدوائر التي أقطارها أضلاع هذا المثلث (الشكل).



احسب مساحة الوردة.

(نضع  $x$  مساحة الجزء الملوّن  
الجزء الملوّن بالأصفر).



1. مفردات الاحتمالات
2. الاحتمالات



جاك برنولي (1654 - 1705)

ظهر حساب الاحتمالات بصورة فعلية في القرن 17 عندما اهتم علماء الرياضيات، منهم بسكال (Pascal) و فيرما (Fermat) و بعدهما هيكنز (Huygens) و برنولي (Bernoulli) بدراسة الظواهر العشوائية من خلال ألعاب الحظ ثم تطور تطورا معتبرا في القرن 19 ليوظف في العلوم الاجتماعية والعلوم الفيزيائية وحاليا في كل الميادين مثل البحث الطبي.

ويعتبر جاك برنولي أول من عبر رياضيا على أن "كلما كررنا تجربة عشوائية عددا كبيرا من المرات، كلما اقترب تواتر حادثة من احتمال تحققها". وهو ما يسمى "قانون الأعداد الكبيرة".



## استبيان متعدد الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة.

| السؤال   | إجابة 1   | إجابة 2 | إجابة 3 |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|--|---|---------|---------|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| بعد رمي زهر نرد مزيف 200 مرة ، سجل ، في الجدول التالي، عدد مرات ظهور كل وجه.   | <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>40</td> <td>36</td> <td>28</td> <td>35</td> <td>31</td> </tr> </table> |         |         | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 30 | 40 | 36 | 28 | 35 | 31 |
| 1  | 2   | 3       | 4       | 5  | 6  |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 30   | 40  | 36      | 28      | 35 | 31 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| بالاعتماد على هذا الجدول، اجب عن الأسئلة من 1 إلى 4.   |   |         |         |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 1. النسبة المئوية لظهور رقم زوجي هي...   | 50 %  | 49,5 %  | 50,5 %  |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 2. النسبة المئوية لظهور رقم فردي هي...   | 50 %  | 49,5 %  | 50,5 %  |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 3. النسبة المئوية لظهور رقم أكبر أو يساوي 4 هي ...   | 41 %  | 50 %    | 47 %    |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 4. الرقم الذي يظهر أكثر هو....   | زوجي  | 6       | 2       |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 30 % من منخرطي نادي شباب، يمارسون رياضة. من بين هؤلاء الرياضيين % 15 يمارسون كرة السلة و% 20 يمارسون كرة اليد و% 5 يمارسون كرة السلة وكرة اليد في نفس الوقت. |   |         |         |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| بالاعتماد على المعطيات السابقة، اجب عن الأسئلة من 5 إلى 8.   |   |         |         |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 5. نسبة ممارسي كرة السلة هي...   | 4,5 %   | 50 %    | 15 %    |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 6. نسبة المنخرطين الذين لا يمارسون أية رياضة هي ...  | 70 %  | 65 %    | 30 %    |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 7. نسبة ممارسي الرياضة ما عدا كرة السلة و كرة اليد هي...   | 65 %  | 21 %    | 19,5 %  |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
| 8. نسبة المنخرطين الذين يمارسون كرة السلة ولا يمارسون كرة اليد هي...   | 3 %   | 10 %    | 4,5 %   |    |    |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |



# أنشطة تمهيدية

## نشاط 1: الحوادث

نضع في علبة 10 كريات من نفس اللون، مرقمة من 21 إلى 30. نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية ونسجل رقمها.

(1) عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية.

(2) نعتبر الحادثتين:

- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 "
  - " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 4 "
- عين مجموعة إمكانيات كل من هاتين الحادثتين.

(3) عين مجموعة إمكانيات كل من الحادثتين التاليتين.

- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد "
- " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4 "

## نشاط 2: الاحتمال والجدول الإحصائي

يتكون قسم من 30 تلميذا منهم 9 ذكور و 9 إناث مسجلين في النظام نصف الداخلي و 3 ذكور و 9 إناث مسجلين في النظام الخارجي.

(1) أنجز جدول توزيع تواترات تلاميذ هذا القسم في شكل نسب مئوية وهذا حسب الجنس ونظام التسجيل.

(2) يسأل أستاذ الرياضيات أحد أفراد القسم عشوائيا.

(أ) أشرح لماذا توجد 4 إمكانيات (حظوظ) من 10 لأن يكون هذا الفرد ذكرا. نقول إن الاحتمال أن يكون الفرد ذكرا يساوي 0,4.

(ب) ما هو الاحتمال أن يكون هذا الفرد أنثى؟

(ج) ما هو الاحتمال أن يكون هذا الفرد خارجيا؟

(د) ما هو الاحتمال أن يكون هذا الفرد ذكرا وخارجيا؟

(هـ) ما هو الاحتمال أن يكون هذا الفرد أنثى وخارجية؟

(3) (أ) أحسب نسبة الذكور الخارجيين.

(ب) يسأل الأستاذ أحد الذكور عشوائيا.

أشرح لماذا توجد إمكانية (حظ) واحدة من 4 لكي يكون هذا التلميذ خارجيا.

استنتج الاحتمال أن يكون هذا التلميذ خارجيا.

## نشاط 3: قانون احتمال

1. التجربة

ارم، في آن واحد، قطعتين نقديتين 10 مرات متتالية ثم سجل النتائج المحصل عليها حيث:

- " 0 " يمثل الحادثة: " لا يظهر الوجه "

- " 1 " يمثل الحادثة: " يظهر الوجه مرة واحدة "

- " 2 " يمثل الحادثة: " يظهر الوجه مرتين "



# أنشطة تمهيدية

|                     | الرمية 1 | الرمية 2 | الرمية 3 | الرمية 4 | الرمية 5 | الرمية 6 | الرمية 7 | الرمية 8 | الرمية 9 | الرمية 10 |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| عدد مرات ظهور الوجه |          |          |          |          |          |          |          |          |          |           |

2. توزيع التواترات

(أ) ما هي التواترات  $f_0$  ،  $f_1$  ،  $f_2$  للحوادث " 0 " ، " 1 " ، " 2 " ؟

(ب) احسب  $f_0 + f_1 + f_2$  .

3. المحاكاة

نستعمل الجدول إكسال لإنجاز المحاكاة المتعلقة بالتجربة السابقة.

(أ) - تحقق أنه، للحصول بطريقة عشوائية على رقم من الأرقام الثلاثة: 0 ، 1 ، 2 ، نستعمل الدستور

" =ENT(ALEA()+0,5)+ENT(ALEA()+0,5) "

- أنجز هذه المحاكاة بالنسبة إلى 200 رمية.

- احسب التواترات  $f_0$  ،  $f_1$  ،  $f_2$  في هذه الحالة.

- أعد المحاكاة باستعمال اللمسة F9 عدة مرات.

(ب) ما هي القيم التي تتذبذب حولها كل من التواترات  $f_0$  ،  $f_1$  ،  $f_2$  ؟



- إمكانية تجربة عشوائية هي أية نتيجة ممكنة لهذه التجربة.
- مجموعة الإمكانيات هي مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة. نرسم إليها عادة بالحرف  $\Omega$ .

**مثال**

رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة (1, 2, 3, 4, 5, 6).  
إذن  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

• **الحادثة**

**تعريف**

نسمى حادثة كل جزء من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية أي مجموعة النتائج التي تتميز بنفس الخاصية.

**مثال**

A هي الحادثة: "الحصول على وجه رقمه فردي" عند رمي زهر النرد، إذن  $A = \{1; 3; 5\}$ .

• **الحوادث الخاصة**

• **الحادثة الأكيدة**

هي  $\Omega$  أي مجموعة كل النتائج الممكنة.

• **الحادثة المستحيلة**

هي  $\emptyset$  المجموعة الخالية (لا تحتوي على أية إمكانية).

• **الحادثة البسيطة**

هي حادثة متكونة من نتيجة واحدة. فهي مجموعة أحادية.

**مثال**

الحوادث البسيطة لرمي زهر النرد هي:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ .

• **تقاطع حادثتين**

**تعريف**

نسمى تقاطع الحادثتين A و B ونرمز إليه بـ  $A \cap B$  الحادثة المتكونة من النتائج المشتركة للحادثتين.

**مثال**

في تجربة رمي زهر النرد، الحادثة  $A = \{2; 4; 6\}$  هي الحادثة: "الحصول على وجه رقمه زوجي" والحادثة

$B = \{3; 6\}$  هي الحادثة: "الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 3" وبالتالي الحادثة  $A \cap B$  هي

الحادثة: "الحصول على وجه رقمه زوجي ومضاعف للعدد 3" وهي  $A \cap B = \{6\}$ .



# معارف

## • الحادثتان المنفصلتان (غير المتلامتين) تعريف

نسمي حادثتين منفصلتين (أو غير متلامتين)  $A$  و  $B$  الحادثتين اللتين لا يشتركان في أي نتيجة .  
أي  $A \cap B = \emptyset$

### مثال

$A$  هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه فردي" و  $B$  هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 4" عند رمي زهر النرد، فإن  $A = \{1; 3; 5\}$  و  $B = \{4\}$  و بالتالي  $A \cap B = \emptyset$ . إذن  $A$  و  $B$  منفصلتان.

## • اتحاد حادثتين تعريف

### تعريف

نسمي اتحاد الحادثتين  $A$  و  $B$  ونرمز له  $A \cup B$  الحادثة المتكونة من نتائج الحادثة  $A$  أو نتائج الحادثة  $B$ .

### مثال

عند رمي زهر النرد،  $A$  هي الحادثة: " الحصول على وجه زوجي" و  $B$  هي الحادثة: " الحصول على وجه أكبر أو يساوي العدد 3"، فيكون  $A = \{2; 4; 6\}$  و  $B = \{3; 4; 5; 6\}$  و منه  $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ .

## • الحادثة المعاكسة تعريف

### تعريف

نسمي الحادثة المعاكسة لحادثة  $A$ ، ونرمز لها  $\bar{A}$  (نقرأ " لا  $A$  ")، مجموعة النتائج التي لا تنتمي إلى  $A$ .

### مثال

في تجربة رمي زهر النرد،  $A$  هي الحادثة: " الحصول على وجه رقمه زوجي" يعني  $A = \{2; 4; 6\}$ ، فتكون الحادثة المعاكسة لها هي  $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ .

## 2. الاحتمالات

### • قانون الاحتمال

لتكن  $\Omega$  مجموعة ذات  $n$  إمكانية لتجربة عشوائية:  $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n\}$ . يعرف قانون احتمال  $p$  على  $E$  بإرفاق كل إمكانية  $x_i$  بعدد موجب  $p_i$  حيث مجموع الأعداد  $p_i$  يساوي 1.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ و } p_i \leq 1 \text{ مع}$$

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ..... | $x_i$ | ..... | $x_n$ |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ..... | $p_i$ | ..... | $p_n$ |

### مثال

العدد  $p_i$  هو احتمال وقوع الإمكانية  $x_i$ .



## • قانون متساوي الاحتمال

### تعريف

لتكن  $\Omega$  مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال، نقول إن قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو متساوي الاحتمال.  
بمعنى:

إذا كان  $n$  عدد عناصر  $\Omega$ ، فإن احتمال وقوع كل عنصر  $x_i$  من  $\Omega$  هو:  $p_i = \frac{1}{n}$ .

### ملاحظة

بعض التعبيرات تدل على وضعية متساوية الاحتمال:

- نختار بصفة عشوائية.
- نرمي قطعة نقدية متوازنة.
- نرمي زهر نرد غير مزيف.
- القريصات أو الكرات الموجودة داخل كيس لا نفرق بينها عند اللمس.

### أمثلة

- عند رمي قطعة نقدية متوازنة، فإن احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي  $\frac{1}{2}$ .
- عند رمي زهر نرد غير مزيف ذي 6 أوجه، فإن احتمال الحصول على أحد الأوجه هو  $\frac{1}{6}$ .
- نقبل أن الاحتمال أن تعطي الوظيفة ENT(ALEA)\*10 لمجدول أحد الأرقام من 0 إلى 9 يساوي  $\frac{1}{10}$ .

### نظرية

$\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n\}$  مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية معرف عليها قانون الاحتمال  
 $p: x_i \rightarrow p_i$

في حالة قانون متساوي الاحتمال على مجموعة  $\Omega$  وإذا كانت  $A$  حادثة من  $\Omega$ ، فإن احتمال  $A$  يساوي حاصل قسمة عدد عناصر  $A$  على عدد عناصر  $\Omega$ .

أي، إذا كان  $a$  عدد عناصر  $A$  و  $n$  عدد عناصر  $\Omega$  فإن  $p(A) = \frac{a}{n}$ .

### برهان

لدينا  $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_i; \dots; x_n\}$  و  $p(x_i) = \frac{1}{n}$ .

إذا كان عدد عناصر  $A$  هو  $a$  فإن  $p(A) = a \times \frac{1}{n} = \frac{a}{n}$ .

### ملاحظات

- نسمي عناصر الحادثة  $A$  الحالات المواتية (أو الملائمة) لهذه الحادثة وعناصر  $\Omega$  الحالات الممكنة.
- تسمى النظرية السابقة أيضا قانون لبلاس (Laplace).



أمثلة

- نرمل زهر نرد متوازن ونعتبر الحادثة  $A$ : " الحصول على وجه رقمه زوجي " و الحادثة  $B$ : " الحصول على وجه رقمه أكبر أو يساوي العدد 3 ".  
لدينا  $B = \{3; 4; 5; 6\}$ ،  $A = \{2; 4; 6\}$ ،  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
ومنه  $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$  و  $p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- قسم متكون من 12 بنتا و 20 ولدا.  
نختار تلميذا من القسم بصفة عشوائية، فيكون احتمال الحصول على بنت هو  $\frac{12}{32}$  أي  $\frac{3}{8}$ .

• الاحتمال والحوادث

■ توزيع التواترات وقانون الاحتمال

عند القيام بدراسة لمجتمع، نحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة. إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد هذا المجتمع، نقبل أن توزيع التواترات يمثل قانون الاحتمال للتجربة العشوائية.

من أجل كل نتيجة  $x_i$ ، لدينا  $p_i = f_i$

مثال

تحتوي علبة على كرات ملونة ومن نفس الشكل. يتوزع تواتر الألوان كما يلي:

|               |      |      |      |      |                |
|---------------|------|------|------|------|----------------|
| اللون $x_i$   | أبيض | أحمر | أسود | أخضر | $\sum f_i = 1$ |
| التواتر $f_i$ | 0,35 | 0,40 | 0,15 | 0,10 |                |

نسحب إحدى الكرات بصفة عشوائية.  
الاحتمال أن تكون هذه الكرة سوداء هو 0,15.

■ احتمال حادثة

تعريف

لتكن  $\Omega$  مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال و  $A$  حادثة.  
احتمال الحادثة  $A$  هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

مثال

النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف عددا كبيرا من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعروف كما يلي:

|       |               |                |                |               |                |               |
|-------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| $x_i$ | 1             | 2              | 3              | 4             | 5              | 6             |
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |

احتمال الحصول على رقم زوجي يساوي  $p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$  أي  $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

إن  $p(\{2; 4; 6\}) = \frac{2}{3}$



## خواص

- بما أن الاحتمال  $p(A)$  لحادثة  $A$  هو مجموع جزئي للاحتمالات  $p_i$  وبما أن المجموع الكلي لهذه الاحتمالات يساوي 1، إذن  $p(A)$  هو عدد محصور بين 0 و 1، أي  $0 \leq p(A) \leq 1$ .
- احتمال الحادثة المستحيلة منعدم:  $p(\emptyset) = 0$ .
- احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1:  $p(\Omega) = 1$ .
- إذا كان  $A$  و  $B$  حادثتين من نفس المجموعة  $\Omega$  فإن:
 
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

## برهان

نفرض أن  $A = \{x_1; x_2; x_3\}$  و  $B = \{x_2; x_3; x_4; x_5\}$   
 لدينا  $A \cap B = \{x_2; x_3\}$  و  $A \cup B = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\}$   
 منه

$$p(A \cup B) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5) \quad (1)$$

$$p(A) + p(B) - p(A \cap B) = [p(x_1) + p(x_2) + p(x_3)] + [p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5)] - [p(x_2) + p(x_3)]$$

$$= p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) + p(x_5) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$   
 إذن المساواة محققة في هذه الحالة الخاصة ويمكن البرهان عليها بنفس الطريقة في الحالة العامة.

- إذا كانت الحادثتان  $A$  و  $B$  غير متلائمتين، فإن  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$   
 (لأن  $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$ ).

- $A$  حادثة من المجموعة  $\Omega$  و  $\bar{A}$  الحادثة المعاكسة لها، في هذه الحالة يكون  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

## برهان

بما أن  $\bar{A}$  معاكسة للحادثة  $A$  فإن  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  و  $A \cup \bar{A} = \Omega$   
 منه  $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega) = 1$  أي  $p(A) + p(\bar{A}) = 1$  أي  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



## 1. تعيين قانون احتمال لتجربة عشوائية طريقة

لتعيين قانون احتمال لتجربة عشوائية يمكن الاعتماد على وضعية متساوية الاحتمال.

### تمرين

نرمي زهري النرد و نهتم بالمجموع المحصل عليه.  
عين قانون الاحتمال المرفق بهذه التجربة العشوائية.

### حل

عند رمي زهري النرد نحصل على ثنائية من الأرقام من 1 إلى 6.

| الزهري 1 \ الزهري 2 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---------------------|---|---|---|----|----|----|
| 1                   | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2                   | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3                   | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4                   | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5                   | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6                   | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

يمثل الجدول المقابل المجموع المحصل عليه بالنسبة إلى كل ثنائية من الثنائيات الممكنة.

فمثلا الثنائية (3;4) تعطي المجموع

$$. 3 + 4 = 7$$

يوجد 36 ثنائية ولكل منها نفس احتمال الظهور، إذن مجموعة الثنائيات مزودة بقانون متساوي الاحتمال.

المجموع المحصل عليه هو عنصر من المجموعة:  $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$

الثنائيات الثلاث (1;3)، (2;2)، (3;1) تعطي المجموع 4. إذن  $p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

الثنائيات الخمس (1;5)، (2;4)، (3;3)، (4;2)، (5;1) تعطي المجموع 6. إذن  $p(6) = \frac{5}{36}$

وهكذا نستنتج قانون الاحتمال التالي:

| المجموع $x_i$  | 2              | 3              | 4              | 5             | 6              | 7             | 8              | 9             | 10             | 11             | 12             |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| الاحتمال $p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

يمكن التحقق أن المجموع  $(\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36})$  يساوي 1.

### ملاحظة

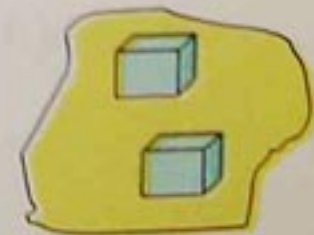
في هذا المثال توجد مجموعتان مزودتان بقانوني احتمال.

|    |    |   |
|----|----|---|
| 2  | 3  | 6 |
| 4  | 5  | 7 |
| 10 | 8  |   |
| 11 | 12 |   |

مجموعة المجاميع مزودة بقانون غير متساوي الاحتمال

|       |     |
|-------|-----|
| (1;3) |     |
| (5;3) |     |
| (4;2) | ... |

مجموعة الثنائيات مزودة بقانون متساوي الاحتمال.



الوضعية



# طرائق

## 3. حساب احتمال حادثة باعتماد جدول تواترات

### طريقة

- لحساب احتمال حادثة اعتمادا على جدول تواترات نتبع الطريقة التالية:
- نعين الاحتمال بالقراءة المباشرة على الجدول للتواتر المناسب.
  - أو نجز جدولاً جزئياً يعطي التواتر المستهدف.

### تمرين

يمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية حسب الجنس وسنة التمدرس.

| المستوى \ الجنس | 1 ثا | 2 ثا | 3 ثا | المجموع |
|-----------------|------|------|------|---------|
| ذكور (%)        | 23   | 14   | 11   | 48      |
| إناث (%)        | 19   | 17   | 16   | 52      |
| المجموع         | 42   | 31   | 27   | 100     |

1. نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية. ما هو الاحتمال أن يكون :
  - ذكرا ؟
  - تلميذا في السنة الثالثة ؟
  - ذكرا في السنة الثانية ؟
2. نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية. ما هو الاحتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى ؟
3. نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية. ما هو الاحتمال أن يكون أنثى ؟

### حل

1. نقرأ في الجدول أن :
  - 48 % من التلاميذ هم ذكور. إذن الاحتمال أن يكون التلميذ ذكرا هو 0,48.
  - 27 % من التلاميذ هم في السنة الثالثة. إذن الاحتمال أن يكون التلميذ في السنة الثالثة هو 0,27.
  - الذكور في السنة الثانية يمثلون 14 % من مجموع تلاميذ الثانوية ، إذن الاحتمال أن يكون التلميذ ذكرا في السنة الثانية هو 0,14.

2.

| المستوى \ الجنس | 1 ثا | 2 ثا | 3 ثا | المجموع |
|-----------------|------|------|------|---------|
| إناث (%)        | 19   | 17   | 16   | 52      |
|                 | 36,5 | 32,7 | 30,8 | 100     |

$\times \frac{100}{52}$

36,5 % من الإناث هن في السنة الأولى، إذن الاحتمال أن تكون البنت، تلميذة من السنة الأولى هو 0,365.



| المستوى  | 1 ثا |      |
|----------|------|------|
| الجنس    |      |      |
| ذكور (%) | 23   | 54,8 |
| إناث (%) | 19   | 45,2 |
| المجموع  | 42   | 100  |

$\times \frac{100}{42}$

45,2% من تلاميذ السنة الأولى هم إناث. إذن الاحتمال أن يكون تلميذ من السنة الأولى أنثى هو 0,452.

#### 4. حساب احتمال حادثة باعتماد قانون احتمال

##### طريقة

لحساب احتمال حادثة اعتمادا على قانون احتمال، نعيّن الإمكانات (النتائج) التي تتكون منها هذه الحادثة ثم نطبق قانون لبلاس أو إحدى خواصه.

$A$ ،  $B$  حادثتان.

- الحادثة " $A$  و  $B$ " تعني أن كلا من نتائجها مواتية (ملائمة) للحادثتين  $A$  و  $B$  في آن واحد، فهي تنتمي إلى تقاطع الحادثتين.

- الحادثة " $A$  أو  $B$ " تعني أن كلا من نتائجها مواتية (ملائمة) للحادثة  $A$  أو للحادثة  $B$  (أو للحادثتين معا)، فهي تنتمي إلى اتحاد الحادثتين.

##### تمرين

أنجزت دراسة إحصائية حول ظهور كل رقم من الأرقام 0، 1، 2، 3، ...، 9 في الأسعار المسجلة في دكان للمواد الغذائية. نقبل أن هذه الدراسة سمحت بإنشاء قانون الاحتمال التالي على المجموعة  $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$  للنتائج الممكنة عندما نسحب بصفة عشوائية أحد الأرقام لأحد الأسعار المسجلة.

|       |     |     |      |      |      |      |      |      |      |     |
|-------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| $x_i$ | 0   | 1   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9   |
| $p_i$ | 0,3 | 0,1 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,12 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,3 |

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

- $A$ : "الرقم المحصل عليه فردي".
- $B$ : "الرقم المحصل عليه مضاعف للعدد 3".
- $C$ : "الرقم المحصل عليه فردي و مضاعف للعدد 3".
- $E$ : "الرقم المحصل عليه فردي أو مضاعف للعدد 3".
- $F$ : "الرقم المحصل عليه ليس مضاعفا للعدد 3".



حل

• لدينا  $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

إن

$$p(A) = p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 \\ = 0,1 + 0,03 + 0,12 + 0,03 + 0,3 = 0,58$$

• لدينا  $B = \{0; 3; 6; 9\}$

إن

$$p(B) = p_0 + p_3 + p_6 + p_9 \\ = 0,3 + 0,03 + 0,03 + 0,3 = 0,66$$

• لدينا  $C = A \cap B = \{3; 9\}$

إن

$$p(C) = 0,03 + 0,3 = 0,33$$

• لدينا  $E = A \cup B$

إن

$$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

أي

$$p(F) = 0,58 + 0,66 - 0,33 = 0,91$$

ملاحظة

يمكن أيضا حساب  $p(E)$  بتعيين عناصر الحادثة  $E$  حيث  $E = \{0; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$ .

▪  $F$  هي الحادثة « الرقم المحصل عليه ليس مضاعفا للعدد 3 ».

إن  $F$  هي الحادثة المعاكسة للحادثة  $B$  أي أن  $F = \bar{B}$ .

نستنتج أن  $p(F) = p(\bar{B}) = 1 - p(B)$

أي  $p(F) = 1 - 0,66 = 0,33$ .

ملاحظة

يمكن أيضا حساب  $p(F)$  بتعيين عناصر الحادثة  $F$



# مسألة محلولة

نرمي زهر نرد رباعي الوجوه حيث تكون هذه الوجوه مرقمة من 1 إلى 4 ونسجل رقم الوجه الذي سقط عليه زهر النرد.

1. أ) اذكر مجموعة الإمكانيات  $\Omega$ .
- ب) اذكر حادثة بسيطة.
- ج) اذكر الحادثة المعاكسة لهذه الحادثة.
2. نسمي  $p_i$  احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم  $i$  حيث  $i$  محصور بين 1 و 4. نعلم أن  $p_1 = 0,16$  ،  $p(\{1;2\}) = 0,42$  ،  $p_3 = 0,21$ .
- أ) احسب  $p_2$  و  $p_4$ .
- ب) احسب احتمال الحادثة  $A = \{2;4\}$ .
- ج) استنتج احتمال الحادثة  $\bar{A}$ .
- د) احسب احتمال الحادثة  $B$ : "الوجه يحمل رقما مساويا 2 على الأقل".

حل

1. أ)  $\Omega = \{1,2,3,4\}$ .
- ب) يمكن اعتبار الحادثة  $E$ : "رقم الوجه مضاعف للعدد 4" أي  $E = \{4\}$ .
- ج) الحادثة المعاكسة للحادثة  $E$  هي الحادثة  $\bar{E}$ : "رقم الوجه ليس مضاعفا للعدد 4" أي  $\bar{E} = \{1;2;3\}$ .

2. أ) الحادثتان  $\{1\}$  و  $\{2\}$  غير متلائمتين. إذن  $p(\{1;2\}) = p(\{1\}) + p(\{2\})$  إذن  $p(\{2\}) = p(\{1;2\}) - p(\{1\}) = 0,42 - 0,16 = 0,26$ .
- ب)  $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = p(\Omega) = 1$

$$p(\{4\}) = 1 - [p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\})]$$

$$p(\{4\}) = 1 - [0,16 + 0,26 + 0,21] = 0,37$$

- ب) الحادثة  $A$  متكونة من الحادثتين البسيطتين  $\{2\}$  و  $\{4\}$ .
- إذن  $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) = 0,26 + 0,37 = 0,63$

$$\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,63 = 0,37$$

د) الطريقة الأولى

- بما أن الحادثة  $B$  هي: "الوجه يحمل رقما مساويا 2 على الأقل" فإن  $B = \{2,3,4\}$  ومنه  $p(B) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = 0,26 + 0,21 + 0,37 = 0,84$

الطريقة الثانية

- بما أن الحادثة  $B$  هي: "الوجه يحمل رقما مساويا إلى 2 على الأقل" فإن الحادثة المعاكسة  $\bar{B}$  هي: "رقم الوجه هو 1" و منه  $p(\bar{B}) = p(\{1\}) = 0,16$  ونستنتج أن:  $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - 0,16 = 0,84$



1. صحيح أو خاطئ

- (أ) الحادثة هي مجموعة من الاحتمالات.  
 (ب) مجموع احتمالات الحوادث البسيطة من  $\Omega$  يساوي 1.  
 (ج) إذا كان تواتر حادثة هو 30% ، فإن احتمال هذه الحادثة هو 0,3.  
 (د) الحادثة البسيطة لا تحتوي على أي إمكانية.  
 (هـ) الحادثة الأكيدة تحتوي على كل الإمكانيات.  
 (و) إذا كان  $p(A) = 0,35$  ، فإن  $p(\bar{A}) = 0,65$  .  
 (ك) إذا كان  $p(B) = \frac{1}{4}$  ، فإن  $p(\bar{B}) = \frac{1}{4}$  .  
 (ل) إذا كان  $p(A) = 0,2$  و  $p(B) = 0,4$  ، فإن  $p(A \cap B) = 0,08$  .  
 (ق) إذا كان  $p(A) = 0,3$  و  $p(B) = 0,4$  ، فإن  $p(A \cup B) = 0,7$  .  
 (ي) إذا كان  $p(\{a\}) = 0,2$  و  $p(\{b\}) = 0,1$  ، فإن  $p(\{a;b\}) = 0,3$  .

الحوادث

2. في رمي قطعة نقدية. عين مجموعة الإمكانيات.  
 3. في رمي زهر نرد. اكتب خمس حوادث تحتوي كل منها على إمكائيتين.  
 4. تحتوي علبة على 7 كرات زرقاء مرقمة من 1 إلى 7.  
 نسحب كرة بصفة عشوائية. ما هي مجموعة الإمكانيات؟  
 5. أوجه زهر النرد مرقمة كما يلي: 1، 1، 1، 2، 3، 3.  
 كم يوجد من الإمكانيات المختلفة؟  
 6. نضع، في كيس، 8 قريصات مرقمة من 1 إلى 8 ثم نسحب قريصة بصفة عشوائية.  
 نعتبر الحادثتين التاليتين:  
 A: " القريصة المسحوبة تحمل رقما فرديا "  
 B: " القريصة المسحوبة تحمل رقما أكبر أو يساوي 3 "  
 .

أجب بصحيح أو خاطئ عن التصريحات التالية:

- (أ)  $A = \{2;4;6;8\}$  .  
 (ب)  $\bar{A} = \{2;4;6;8\}$  .  
 (ج)  $A \cup B = \{2;3;5;7\}$  .  
 (د)  $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4;6;8\}$  .  
 (هـ)  $\overline{A \cap B} = \{2;4;5;6;7;8\}$  .  
 7. نرمي زهر نرد ونعتبر الحادثتين:  
 أ: " الحصول على رقم زوجي "  
 ب: " الحصول على رقم أكبر من أو يساوي 4 "  
 عين كلا من الحادثتين العكسيتين للحادثتين أ و ب.  
 8. نرمي زهر النرد و نعتبر الحادثتين:  
 أ: " الحصول على رقم زوجي "  
 ب: " الحصول على رقم مضاعف للعدد 3.  
 هل الحادثتان أ و ب غير متلائمتين؟ برر إجابتك.  
 9. نرمي زهري نرد و نعتبر الحادثتين:  
 أ: " الحصول على الأقل على الرقم 6 "  
 ب: " الحصول على الأقل على الرقم 1 "  
 هل الحادثتان أ و ب غير متلائمتين؟ برر إجابتك.  
 10. يحتوي كيس على 20 كرة كل منها ملونة بأحد الألوان التالية: أحمر، أسود، أبيض.  
 نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس ونسحب كرة أخرى ونسجل لونها.  
 (1) نهتم بلون الكرتين المسحوبتين دون اعتبار ترتيب اللونين.  
 ما هي مجموعة الإمكانيات المحصل عليها؟  
 (2) يسمح سحب الكرة الحمراء بربح نقطتين، وسحب الكرة السوداء بربح 3 نقط وسحب الكرة البيضاء بربح نقطة واحدة.  
 نهتم بمجموع النقط المحصل عليه.  
 ما هي مجموعة الإمكانيات في هذه الحالة؟  
 11. نعتبر نفس وضعية التمرين السابق.  
 نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ثم نرجعها إلى الكيس ونعيد العملية مرتين.  
 (1) نهتم بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.  
 ما هي مجموعة الإمكانيات المحصل عليها؟  
 (2) نهتم بلون الكرات الثلاث المسحوبة دون اعتبار ترتيب الألوان. ما هي مجموعة الإمكانيات؟



قانون الاحتمال

12. يوجد في علبة عدد كبير من كرات تحمل الألوان: أصفر، أخضر، أسود. نقبل أن أحد القوانين التالية صادق.

| اللون $x_i$      | أصفر          | أخضر          | أسود          |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
| القانون 1: $p_i$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| القانون 2: $p_i$ | 0,3           | 0,6           | 0,1           |
| القانون 3: $p_i$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

تنجز محاكاة ذات 5000 سحب، نتحصل على جدول التكرارات التالي:

| اللون $x_i$ | أصفر | أخضر | أسود |
|-------------|------|------|------|
| التكرارات   | 1660 | 2499 | 841  |

ما هو قانون الاحتمال الذي يمكن اختياره لارتكاب أقل خطأ ممكن؟ علل.

13. تحتوي علبة على 20 كرة حمراء و 15 كرة بيضاء و 13 كرة صفراء. نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية. 1. احسب احتمال كل من الحوادث التالية: (أ) الكرة المسحوبة حمراء. (ب) الكرة المسحوبة بيضاء. (ج) لكرة المسحوبة صفراء..

2. ما هو الاحتمال ألا تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

14. نرسمي زهر نرد غير مزيف.

ما هو الاحتمال أن يكون الرقم المحصل عليه: (1) قاسما للعدد 12؟ (2) قاسما للعدد 15؟

15. تحتوي تجربة عشوائية على 12 حادثة بسيطة متساوية الاحتمال و نرسم إليها ب  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$ .

احسب احتمال كل من:

- حادثة بسيطة.
- الحادثة  $\{x_1; x_2; x_3\}$ .
- الحادثة  $\{x_1; x_4; x_5; x_7; x_9\}$ .
- الحادثة  $\{x_1; x_2; x_3\} \cup \{x_1; x_4; x_5; x_7; x_9\}$ .
- الحادثة  $\{x_1; x_2; x_3\} \cap \{x_1; x_4; x_5; x_7; x_9\}$ .

16. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{8}$$

$p(i)$  هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم  $i$ . احسب  $p(6)$ .

17. نعتبر مجموعة الإمكانات  $\Omega = \{a; b; c; d\}$  وقانون الاحتمال  $p$  المعروف على  $\Omega$ .

$$p(\{a\}) = 0,23$$

$$p(\{b\}) = 0,15, p(\{c\}) = 0,4$$

احسب كلا من:

$$(أ) p(\{d\}) ; (ب) p(\{a; c\}) ; (ج) p(\overline{\{c\}})$$

18. نعتبر  $\Omega = \{a; b; c; d\}$  وقانون الاحتمال  $p$  المعروف على  $\Omega$ .

$$p(\{a\}) = \frac{1}{3}$$

$$p(\{b\}) = \frac{1}{4}, p(\{c\}) = \frac{1}{6}$$

احسب كلا من:

$$(أ) p(\{d\}) ; (ب) p(\{b; c; d\}) ; (ج) p(\overline{\{a; c\}})$$

19. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:

$$p(1) = p(2) = p(3) = k, p(4) = p(5) = 0,1$$

$$p(6) = 0,2$$

$p(i)$  هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم  $i$ .

(1) احسب  $k$ .

(2) احسب احتمال ظهور رقم فردي.

(3) استنتج احتمال ظهور رقم زوجي.



20. نعتبر زهر نرد مزيفا حيث:

$$p(1) = p(5) = k$$

$$p(2) = p(3) = p(4) = 0,14$$

$$p(6) = 0,06$$

(1) احسب  $k$ .

(2) احسب احتمال ظهور مضاعف للعدد 2.

في أي مجال يوجد كل من

الأعداد  $p(1)$ ،  $p(2)$ ،  $p(3)$ ؟

21. ليكن قانون الاحتمال  $p$  المعروف على  $\Omega$ .

نعتبر حادثتين غير متلائمتين  $A$  و  $B$  حيث:

$$p(A) = 0,23 \text{ و } p(B) = 0,38$$

(1) احسب  $p(\bar{A})$  و  $p(\bar{B})$ .

(2) عين  $p(A \cup B)$  و  $p(A \cap B)$ .

22. ليكن قانون الاحتمال  $p$  المعروف على  $\Omega$ .

نعتبر حادثتين  $A$  و  $B$  حيث:

$$p(A) = 0,65 \text{ و } p(B) = 0,48$$

هل يمكن أن تكون  $A$  و  $B$  غير متلائمتين؟

علل.

23. نرمي قطعة نقدية 3 مرات على التوالي.

نعتبر الحادثتين  $A$  و  $B$  المعرفتين كما يلي:

$A$ : " نحصل على الظهر مرة واحدة على الأقل".

$B$ : " نحصل على الوجه مرتين على الأقل".

هل الحادثتان  $A$  و  $B$  غير متلائمتين؟ علل.

24. نعتبر حادثتين  $A$  و  $B$  حيث:

$$p(A \cup B) = 0,78 \text{ و } p(B) = 0,54$$

$$p(A \cap B) = 0,235$$

احسب  $p(A)$ .

25. نعتبر حادثتين  $A$  و  $B$  حيث:

$$p(A \cup B) = 0,257 \text{ و } p(A) = 0,158$$

$$p(A \cap B) = 0,125$$

احسب  $p(\bar{B})$ .

26. نرمي زهر نرد ونسمي  $A$  الحادثة:

" الحصول على رقم زوجي" و  $B$  الحادثة:

" الحصول على مضاعف للعدد 3".

احسب احتمال الحادثة "  $A$  أو  $B$ ".

27. نرمي زهر نرد مزيفا. نعلم أن احتمال

الحصول على رقم فردي يساوي  $\frac{1}{10}$ .

28. تتوزع أعمار تلاميذ قسم كما يلي:

24% تبلغ أعمارهم 16 سنة، 31% تبلغ أعمارهم 17

سنة 30% تبلغ أعمارهم 18 سنة، 15% تبلغ

أعمارهم 19 سنة..

نختار تلميذا بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحادثتين التاليتين:

$A$ : " التلميذ المختار له 17 سنة على الأقل".

$B$ : " عمر التلميذ المختار أكبر تماما من 17 سنة".

29. علبة فيها قريصات، الربع منها بيضاء

والثلث سوداء و الباقي حمراء.

نسحب قريصة واحدة بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

$A$ : " القريصة بيضاء".

$B$ : " القريصة سوداء".

$C$ : " القريصة حمراء".

30. يحتوي قسم على 36 تلميذا. يسأل الأستاذ أحد

التلاميذ بصفة عشوائية. إذا كان الاحتمال أن يكون

هذا التلميذ ذكرا يساوي  $\frac{4}{9}$ ، فما هو عدد الذكور في

القسم؟

31. تصنع آلة قطعا حديدية دائرية الشكل حيث

القطر النظري لكل منها يساوي  $10 \text{ cm}$ .

بعد سحب 1000 قطعة بصفة عشوائية ومراقبة

أقطارها الحقيقية سجلت النتائج في الجدول التالي:

| القطر   | $[9,95; 10[$ | $10; 10,02[$ | $[10,02; 10,05[$ |
|---------|--------------|--------------|------------------|
| التكرار | 200          | 640          | 160              |

نأخذ قطعة بصفة عشوائية.

احسب احتمال كل من الحادثتين:

$A$ : " قطر القطعة أكبر أو يساوي  $10,02 \text{ cm}$ ".



B: " قطر القطعة أكبر أو يساوي 10 cm".

|           |   |   |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| زهري<br>2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 1         |   |   |   |   |   |   |
| 3         |   |   |   |   |   |   |
| 4         |   |   |   |   |   |   |
| 5         |   |   |   |   |   |   |
| 6         |   |   |   |   |   |   |
| 8         |   |   |   |   |   |   |

- (2) أعط كل قيم المجموع  $x$  ثم احسب احتمال الحصول على كل منها.  
(3) ما هو احتمال الحصول على مجموع فردي؟

35. يمثل الجدول التالي توزيع 1000 شخص حسب الزمرة الدموية والمعامل (Rhésus) Rh.

|               |                   |     |    |    |     |
|---------------|-------------------|-----|----|----|-----|
| المعامل<br>Rh | الزمرة<br>الدموية | A   | B  | AB | O   |
| Rh +          |                   | 328 | 81 | 42 | 360 |
| Rh -          |                   | 72  | 19 | 8  | 90  |

- نسأل أحد الأشخاص بصفة عشوائية.  
(1) ما هو الاحتمال أن يكون من الزمرة O ؟  
(2) ما هو الاحتمال أن يكون من المعامل Rh - ؟  
(3) نعلم أن شخصا معيناً من الزمرة O. ما هو الاحتمال أن يكون من المعامل Rh - ؟  
(4) نعلم أن شخصا معيناً من المعامل Rh - . ما هو الاحتمال أن يكون من الزمرة O ؟

36. نعتبر المجموعة  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ .

1. باستعمال شجرة، اكتب كل الأعداد المتكونة من 3 أرقام من  $\Omega$  دون تكرار أي رقم من هذه الأرقام.  
2. نختار أحد هذه الأعداد ذات 3 أرقام بصفة عشوائية. ما هو الاحتمال أن يكون العدد:  
(أ) زوجياً؟  
(ب) مضاعفاً للعدد 3؟  
(ج) مضاعفاً للعدد 6؟

الاحتمالات والجدول

32. يمثل الجدول التالي نتائج المترشحين في امتحان البكالوريا في ثانوية:

|      |      |      |
|------|------|------|
|      | إناث | ذكور |
| ناجح | 78   | 104  |
| راسب | 20   | 38   |

1. نصادف أحد المترشحين.  
ما هو الاحتمال أن يكون هذا التلميذ:  
(أ) ذكراً ناجحاً؟  
(ب) أنثى؟  
(ج) راسباً؟  
2. نصادف أحد المترشحين الذكور.  
ما هو الاحتمال أن يكون هذا المترشح ناجحاً.  
قارن هذه النتيجة مع نتيجة السؤال 1. (أ).  
3. نصادف أحد المترشحين الراسبين.  
ما هو الاحتمال أن يكون هذا المترشح أنثى؟

33. 25 % من تلاميذ السنة الثانية أدب داخليون و 35 % نصف داخليين و 40 % خارجيون.

- 48 % من تلاميذ السنة الثانية أدب ذكور ونصف عددهم في النظام نصف الداخلي و الثلث خارجي.  
1. أنجز جدول التواتر لتوزيع تلاميذ السنة الثانية أدب.  
2. نختار أحد التلاميذ بصفة عشوائية.  
ما هو الاحتمال أن يكون هذا التلميذ:  
(أ) ذكراً؟  
(ب) ذكراً نصف داخلي؟  
(ج) أنثى خارجية؟

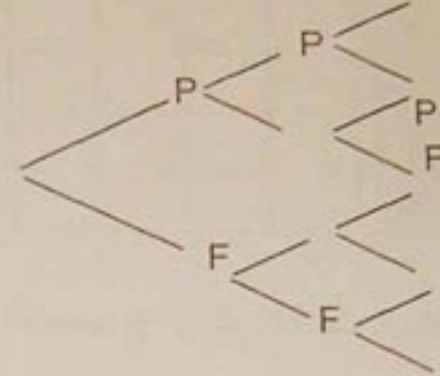
34. نعتبر زهري نرد أوجهها مرقمة كما يلي:

- زهري النرد الأول: 1، 2، 2، 3، 4، 4.  
زهري النرد الثاني: 1، 3، 4، 5، 6، 8.  
نرمي زهري النرد و نسجل مجموع الرقمين  $x$  المحصل عليه.  
نفرض أن كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور.  
(1) اتمم الجدول التالي بتدوين قيمة  $x$  في كل خانة.



الاحتمالات والأشجار

**37.** نرمي قطعة نقدية 3 مرات على التوالي و نرسم بالحرف F للوجه وبالحرف P للظهر. (1) أتمم الشجرة التالية للحصول على كل النتائج الممكنة.



احسب احتمال كل من الحوادث التالية:  
A: "الحصول 3 مرات على الظهر".  
B: "الحصول مرة واحدة على الأكثر على الظهر".  
C: "الحصول مرة واحدة على الأقل على الظهر".

**38.** تحتوي علبة على 5 كرات ، اثنتان حمراوان ، واحدة صفراء ، واحدة خضراء وواحدة سوداء.

1. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية. (أ) احسب احتمال الحصول على كرة صفراء. (ب) احسب احتمال الحصول على كرة حمراء.
2. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية ونسجل لونها ثم نرجعها إلى العلبة. نسحب كرة ثانية ونسجل لونها. أنجز شجرة مبينا فيه كل الإمكانيات.
3. (أ) ما هو عدد إمكانيات هذه التجربة؟ (ب) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون؟

**39.** تحتوي علبة على 4 كرات: واحدة صفراء نرسم إليها بـ  $V_1$  و 3 خضراء نرسم إليها بـ  $V_2$  ،  $V_3$  ،  $V_4$  . وتحتوي علبة ثانية على كرتين: إحداهما صفراء نرسم إليها بـ  $V_1$  والثانية خضراء نرسم إليها بـ  $V_2$  .

نسحب، بصفة عشوائية، كرة من العلبة الأولى ثم كرة من العلبة الثانية.

1. مثل هذه التجربة بشجرة.
2. (أ) ما هو عدد إمكانيات السحب المختلفة؟ (ب) اكتب كل إمكانيات الحادثة: "الكرتان خضراوان".
3. احسب احتمال كل من الحوادث التالية:  
(أ) A: "الكرتان من لونين مختلفين".  
(ب) B: "الكرة الأولى صفراء".

مسائل

**40.** تتكون الدرينة من 4 مناطق دائرية متمركزة ومركزة من 1 إلى 4. أنصاف قطر هذه المناطق هي  $5\text{ cm}$  ،  $10\text{ cm}$  ،  $15\text{ cm}$  ،  $20\text{ cm}$ .

نسمي  $p_i$  احتمال إصابة المنطقة ذات الرقم  $i$  ونسمي  $p_0$  احتمال عدم إصابة الدرينة



نفرض أن احتمال إصابة إحدى المناطق متناسبة مع مساحة هذه المنطقة و  $p_1 = 0,02$ .

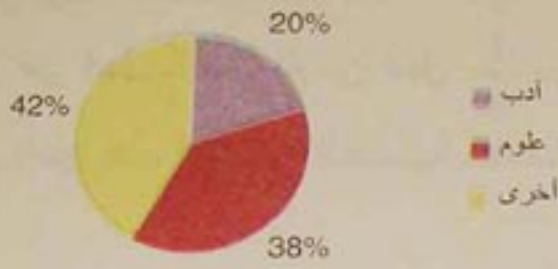
- 1) أوجد قانون الاحتمال على المجموعة  $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .
- 2) عين احتمال كل من الحادثتين التاليتين:  
A: "إصابة الدرينة في نقطة تبعد بأكثر من  $5\text{ cm}$  عن مركز هذه الدرينة".  
B: "إصابة الدرينة في نقطة تبعد بأقل من  $15\text{ cm}$  عن مركز هذه الدرينة".

**41.** يمثل الجدول التالي توزيع 400 عامل مؤسسة اقتصادية حسب الجنس والمرتب الشهري (بالدينير).

|                  | رجال | نساء |
|------------------|------|------|
| $[8000; 12000[$  | 120  | 80   |
| $[12000; 16000[$ | 80   | 45   |
| $[16000; 20000[$ | 40   | 10   |
| $[20000; 24000[$ | 20   | 5    |



43. يمثل المخطط الدائري التالي توزيع الكتب في مكتبة.



عند إعداد بطاقة لكل كتاب، لاحظ المكتبي ما يلي:

- 80% من الكتب العلمية هي كتب مدرسية.
- 70% من الكتب الأدبية ليست مدرسية.
- 50% من الكتب الأخرى ليست مدرسية.

يأخذ المكتبي بطاقة بصفة عشوائية من ملفه ما هو الاحتمال أن تكون هذه البطاقة موافقة لـ:

- (1) كتاب علمي مدرسي؟
- (2) كتاب مدرسي؟
- (3) كتاب أدبي مدرسي؟

44. نعتبر المجموعة  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

$\alpha, \beta$  عنصران من  $\Omega$ .

1. أوجد حل المعادلة:

$$(\alpha x - 2)(\beta x - 4) = 0$$

ب) ما هي قيم العددين  $\alpha, \beta$  من  $\Omega$  التي من أجلها يكون حلا المعادلة السابقة عددين صحيحين طبيعيين؟

2. نرمي زهري نرد أحدهما أسود والآخر أحمر. نعطي للعدد  $\alpha$  قيمة وجه زهر النرد الأسود وللعدد  $\beta$  قيمة وجه زهر النرد الأحمر.

أ) ما هو الاحتمال أن تقبل

$$\text{المعادلة } (\alpha x - 2)(\beta x - 4) = 0$$

المرفقة بهذا الرمي حلين صحيحين طبيعيين؟  
ب) استنتج الاحتمال أن يكون احد الحلين على الأقل عددا غير صحيح.

45.  $a, b, c$  أعداد من المجال  $[0, 1]$  حيث

تمثل الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية حسابية.

نعتبر زهر نرد مزيفا بحيث  $p(1) = p(2) = a$ ,

$$p(3) = p(4) = b, p(5) = p(6) = c$$

( $p(i)$  هو احتمال ظهور الوجه ذي الرقم  $i$ ).

1. احسب كلا من:

- المرتب الشهري الأوسط للرجال.
- المرتب الشهري الأوسط للنساء.
- المرتب الشهري الأوسط لمجموعة العمال.

2. نختار أحد عمال المؤسسة بصفة عشوائية.

كل الاختيارات متساوية الاحتمال.

احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

- A: " هذا العامل هو رجل ".  
B: " هذا العامل يتقاضى مرتبا شهريا محصورا بين 16 000 و 20 000 دينار.

C: " هذا العامل هو رجل ويتقاضى مرتبا شهريا محصورا بين 20 000 و 24 000 دينار."

42. تحتوي علبة على 4 كرات: اثنتان حمراوان، واحدة خضراء وواحدة صفراء. نسحب كرة واحدة من العلبة بصفة عشوائية ونسجل لونها ثم نرجعها إلى العلبة ونسحب كرة أخرى ونسجل لونها.

1. أ) أرسم شجرة موافقة لهذه التجربة.

ب) نعتبر الحادثة A: " الكرتان المسحوبتان حمراوان " والحادثة B: " إحدى الكرتين المسحوبتين حمراء ".

باستعمال الشجرة احسب الاحتمالين  $p(A)$  و  $p(B)$ .

ج) عبر بجملة عن الحادثة C حيث

$$C = A \cup B$$

احسب الاحتمال  $p(C)$ .

د) باستعمال الاحتمال  $p(C)$ ، احسب

الاحتمال  $p(E)$  حيث E هي الحادثة: " لا

توجد أية كرة حمراء من بين الكرتين المسحوبتين ".

2. كل من الكرتين الحمراوين تحمل الرقم 1 والكرة الخضراء تحمل الرقم 2 والكرة الصفراء تحمل الرقم 4.

نهتم في هذه المرة بالرقمين المحصل عليهما عند سحب كرتين و نرمز بـ  $x$  إلى مجموع هذين الرقمين.

ما هو الاحتمال أن يكون المجموع  $x$  أكبر أو يساوي 4؟



3. أ) ما هو عدد الثلاثيات الممكنة عند رمي 3 أزهار النرد؟

(نعتبر النرد الأسود ثم الأخضر ثم الأحمر).

ب) باستعمال شجرة، عين عدد الثلاثيات  $(a;b;c)$

حيث  $a+b+c=10$ .

استنتج احتمال الحصول على المجموع 10.

ج) احسب بنفس الطريقة احتمال الحصول على كل

من المجموعين 11 و 12.

د) استنتج المجموع الذي يحتمل الحصول عليه

أكثر عند رمي 3 أزهار نرد.

47. تحتوي ثانوية على 80 موظفا موزعين في 3 فئات : مرسوم، متربص، مستخلف، كما يلي:

- 40% من الموظفين رجال.

- 75% من الرجال مرسومون.

- يحتوي صنف المتربصين على 20% من

موظفي الثانوية منهم 6 رجال.

- يحتوي صنف المستخلفين على نفس عدد الرجال

والنساء.

1. اتمم الجدول التالي اعتمادا على المعطيات السابقة.

|         | مرسم | متربص | مستخلف | المجموع |
|---------|------|-------|--------|---------|
| رجال    |      |       |        |         |
| نساء    |      |       |        |         |
| المجموع |      |       |        | 80      |

2. نسحب اسم أحد الموظفين بصفة عشوائية.

نعتبر الحوادث التالية:

A: "الشخص امرأة"؛ B: "الشخص مرسوم".

C: "الشخص امرأة مرسومة".

احسب الاحتمالات  $p(A)$ ،  $p(B)$ ،  $p(C)$ ،

$p(A \cup B)$ .

3. نسحب اسم موظف من كل فئة من الفئات الثلاث

بصفة عشوائية. يمكن كتابة نتيجة هذا السحب في

شكل ثلاثية  $(x;y;z)$  حيث  $x$  هو موظف مرسوم،

$y$  هو موظف متربص،  $z$  هو موظف مستخلف.

أ) ما هو عدد الثلاثيات الممكنة؟

ب) نقبل أن كل النتائج متساوية الاحتمال.

احسب احتمال كل من الحادثتين:

D: " نحصل على 3 رجال".

E: " نحصل على امرأة واحدة على الأقل".

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a+b+c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. أ) بين أن:

2. احسب  $c$  من أجل  $a=\frac{1}{5}$  ثم من أجل  $a=\frac{1}{10}$ .

3. ماذا نقول عن هذه المتتالية الحسابية عندما

$$a=\frac{1}{6}?$$

46. نرمي 3 أزهار نرد متوازنة ومن ألوان مختلفة (أسود، أخضر، أحمر) و أوجهها مرقمة من 1 إلى 4. نهتم بمجموع الأرقام المحصل عليها.

باستعمال جدول، أنجز محاكاة ذات 1000

رمية ثم محاكاة ثانية ذات 5000 رمية.

اتم الجدولين التاليين اللذين يمثلان توزيع

المجاميع المحصل عليها بعد 1000 رمية وبعد

5000 رمية:

| التكرار        | المجموع | التكرار        | المجموع |
|----------------|---------|----------------|---------|
|                | 3       |                | 3       |
|                | 4       |                | 4       |
|                | 5       |                | 5       |
|                | 6       |                | 6       |
|                | 7       |                | 7       |
|                | 8       |                | 8       |
|                | 9       |                | 9       |
|                | 10      |                | 10      |
|                | 11      |                | 11      |
|                | 12      |                | 12      |
|                | 13      |                | 13      |
|                | 14      |                | 14      |
|                | 15      |                | 15      |
|                | 16      |                | 16      |
|                | 17      |                | 17      |
|                | 18      |                | 18      |
| التكرار الكلي: | 1000    | التكرار الكلي: | 5000    |

2. ما هو المجموع الذي يبدو المحتمل أكبر

حسب الجدولين السابقين؟



لتحميل الكتب المدرسية

الابتدائي-المتوسط-الثانوي

إضغط هنا

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

